第９章「連続性」の演習問題

例題９－１ 次の関数の極限値を求めなさい.

極限値がない場合は,「なし」と答えなさい. ただし $f(x)$ が正で, その値が限りなく大きくなるときは ∞, $f(x)$ が負で, その絶対値の値が限りなく大きくなるときは $-\infty$, と答えなさい. また $x \to \infty$ は x の値を限りなく正に大きくすることであり, $x \to -\infty$ は x の値を限りなく負に大きくすることである.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x^2-9}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^3+3x}{x^2-9x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x}$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^3+x}{x^3-9x^2}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} -x^2+3$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \sin 2x$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{\sin 2x}{x}$

(**例題９－１の解答**)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x+3}{x^2-9} = \frac{5}{-5} = -1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1} =$ なし

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = \infty$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3+3x}{x^2-9x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+3}{x-9}=-\frac{1}{3}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}=\lim_{x\to 0}x(\sqrt{x+1}+1)=0$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{|x|}=$ なし

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{2x^3+x}{x^3-9x^2}=\lim_{x\to -\infty}\frac{2+1/x^2}{1-9/x}=2$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}-x^2+3=-\infty$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sin 2x=$ なし

(12) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{\sin 2x}{x}=0$

類題９－１ 次の関数の極限値を求めなさい．ただし次の事実は知られている．

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\log x}{x}=1.$$

（これらについては参考図書で調べること.）

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}\ (b\neq 0)$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{-1/x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}\ (a\neq 0)$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^2)}{2x}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x}$

(**類題９－１の解答**)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{ax}\frac{bx}{\sin bx}\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2(\sin x/2)^2}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}2\frac{(\sin x/2)^2}{(x/2)^2}\frac{(x/2)^2}{x\sin x}=\frac{1}{2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. $x=\frac{1}{t}$ とすれば $x\to 0$ は $t\to\infty$ と同じ.

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{-1/x}=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{1/x}\right)^{-1}=\frac{1}{e}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left((1+ax)^{1/ax}\right)^{a}=e^a$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^2)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x+x^2)}{x+x^2}\frac{x+x^2}{2x}=\frac{1}{2}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x}=1$. $x=\log(1+t)$ とすれば $x\to\infty$ は $t\to 0$ と同じ.

例題９－２ 次の関数は $x=0$ で連続かどうか判定しなさい.

(1) $f(x)=x^2+3$

(2) $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & (x\neq 0)\\ 1 & (x=0)\end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=1)\end{cases}$

(4) $f(x)=\begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

(5) $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{x} & (x\neq 0)\\ 0 & (x=0)\end{cases}$

(**例題９－２の解答**)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=3,\ f(0)=3$ より $x=0$ で連続

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=3,\ f(0)=1$ より $x=0$ で不連続

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=1,\ f(0)=1$ より $x=0$ で連続

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=$ なし（$x_n=1/2n\pi$ として $n\to\infty$ とした場合と, $x_n=1/(2n+1)\pi$ として $n\to\infty$ とした場合を考えてみよ.）$f(0)=0$ より $x=0$ で不連続

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}f(x)=$ なし. $f(0)=0$ より $x=0$ で不連続

類題９－２ 次の関数は $x=0$ で連続かどうか判定しなさい.

(1) $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(2) $f(x) = \begin{cases} (1+x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

(**類題９－２の解答**)

(1) $|f(x)| \leq x^2$ より $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. $f(0) = 0$ より $x = 0$ で連続
(2) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ なし. $f(0) = 0$ より $x = 0$ で不連続
(3) $\lim\limits_{x\to 0, x>0} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0, x<0} f(x) = 1$. よって $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$ なし. $f(0) = 0$ より $x = 0$ で不連続

例題９－３　$f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ を連続関数とし, さらに次の条件

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (\forall x,\ y \in \mathbf{R})$
(ii) $f(1) = 1$

を満たすならば, $f(x) = x$ であることを証明しなさい.
　ただし有理数の稠密にあること, すなわちすべての実数 x に対して有理数の数列 $\{a_n\}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} a_n = x$ とできることを用いてよい.

