第７章「代数系」の問題

例題７－１． 位数 $1, 2, 3$ の群を乗法を用いて求めよ.

（例題７－１の解答） 乗法群として

位数 1 の群： $G = \{1\}$
位数 2 の群： $G = \{\pm 1\}$
位数 3 の群： $G = \{1, \omega, \omega^2\},\ \omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

例題７－２． 例題１の群の演算表を求めよ。

（例題７－２の解答）

×	1
1	1

×	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

×	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

例題７－３． 位数 $1, 2, 3$ の群を加法を用いて求め, その演算表を求めなさい。

（例題７－３の解答） 加法を使うが, 位数 n のときは, $a+b$ をその答えを n で割った余り r, $(0 \leq r \leq n-1)$ として定義する.

位数 1 の群： $G = \{0\}$
位数 2 の群： $G = \{0, 1\}$
位数 3 の群： $G = \{0, 1, 2\}$.

演算表は

+	0
0	0

+	0	1
0	0	1
1	1	0

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

この演算表と例題７－２の演算表は本質的に同じである．例題７－１の３つの群とこの問題の３つの群はそれぞれ同型である.

例題７－４． 位数 4 の群の演算表を求めてみよ．(2 種類ある)

（例題７－４の解答）

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	b	c	e
b	b	c	e	a
c	c	e	a	b

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

例題７－５．

$$S = \{k_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \mid \theta \in \mathbf{R}\}$$

は乗法群であることを確かめよ．単位元と k_θ の逆元を求めよ．

（例題７－５の解答） 行列の積の規則と三角関数の加法定理に注意すれば

$$k_\theta \times k_\phi = k_{\theta+\phi}$$

であることが分かる．よって S は乗法で閉じており, 結合法則も明らかである．単位元は

$$k_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

k_θ の逆元は

$$k_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

である．この群は可換群である．

例題７－６． G の任意の要素を x, y とする．e は単位元とし, 演算を乗法の形を用いて xy で表わすことにする．（以下の問題に対しても同様）

(1) $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ を示せ．
(2) $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n$ を示せ．
(3) $x^2 = e$ ならば G は可換群となることを示せ．

（例題７－６の解答）

(1) $(xy) \cdot (y^{-1}x^{-1}) = x(yy^{-1})x^{-1} = xex^{-1} = xx^{-1} = e$.
(2) (1) と同様に, $(x_1x_2\cdots x_n)^{-1} = x_n^{-1}\cdots x_2^{-1}x_1^{-1}$. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ とすれば求める式を得る．

(3) (1) より, 任意の要素に対して $x = x^{-1}$. ゆえに $xy = x^{-1}y^{-1} = (yx)^{-1} = yx$.

例題７－７． 群の要素 x に対して, $x^n = e$, e は単位元, となる最小の自然数をその要素の位数という.

(1) G を１の３乗根からなる群（例題７－１参照）としたとき, 各要素の位数を求めよ.

(2) 例題７－４の２つの群に対して, 各要素の位数を求めよ.

(3) 各要素の位数が有限な無限群を作りなさい.

（例題７－７の解答）

(1) $1, \omega, \omega^2$ の位数はそれぞれ, $1, 3, 3$.

(2) 最初の例では, e, a, b, c の位数はそれぞれ, $1, 4, 4, 4$. ２番目の例では $1, 2, 2, 2$.

(3) G を１の 3^n 乗根 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ の全体とする. すなわち

$$G = \{\cos\left(\frac{2l\pi}{3^n}\right) + i\sin\left(\frac{2l\pi}{3^n}\right) \mid l \in \mathbf{Z}, n = 0, 1, 2, \cdots\}.$$

この集合が乗法に関して群となっていること, および題意を満たすことは各自確かめよ.

例題７－８． G を群とし, A, B をその部分群とする.

(1) $A \cap B$ は G の部分群となることを示せ.

(2) a を A の任意の要素としたとき, $aAa^{-1} = \{axa^{-1} | x \in A\}$ は G の部分群となることを示せ.

(3) $A \cup B$ が G の部分群とならない例を作りなさい.

（例題７－８の解答）

(1) $A \cap B$ の２要素を x, y とすれば, $x, y \in A$ であり, A は部分群であるから, $xy \in A$ である. 同様に $xy \in B$. ゆえに $xy \in A \cap B$ を得る. $A \cap B$ は演算で閉じているから部分群である.

