

ロルの定理・平均値の定理

No 8	番号	名前
------	----	----

(1) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能なとき

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$$

を $f'(a)$ を用いて表しなさい。この極限が存在しても、 $f'(a)$ が存在しない例を探しなさい。

(2) $f(x)$ が $x = a$ で微分可能なとき

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 f(a) - a^2 f(x)}{x - a}$$

を $f(a)$ と $f'(a)$ を用いて表しなさい。

(3) f, g を微分可能な関数とし、 $g(x) \neq 0$ とする。 $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$ であれば、ある定数 c が存在し、 $f(x) = cg(x)$ となることを示せ。

(4) $f(x)$ は $[a, b]$ で連続、 (a, b) で微分可能とする。 $f(a) = f(b) = 0$, $f(x) \neq 0$, $a < x < b$, であれば、任意の実数 λ に対して、ある $a < \xi < b$ が存在し、 $\lambda = \frac{f'(\xi)}{f(\xi)}$ となることを示せ。

(5) 平均値の定理を $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$, $0 < \theta < 1$, としたとき、次の場合の θ をもとめなさい。

$$f(x) = x^3, \quad a = 2, \quad h = 1$$

(6)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

としたとき、 $f^{(n)}(0)$ を求めよ。