(**例題９－３の解答**)
　(i) を繰り返して用いると自然数 n に対して

$$f(nx) = f(x + x + \cdots + x) = nf(x)$$

$x = 1$ とおくと (ii) より $f(n) = nf(1) = n \cdot 1 = n$ である. さらに $x = \dfrac{m}{n}$ ($m,\ n$ は自然数) とおくと $f(m) = f(nx) = nf(x) = nf(\frac{m}{n})$ より

$$f(\frac{m}{n}) = \frac{1}{n}f(m) = \frac{1}{n} \cdot m = \frac{m}{n}$$

以上のことから x が正の有理数ならば $f(x) = x$ となる.
　$x = y = 0$ を (i) に代入すると $f(0) = 0$ となり, さらに $y = -x$ とおくと $f(0) = f(x) + f(-x)$ より $f(-x) = -f(x)$ となる. よってすべての有理数 x に対して $f(x) = x$ となる.

従って $f(x)$ が連続関数であることと有理数の稠密性によりすべての実数 $x \in \mathbf{R}$ に対して $f(x)=x$ が成立する.

類題９－３ $f:\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ を連続関数とし, さらに次の条件

(i) $f(x+y)=f(x)f(y) \quad (\forall x,\ y \in \mathbf{R})$
(ii) $f(1)=e$

を満たすならば, $f(x)=e^x$ であることを証明しなさい.

(**類題９－３の解答**)
$f(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \geq 0$ より $f(x)$ は非負関数. よって $g(x)=\log f(x)$ とおくことができ $g:\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続関数となる. このとき

(i) $g(x+y)=g(x)+g(y) \quad (\forall x,\ y \in \mathbf{R})$
(ii) $g(1)=1$

である. よって例題９－３から $g(x)=x$, すなわち $f(x)=e^x$ を得る.

例題９－４

(1) $(x-2)(x-3)+(x-3)(x-4)+(x-4)(x-2)=0$ は区間 $[2,3]$, $[3,4]$, $[4,5]$ にそれぞれ実数解をもつことを示しなさい.
(2) n を自然数としたとき x^n-100 は正の実数解をもつことを示しなさい.
(3) $\sin x - x\cos x = 0$ は区間 $(\pi, 3\pi/2)$ に正の実数解をもつことを示しなさい.

(**例題９－４の解答**)

(1) $f(x)=(x-2)(x-3)+(x-3)(x-4)+(x-5)(x-6)$ とすると

$$f(2)=2>0, \quad f(3)=-1<0, \quad f(4)=2>0$$

より中間値の定理から求める結果を得る.
(2) $f(x)=x^n-1$ とすると $f(0)=-1$, $f(1000)>0$. よって中間値の定理から求める結果を得る.
(3) $f(x)=\sin x - x\cos x$ とすると $f(\pi)=\pi>0$, $f(3\pi/2)=-1<0$. よって中間値の定理から求める結果を得る.

類題９－４

(1) $(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1=0$ は区間 $[0,1]$ の間に解をもつことを示しなさい.

(2) $x-2\sin x=10$ は正の解をもつことを示しなさい.

(3) $a_n>|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|,\ n\geq 1,$ ¥のとき

$$a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0=0$$

は区間 $(0,2\pi)$ に少なくとも $2n$ 個の解をもつことを示しなさい.

(**類題９－４の解答**)

(1) $f(x)=(x^2-1)\cos x+\sqrt{2}\sin x-1$ とすると

$$f(0)=-1<0,\quad f(\frac{\pi}{3})=(\frac{\pi^2}{9}-1)\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}-1>0$$

より中間値の定理から求める結果を得る.

(2) $f(x)=x-2\sin x-10$ とすると $f(0)=-10<0$, $f(100)>100-2-10>0$. よって中間値の定理から求める結果を得る.