(2) aAa^{-1} の２要素を x, y とすれば, $x = aua^{-1}, y = ava^{-1}$, $u, v \in A$ と書ける. よって

$$xy = (aua^{-1})(ava^{-1}) = au(a^{-1}a)va^{-1} = a(uv)a^{-1}.$$

A は部分群であるから, $uv \in A$ である. ゆえに $xy \in A$ となり, aAa^{-1} は演算で閉じているから部分群である.

(3) $G = \mathbf{Z}$（整数全体）, $A = 3\mathbf{Z}$（3 の倍数全体）, $B = 5\mathbf{Z}$（5 の倍数全体）とし, 加法で演算を考える. $3, 5 \in A \cup B$ だが $3 + 5 = 8$ は $A \cup B$ の要素ではない. 演算で閉じていないから, $A \cup B$ は部分群でない.

例題７－９． 群 G に対して, すべての要素と可換な要素全体 $Z(G)$ を G の中心という. すなわち

$$Z(G) = \{x \in G \mid yxy^{-1} = x, \ \forall y \in G\}$$

である. このとき $Z(G)$ は G の正規部分群となることを示しなさい.

（例題７－９の解答） 最初に $Z(G)$ が部分群であることを示す. a, b を $Z(G)$ の 2 つの要素とすると, すべての G の要素 y に対して $yay^{-1} = a, \ yby^{-1} = b$, が成り立つ. このとき

$$y(ab)y^{-1} = yay^{-1}yby^{-1} = ab.$$

であるから $ab \in Z(G)$ となる. ゆえに $Z(G)$ は G の部分群である. $Z(G)$ の定義から $yZ(G)y^{-1} = Z(G)$ となるから, $Z(G)$ は G の正規部分群となる.

例題７－１０． G を群とし, H をその部分群, N をその正規部分群とする.

(1) NH は G の部分群であることを示しなさい.
(2) N は NH の正規部分群であることを示しなさい.
(3) $N \cap H$ は H の正規部分群であることを示しなさい.

（例題７－１０の解答）

(1) NH の 2 つの要素を x, y とすれば, $x = nh, y = n'h'$, $n, n' \in N$, $h, h' \in H$, と書ける. このとき, N が正規部分群であることに注意して

$$xy = nhn'h' = n(hn'h^{-1})hh' \in NH$$

となる.

(2) $N \subset NH$ は明らかに NH の部分群である. NH の任意の要素 x は G の要素であるから, $xNx^{-1} \subset N$ となる.

(3) $N \cap H$ が H の部分群となることは容易である. H の任意の要素 h に対して

$$h(N \cap H)h^{-1} = hNh^{-1} \cap hHh^{-1} = N \cap H$$

となり, $N \cap H$ は H の正規部分群である.

例題７－１１． G, H を群とし, $f: G \to H$ を準同型写像とする.

(1) $f(e_G) = e_H$ を示しなさい. e_G, e_H は G, H の単位元.

(2) x を G の要素とすると, $f(x)^{-1} = f(x^{-1})$ となることを示しなさい.

(3) f の像 $f(G) = \{f(x) | x \in G\}$ は H の部分群となることを示しなさい.

(4) f の核 $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in G | f(x) = e_H\}$ は G の正規部分群となることを示しなさい.

（例題７－１１の解答）

(1) $e_G e_G = e_G$ に注意すると, f は準同型だから

$$f(e_G) = f(e_G e_G) = f(e_G) f(e_G)$$

となる. $f(e_G)$ の逆元を左から掛ければ, $e_H = f(e_G)$ を得る.

(2) f が準同型であるから, (1) に注意して

$$f(x) f(x^{-1}) = f(x x^{-1}) = f(e_G) = e_H.$$

(3) $f(G)$ の 2 要素を x, y とすれば, $x = f(a), y = f(b)$, $a, b \in G$, と書ける. このとき f は準同型であるから

$$xy = f(a) f(b) = f(ab)$$

となり, $ab \in G$ より, $xy \in f(G)$ である. よって $f(G)$ は H の部分群である.

(4) $\mathrm{Ker}(f)$ の 2 要素を x, y とすれば, $f(x) = f(y) = e_H$ である. このとき f は準同型であるから

$$f(xy) = f(x) f(y) = e_H e_H = e_H$$

となり, $xy \in \mathrm{Ker}(f)$ である. よって $\mathrm{Ker}(f)$ は G の部分群である. さらに a を G の任意の要素とすると, (2) に注意して

$$f(axa^{-1}) = f(a) f(x) f(a^{-1}) = f(a) e_H f(a)^{-1} = f(a) f(a)^{-1} = e_H$$

となり, $axa^{-1} \in \mathrm{Ker}(f)$ である. ゆえに $a\mathrm{Ker}(f)a^{-1} \subset \mathrm{Ker}(f)$ であるから, $\mathrm{Ker}(f)$ は G の正規部分群である.

