第８章「行列」の問題

例題８－１

$$3\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

（例題８－１の解答）

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -10 & -12 \\ -14 & -6 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} 3-10 & -9-12 \\ 6-14 & -12-6 \end{pmatrix} \\ = & \begin{pmatrix} -7 & -19 \\ -8 & -18 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

類題８－１

$$2\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

（類題８－１の解答）

$$\begin{pmatrix} -10 & -10 & 3 \\ -5 & -3 & 10 \\ -5 & -12 & -5 \end{pmatrix}$$

例題８－２

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

（例題８－２ の解答）

$$\begin{pmatrix} 1\times1+2\times2 \\ 3\times1+1\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times4+3\times3 & 1\times1+3\times2 \\ 2\times4+4\times3 & 2\times1+4\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 7 \\ 20 & 10 \end{pmatrix}$$

類題８－２ 以下の計算をしなさい.

(1) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^2$

（類題８－２ の解答）

(1) $\begin{pmatrix} 6 & 16 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

例題８－３ 次の rank を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

（例題８－３ の解答）

1 列から 3 列をひく.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

3 列から 1 列をひく.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

2 列に 1 列をたす.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3 行に 2 行をたす.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3 行に 1 行を 3 倍したものをたす.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 列と 2 列を交換.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 列と 3 列を交換.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 列を -1 倍.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

よって $\mathrm{rank}A = 2$

類題８－３ 次の rank を求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

（類題８－３の解答） $\operatorname{rank} A = 2$

例題８－４ 次の逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

（例題８－４の解答）

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に行基本変形をする.

1 行から 2 行ひく.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2 行に 3 行の 5 倍をたす.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -6 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 行から 1 行ひく.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 7 & -6 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2 行から 3 行の 6 倍をひく.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2 行から 3 行をひく.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & -7 & -1 & 9 \end{pmatrix}$$

1 行と 3 行を -1 倍する.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

1 行と 3 行を入れ替え,2 行と 3 行を入れ替える.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 & 1 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 7 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

よって求める逆行列は,

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & -7 \\ 7 & 1 & -9 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

類題８－４ 次のの逆行列を求めよ.

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

（類題８－４の解答）

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

例題８－５ 次の行列式を求めよ.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

（例題８－５の解答）

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & -5 & 3 \\ 2 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

1 列に 2 列を加える.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ 1 & -2 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

3 行に 2 行を加える.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

4 列を $\frac{1}{2}$ 倍して 2 列に加える.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{9}{4} & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

4 行に 1 行を加える.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{9}{4} & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

3 行から 4 行をひく.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & \frac{9}{4} & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2 行から 3 行の $\frac{1}{4}$ 倍をひく.

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1 列で展開.

$$= (-1)^{(1+4)} \begin{vmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

1 列で展開.

$$= (-1)^{(1+4)}(-1)^{(3+1)} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -1 \times (3 \times 3 - (-2) \times 5) = -1$$

類題８－５ 次の行列式を求めよ.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

（類題８－５の解答） $|A| = 0$

例題８－６ 次の連立方程式を解きなさい.

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ -y + 2z = -3 \\ -y + z = -1 \end{cases}$$

（例題８－６の解答）

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

とおくと, $|A| = 1$,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, $|A_1| = 7$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して, $|A_2| = -1$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

に対して, $A_3 = -2$

よって

$$\begin{cases} x = \dfrac{|A_1|}{|A|} = 7 \\ y = \dfrac{|A_2|}{|A|} = -1 \\ z = \dfrac{|A_3|}{|A|} = -2 \end{cases}$$

類題８－６ 次の連立方程式を解きなさい.

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y + z = -2 \\ -2y - z = 3 \end{cases}$$

（類題８－６の解答）

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

例題８－７

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

に対して

$$W_1 = \{x | x \in \mathbf{R}, Ax = 0\}, W_2 = \left\{Ax | x \in \mathbf{R}^3\right\}$$

とおく.

(1) $\dim W_1$ と W_1 の基底のひとつを求めよ.

(2) $\dim W_2$を求めよ.

（例題８－７の解答）

(1)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x+y+2z \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x = y = -z$$

$$W_1 = \{c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}|c \in \mathbf{R}\}$$

よって W_1 の基底は

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

となる. $\dim W_1 = 1$

(2) $W_2 \ni y$ とすると $y = Ax,\ x \in \mathbf{R}^3$ が存在する.

$$x = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} p, q, r \in \mathbf{R}$$

とすると,

$$y = p\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= p\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= (-p+q)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (p+r)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C_1, C_2 \in \mathbf{R}$$

となる.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad と \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

は一次独立であるので $\dim W_2 = 2$

類題８－７

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \\ 6 & 3 & -9 \end{pmatrix}$$

に対して

$$W_1 = \{x | x \in \mathbf{R}, Bx = 0\}, W_2 = \left\{Bx | x \in \mathbf{R}^3\right\}$$

とおく.
(1) $\dim W_1$ と W_1 の基底のひとつを求めよ.
(2) $\dim W_2$ を求めよ.

（類題８－７の解答） (1) W_1 の基底は

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

よって $\dim W_1 = 2$. (2) $\dim W_2 = 1$.

例題８－８ 次の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -8 & 6 \\ 8 & 9 & -4 \\ 7 & 8 & -4 \end{pmatrix}$$

(**例題８－８の解答**)

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} -5-\lambda & -8 & 6 \\ 8 & 9-\lambda & -4 \\ 7 & 8 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+3)$$

よって固有値 $\lambda = 1, 2, -3.$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 2$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\lambda = -3$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

類題８－８ 次の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 6 & -12 \\ -22 & 10 & -18 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

(**類題８－８の解答**) 固有値は $\lambda = -1, 1, 2.$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda = 24$ に対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

類題８－９ 次の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 16 \\ 0 & 1 & 2 \\ -20 & 10 & -18 \end{pmatrix}$$

(**類題８－９の解答**) 固有値は $\lambda = 1, 2, -3$.
それぞれに対する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

例題８－１０ 次の行列の固有値・固有ベクトルを求め, 対角化しなさい.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 14 & -5 \end{pmatrix}$$

(**例題８－１０の解答**) 固有値は

$$|A - \lambda E| = -(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3)$$

より, $\lambda = -1, -2. -3$.
それぞれに対応する固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

となるので

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

とおくと

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

と対角化できる.

類題８－１０ 次の行列を対角化しなさい.

$$P=\begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ -4 & 6 & -4 \\ 16 & -8 & 2 \end{pmatrix}$$

（類題８－１０の解答）

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$