(3) $f(x)=a_n\cos nx+a_{n-1}\cos(n-1)x+\cdots+a_1\cos x+a_0$ とすると

$$\begin{aligned}
f(0) &= a_n+a_{n-1}+\cdots+a_0\\
&> a_n-(|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)>0\\
f\left(\frac{\pi}{n}\right) &< -a_n+(|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)<0\\
f\left(\frac{2\pi}{n}\right) &> a_n-(|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)>0\\
\cdots & \quad \cdots\\
f\left(\frac{2n\pi}{n}\right) &> a_n-(|a_{n-1}|+|a_{n-2}|+\cdots+|a_1|+|a_0|)>0
\end{aligned}$$

よって中間値の定理から求める結果を得る.

発展（カントール関数） $\mathcal{C}$ を第１章の例題１－９のカントール集合とする. 以下, 単調増加関数 $\varphi_{\mathcal{C}}:[0,\ 1]\longrightarrow[0,\ 1]$ を構成する.

最初に $[0,\ 1]\setminus\mathcal{C}$ 上で $\varphi_{\mathcal{C}}$ を定義する．カントール集合 $\mathcal{C}$ の構成において，第１回目に除かれる区間：

$$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right) \quad \text{の上で} \quad \varphi_{\mathcal{C}}(x)=\frac{1}{2},$$

第２回目に除かれる区間：

$$\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right) \quad \text{の上で} \quad \varphi_{\mathcal{C}}(x)=\frac{1}{4},$$

$$\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right) \quad \text{の上で} \quad \varphi_{\mathcal{C}}(x)=\frac{3}{4},$$

第３回目に除かれる区間：

$$\left(\frac{1}{27},\ \frac{2}{27}\right) \quad \text{の上で} \quad \varphi_{\mathcal{C}}(x)=\frac{1}{8},$$

$$\left(\frac{7}{27},\ \frac{8}{27}\right) \quad \text{の上で} \quad \varphi_{\mathcal{C}}(x)=\frac{3}{8},$$

$$\left(\frac{19}{27},\ \frac{20}{27}\right) \quad \text{の上で} \quad \varphi_{\mathcal{C}}(x)=\frac{5}{8},$$

$$\left(\frac{25}{27},\ \frac{26}{27}\right) \quad \text{の上で} \quad \varphi_{\mathcal{C}}(x)=\frac{7}{8}$$

とする． この操作をくり返して $\varphi_{\mathcal{C}}(x)$ を定義する． このとき $\varphi_{\mathcal{C}}(x)$ は $[0,\ 1]\setminus\mathcal{C}$ 上で単調増加関数である．さらに定義される各区間で定数値をとっているので $[0,\ 1]\setminus\mathcal{C}$ 上で連続となる．

ところでカントール集合 $\mathcal{C}$ の長さは 0 だから，この関数 $\varphi_{\mathcal{C}}(x)$ は $[0,\ 1]$ 上で単調増加な関数に拡張できる．

この $y=\varphi_{\mathcal{C}}(x)$,　$(\ 0\le x\le 1\ )$ はカントール関数と呼ばれている．

例題９－５　カントール関数 $y=\varphi_{\mathcal{C}}(x)$ は $0\le x\le 1$ で連続であることを証明しなさい．

(**例題９－５の解答**)

カントール集合 $\mathcal{C}$ の要素は３進法展開表示すると

$$x=0,\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots\in\mathcal{C}(\subset[0,\ 1]) \qquad (\alpha_n=0 \text{ または } \alpha_n=2)$$

とかける．カントール関数 $y=\varphi_{\mathcal{C}}(x)$ のつくり方により，上記の $x\in\mathcal{C}(\subset[0,\ 1])$ に対して $y=\varphi_{\mathcal{C}}(x)$ の値は２進法展開表示すると

$$y=\varphi_{\mathcal{C}}(x)=0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots\in[0,\ 1]$$

とかける．(ここで $\alpha_n = 0$ ならば $\beta_n = 0$ であり, $\alpha_n = 1$ ならば $\beta_n = 1$ である) よって $y = \varphi_{\mathcal{C}}(x)$ は $\mathcal{C}$ 上で連続である．$[0,\ 1] \setminus \mathcal{C}$ 上で定数値であったから, すべての箇所で連続となる.

