

ロルの定理・平均値の定理

No 8	番号	名前
------	----	----

(1)  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能なとき

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

を  $f'(a)$  を用いて表しなさい。この極限が存在しても、 $f'(a)$  が存在しない例を探しなさい。

(2)  $f(x)$  が  $x = a$  で微分可能なとき

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a}$$

を  $f(a)$  と  $f'(a)$  を用いて表しなさい。

(3)  $f, g$  を微分可能な関数とし、 $g(x) \neq 0$  とする。 $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$  であれば、ある定数  $c$  が存在し、 $f(x) = cg(x)$  となることを示せ。

(4)  $f(x)$  は  $[a, b]$  で連続、 $(a, b)$  で微分可能とする。 $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f(x) \neq 0$ ,  $a < x < b$ , であれば、任意の実数  $\lambda$  に対して、ある  $a < \xi < b$  が存在し、 $\lambda = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$  となることを示せ。

(5) 平均値の定理を  $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$ ,  $0 < \theta < 1$ , としたとき、次の場合の  $\theta$  をもとめなさい。

$$f(x) = x^3, \quad a = 2, \quad h = 1$$

(6)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

としたとき、 $f^{(n)}(0)$  を求めよ。