例題７－１２． G を群とし,H をその正規部分群とする. G の同値関係 $\sim$ を

$$a \sim b \quad \leftrightarrow \quad ab^{-1} \in H$$

で定義し, その商 $G/\sim$ を G/H と書くことにする.

(1) $\sim$ が同値関係であることを示しなさい.

(2) G/H の演算を

$$aH \cdot bH = abH$$

で定められること示しなさい. (同値類の代表元の取り方によらないことを示す)

(3) (2) の演算により, G/H は群となることを示しなさい. この群を G の正規部分群 H による剰余群という.

（例題７－１２の解答）

(1) 推移律を示す. 他は各自で示すこと. $a \sim b$, $b \sim c$ とすると, $ab^{-1}, bc^{-1} \in H$ である. このとき

$$ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) \in H$$

であるから, $a \sim c$ である.

(2) $aH = a'H, bH = b'H$ とすれば, $a' = au, b' = bv$, $u, v \in h$, と書ける. このとき H が正規部分群であることに注意すれば

$$a'H \cdot b'H = a'b'H = aubvH = ab(b^{-1}ub)vH = abH = aH \cdot bH$$

となる.

(3) G/H の単位元は $eH = H$, aH の逆元は $a^{-1}H$ となる. 結合法則は各自示してみよ.

例題７－１３． G を群とし, H をその正規部分群とする. G から剰余群 G/H への写像 $f : G \to G/H$ を

$$f(x) = xH$$

と定めれば, f は上への準同型写像である.

（例題７－１３の解答） 上への写像となることは, G/H の任意の要素 aH, $a \in G$, に対して $f(a) = aH$ となるから明らかである. 準同型となることは

$$f(ab) = abH = aH \cdot bH = f(a)f(b)$$

より明らかである.

例題７－１４.（第一準同型定理）G, H を群とし, $f : G \to H$ を準同型写像とする. このとき
$$f(G) \cong G/\mathrm{Ker}(f)$$
となることを示せ.

（例題７－１４の解答） 例題７－１１により, $f(G)$ は H の部分群, $\mathrm{Ker}(f)$ は G の正規部分群である. 例題７－１２より, 剰余群 $G/\mathrm{Ker}(f)$ は定義される. 以下, $\mathrm{Ker}(f)$ を K と書くことにし
$$F : f(G) \to G/K$$
を $F(f(x)) = xK$, $x \in G$, で定義する.
$$F(f(x)f(y)) = F(f(xy)) = xyK = xKyK = F(f(x))F(f(y))$$
より, F は準同型写像である. G/K の任意の要素 aK に対して, $F(f(a)) = aK$ であるから F は上への写像である. $F(f(x)) = F(f(y))$ とすると, $xK = yK$, すなわち, $x = yk$, $k \in K$ と書ける. ゆえに $K = \mathrm{Ker}(f)$ に注意して
$$f(x) = f(yk) = f(y)f(k) = f(y)e_H = f(y)$$
となり, F は１対１の写像である. 以上のことから F は同型写像である.

例題７－１５. G, H を有限群とし, $f : G \to H$ を上への準同型写像とする. このとき, $|H|$ は $|G|$ の約数である.

（例題７－１５の解答） 例題７－１４より
$$f(G) = H \cong G/\mathrm{Ker}(f)$$
である. ゆえに
$$|G| = |H||\mathrm{Ker}(f)|$$
となり求める結果を得る.

例題７－１６.（第二準同型定理）G を群とし, H をその部分群, N をその正規部分群とする.　このとき
$$NH/N \cong H/H \cap N.$$

（例題７－１６の解答）　例題７－１０と例題７－１２により両辺の剰余群は定義される.

$$f : H \to NH/N$$

を $f(h) = hN$ で定める. $h, h' \in H$ に対して

$$f(hh') = hh'N = hNh'N = f(h)f(h)$$

であるから f は準同型写像である. NH/N の代表元は, $nhN = h(h^{-1}nh)N = hN$, $n \in N$, $h \in H$, であるから, f は上への写像である. f の核を求める. NH/N の単位元は N に注意する. $f(h) = hN = N$ とすると, $h \in N \cap H$ である. 逆も明らかであるから, $\mathrm{Ker}(f) = N \cap H$ である.

以上のことから例題７－１４の第一準同型定理より求める結果が得られる.