類題９－５　カントール関数 $y = \varphi_{\mathcal{C}}(x)$ ($0 \leq x \leq 1$) の道のりの長さは 2 であることを示せ.

(**類題９－５の解答**)

n 回目の操作において, 定数値でない箇所をななめにつなげてできた関数を $y = \varphi_n(x)$ $(x \in [0,1])$ とする．この $\varphi_n(x)$ の道のりは

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}}$$

である．よって $\varphi_{\mathcal{C}}(x)$ の道のりは

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n + \sqrt{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n}} \right\} = 2$$

となる.

例題９－６　次の 2 変数関数の極限値を求めなさい.

極限値がない場合は, 「なし」と答えなさい．ただし $f(x,y)$ が正で, その値が限りなく大きくなるときは ∞, $f(x,y)$ が負で, その絶対値の値が限りなく大きくなるときは $-\infty$, と答えなさい．また $x \to \infty$ は x の値を限りなく正に大きくすることであり, $x \to -\infty$ は x の値を限りなく負に大きくすることである.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2, y\to 1} \frac{xy+3}{x^2-y^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1, y\to 1} \frac{1}{(x-1)^2(y-1)^2}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{(y+2)x^3+3yx}{y(x^2-9x)}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0, y\to 1} \frac{yx}{\sqrt{x+1}-y}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty, y\to\infty} \frac{y}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to\infty, y\to 0} -x^2+3y$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to\infty, y\to 0} \sin 2xy$

(9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ $(b \neq 0)$

(10) $\lim_{x\to 0, y\to 0} (1+x)^{y/x}$

(11) $\lim_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{\log(1+xy+x^2)}{2xy}$

(**例題９－６の解答**)

(1) $\lim_{x\to 2, y\to 1} \dfrac{xy+3}{x^2-y^2} = \dfrac{5}{3}$

(2) $\lim_{x\to 1, y\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2(y-1)^2} = \infty$

(3) $\lim_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{(y+2)x^3+3yx}{y(x^2-9x)} = \lim_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{(y+2)x^2+3y}{y(x-9)}$

ここで $y > 0, x = y^{1/4}$ として極限をとると $\lim_{y>0, y\to 0} \dfrac{(y+2)y^{1/2}+3y}{y(y^{1/4}-9)}$

$= \lim_{y>0, y\to 0} \dfrac{(y+2)+3y^{1/2}}{y^{1/2}(y^{1/4}-9)} = \lim_{y>0, y\to 0} \dfrac{2}{-9y^{1/2}}$ であるから極限はない.

(4) $\lim_{x\to 0, y\to 1} \dfrac{yx}{\sqrt{x+1}-y} = \lim_{x\to 0, y\to 1} \dfrac{yx(\sqrt{x+1}+y)}{x+1-y^2} =$

$\lim_{x\to 0, y\to 1} \dfrac{2}{1+(1-y^2)/x} =$ なし. $x = k(1-y^2)$ とすると値が定まらない.

(5) $\lim_{x\to\infty, y\to\infty} \dfrac{y}{x} =$ なし. $y = kx$ として極限を考えると値が定まらない.

(6) $\lim_{x\to\infty, y\to 0} -x^2+3y = -\infty$

(7) $\lim_{x\to\infty, y\to 0} \sin 2xy =$ なし. $y = k/x$ として極限を考えると値が定まらない.

(8) $\lim_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{\sin axy}{\sin bxy} = \dfrac{a}{b}$

(9) $\lim_{x\to 0, y\to 0} (1+x)^{y/x} = \lim_{x\to 0, y\to 0} \left((1+x)^{1/x}\right)^y = 1$

(10) $\lim_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{\log(1+xy+x^2)}{2xy} = \lim_{x\to 0, y\to 0} \dfrac{\log(1+xy+x^2)}{xy+x^2}\dfrac{xy+x^2}{2xy} =$ なし.
$y = kx$ として極限を考えると値が定まらない.

類題９－６ 次の２変数関数の極限値を求めなさい.

(1) $\lim_{x\to 3, y\to 1} \dfrac{y(x+3)}{x^2-9y^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1, y\to 0} \frac{1}{xy-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{xy}{|xy|}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty, y\to 0} \frac{y2x^3+x}{x^3-9yx^2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty, y\to 0} \frac{\sin 2xy}{xy}$

(**類題９－６の解答**)

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 3, y\to 1} \frac{y(x-3)}{x^2-9y^2} =$ なし. $x=3$ として極限をとると 0. $y=1$ として極限をとると $\dfrac{1}{6}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1, y\to 0} \frac{1}{xy-1} = -1$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0, y\to 0} \frac{xy}{|xy|} =$ なし.

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty, y\to 0} \frac{y^2x^3+x}{x^3-9yx^2} = \lim_{x\to -\infty, y\to 0} \frac{y^2+x^{-2}}{1-9yx^{-1}} = 0$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty, y\to 0} \frac{\sin 2xy}{xy} =$ なし. $y = k/x$ として極限を考えると値が定まらない.

$\boxed{\textbf{例題９－７}}$ 次の 2 変数関数は $(0,0)$ で連続か判定しなさい.

(1) $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ((x,y)\neq(0,0)) \\ 0 & ((x,y)=(0,0)) \end{cases}$

(**例題９－７の解答**) 以下の議論においてしばしば

$$|x|,\ |y| \ \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

を用いる.

(1) $\sqrt{|xy|} \leq \sqrt{x^2+y^2}$ より $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. $f(0,0) = 0$ より $(0,0)$ で連続である.

(2) $y = kx$ として $(x,y) \to (0,0)$ とすれば

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),y=kx} f(x,y) = \frac{k^2}{1+k^2}$$

極限が定まらないので $(0,0)$ で不連続である.

(3)

$$|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

よって $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. $f(0,0) = 0$ より $(0,0)$ で連続である.

類題９－７

(1) $f(x,y) = |x+y|$

(2) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

(3) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0)) \\ 0 & ((x,y) = (0,0)) \end{cases}$

(**類題９－７の解答**)

(1) $|x+y| \leq |x|+|y| \leq 2\sqrt{x^2+y^2}$ より $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. $f(0,0) = 0$ より $(0,0)$ で連続である.

(2) $|xy| \leq x^2+y^2$ より, $|f(x,y)| \leq |y|$. よって $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ である. $f(0,0) = 0$ より $(0,0)$ で連続である.

(3) $y = kx$ として $(x,y) \to (0,0)$ とすれば

$$\lim_{(x,y)\to(0,0),y=kx} f(x,y) = \frac{1-k^2}{1+k^2}$$

極限が定まらないので $(0,0)$ で不連続である.

発展（位相空間） 位相空間を定義し, 位相空間 X, Y 間の連続写像 $f : X \longrightarrow Y$ における最大値の定理と中間値の定理を述べる.

位相空間の定義 X を集合とし $\mathcal{O}_X = \{O_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ を X の部分集合 O_λ からなるある集合族とする. $(X,\ \mathcal{O}_X)$ が次の条件 (1)~(3)：

(1) $\emptyset \in \mathcal{O}_X,\ X \in \mathcal{O}_X$

(2) $\Lambda_0 \subset \Lambda$, Λ_0 有限集合ならば $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda_0} O_\lambda \in \mathcal{O}_X$

(3) $\quad \Lambda_0 \subset \Lambda$ ならば $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} O_\lambda \in \mathcal{O}_X$

を満たすとき位相空間と呼ばれる．このとき族 $\mathcal{O}_X$ を X の位相といい, 要素 $O \in \mathcal{O}_X$ を開集合と呼ぶ.

連続写像の定義 $(X,\ \mathcal{O}_X)$, $(Y,\ \mathcal{O}_Y)$ をそれぞれ位相空間とする．写像 $f : X \longrightarrow Y$ が $a \in X$ で連続写像であるとは, $f(a) \in V$ なる任意の Y の開集合 V に対して, $a \in U$ なるある X の開集合 U が存在して

$$f(U) \subset V$$

とできることである．X の各点で連続のとき, f は X で連続であるという.

　このことは

$$O_Y \in \mathcal{O}_Y \text{ ならば } f^{-1}(O_Y) \in \mathcal{O}_X$$

となることと同値である.

コンパクト集合の定義 $(X,\ \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする．X の部分集合 K がコンパクト集合であるとは

$$K \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \quad (O_\lambda \in \mathcal{O}_X)$$

ならば, ある $\lambda_1, \cdots,\ \lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}$$

とできることをいう．（有限開被覆の存在）

　X がユークリッド空間のとき, 次の定理が知られている.

ハイネ・ボレルの定理 $\mathbf{R}$ 内の有界閉集合はコンパクト集合であり, またその逆も成り立つ.

連結集合の定義 $(X,\ \mathcal{O}_X)$ を位相空間とする．X が連結集合であるとは空でない 2 つの開集合 $O_1,\ O_2 \in \mathcal{O}_X$ が存在して

$$X = O_1 \bigcup O_2,\ O_1 \bigcap O_2 = \emptyset$$

と出来ないことという.

$\mathbf{R}$ 内の開区間 $(a,\ b)$ や閉区間 $[a,\ b]$ などはすべて連結集合であり, また A を $\mathbf{R}$ 内の連結集合とし, $a,\ b \in A$ $(a < b)$ ならば $[a,\ b] \subset A$ となる.

以上の準備のもとに連続写像に関する２つの定理を例題として挙げる.

例題９－８ $(X,\ \mathcal{O}_X)$ を連結な位相空間, $(Y,\ \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. $f : X \longrightarrow Y$ が連続写像であるならば $f(X)$ は Y の中で連結な部分集合となることを証明せよ.

(**例題９－８の解答**)

$f(X)$ が連結集合でないと仮定すると, 空でない２つの開集合 $O_1,\ O_2 \in \mathcal{O}_Y$ が存在して $X = O_1 \bigcup O_2$ かつ $O_1 \bigcap O_2 = \emptyset$ とできる. このとき $f^{-1}(O_1) \neq \emptyset$, $f^{-1}(O_2) \neq \emptyset$ であり

$$X = f^{-1}(O_1) \bigcup f^{-1}(O_2) \quad \text{かつ} \quad f^{-1}(O_1) \bigcap f^{-1}(O_2) = \emptyset$$

となる. f は連続写像であるから $f^{-1}(O_1),\ f^{-1}(O_2) \in \mathcal{O}_X$ である. これは X が連結集合であることに矛盾する. ゆえに $f(X)$ は連結集合である.

類題９－８ (中間値の定理)　$y = f(x)$ を $x \in [a,\ b]$ で定義された実数値連続関数とする。$f(a) < f(b)$ ならば、その間の値 $f(a) < \lambda < f(b)$ に対して、ある $c \in [a,\ b]$ が存在して、$f(c) = \lambda$ とできることを示せ。

(**類題９－８の解答**)

$f([a,\ b])$ は連結集合だから $[f(a),\ f(b)] \subset f([a,\ b])$ となり、ゆえに $f(a) < \lambda < f(b)$ なる任意の λ に対して、$f(c) = \lambda$ となる $c \in [a,\ b]$ が存在する。

例題９－９ $(X,\ \mathcal{O}_X)$ をコンパクトな位相空間, $(Y,\ \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする. $f : X \longrightarrow Y$ が連続写像であるならば $f(X)$ は Y の中でコンパクトな部分集合となることを証明せよ.

（例題９－９の解答）

$f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ $(O_\lambda \in \mathcal{O}_Y)$ と仮定する. f は連続写像だから $f^{-1}(O_\lambda) \in \mathcal{O}_X$ $(\lambda \in \Lambda)$ であり

$$X \subset f^{-1}(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda)$$

となる．X はコンパクト集合だから，ある $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \Lambda$ が存在して

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_{\lambda_i})$$

とでき

$$f(X) \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{\lambda_i}$$

となる．よって $f(X)$ はコンパクト集合である．

$\boxed{\textbf{類題９－９}}$ （最大最小の定理）　$y = f(x)$ を $[a,\ b]$ で定義された実数値連続関数とする．$x \in [a, b]$ に対して，ある $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ が存在して、

$$f(x_1) = \max_{x \in [a,\ b]} f(x), \qquad f(x_2) = \min_{x \in [a,\ b]} f(x)$$

とできることを示せ．

（類題９－９の解答）

$f : [a,\ b] \longrightarrow \mathbf{R}$ は連続写像であり，$[a,\ b]$ は連結なコンパクト集合だから $f([a,\ b])$ も $\mathbf{R}$ 内の連結なコンパクト集合となる．よってハイネ・ボレルの定理より連結な有界閉集合となる．すなわち

$$f([a,\ b]) = [c,\ d] \quad (c < d)$$

と書ける．よって最大値 d と最小値 c が存在する．したがって $x_1,\ x_2 \in [a,\ b]$ が存在し

$$f(x_1) = \max_{x \in [a,\ b]} f(x), \qquad f(x_2) = \min_{x \in [a,\ b]} f(x)$$

とできる．

$\boxed{\textbf{発展（関数列の収束）}}$ 　関数列 $\{f_n(x)\}$ の収束について考える．

各点収束　$\{f_n(x)\}$ を区間 I で定義された関数列とする．I の任意の点 x を固定して，数列 $\{f_n(x)\}$ が収束するとき各点収束するという．この極限値を $f(x)$ と書けば，極限関数 $f(x)$ が定義される．すなわち各点収束とは「任意の $x \in I$, 任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある番号 n_0 が存在して

$$n > n_0 \quad \text{ならば} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

となる」ことである．

一様収束　各点収束の定義の n_0 は x, ϵ に従属して決まる．この n_0 が ϵ のみによって決まるとき一様収束という．すなわち「任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある番号 n_0 が存在して

$$n > n_0 \quad \text{ならば, 任意の } x \in I \text{ で} \quad |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

となる」ことである．

次の例題で違いを理解すること．

例題９－１０　関数列 $\{x^n\}$ は $[0,1]$ で各点収束するが, 一様収束はしないことを確かめよ．また $[0,1/2]$ では一様収束することを確かめよ．

(**例題９－１０の解答**)

各点収束は明らかで, その極限関数は

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 1) \\ 0 & (0 \leq x < 1) \end{cases}$$

である．一様収束しているとすると, 任意の $(0,1)$ の点 x で

$$n > n_0 \quad \text{ならば} \quad |x^n - 0| < \epsilon$$

でなくてはならない．すなわち $n > \dfrac{\log \epsilon}{\log x}$ である．よって n_0 を x に従属せずに選ぶことはできない．$x \in [0, 1/2]$ であれば

$$n > \frac{\log \epsilon}{\log 1/2} \geq \frac{\log \epsilon}{\log x}$$

であるから, $\dfrac{\log \epsilon}{\log 1/2}$ より大きい最小の自然数を n_0 にとれば一様収束であることが分かる．

類題９－１０　関数列 $\dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ は $\mathbf{R}$ で各点収束するが, 一様収束はしないことを確かめよ．また $[-1,1]$ では一様収束することを確かめよ．

(**類題９－１０の解答**)

各点収束は明らかで, その極限関数は

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x = 0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$$

である．一様収束しているとすると, 0 以外の点 x において

$$n > n_0 \quad \text{ならば} \quad |\frac{1}{(1+x^2)^n} - 0| < \epsilon$$

でなくてはならない．すなわち $n > \dfrac{\log \epsilon}{\log(1+x^2)}$ である．よって n_0 を x に従属せずに選ぶことはできない．$x \in [-1, 1]$ であれば

$$n > \frac{\log \epsilon}{\log(1+1)} \geq \frac{\log \epsilon}{\log(1+x^2)}$$

であるから, $\dfrac{\log \epsilon}{\log 2}$ より大きい最小の自然数を n_0 にとれば一様収束であることが分かる．

定理　閉区間で定義された連続関数列が一様収束するれば, 極限関数は連続関数列である．