フーリエ級数の例題と問題

例題１（フーリエ級数の計算問題）　鋸（のこぎり）関数

$$h(x) = \begin{cases} x & (\ -\pi \le x < \pi \text{ のとき }) \\ 0 & (\text{ それ以外のとき }) \end{cases}$$

を 区間 $-\pi \le x < \pi$ の周期関数としてフーリエ展開せよ。すなわち、各フーリエ係数

$$c_k(h) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)e^{-ikt}dt \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots)$$

を計算し、次にフーリエ級数

$$s(h,\ x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(h)e^{ikx}$$

を求めればよい。

（例題１の解答）　まず、関数 $h(x)$ の各フーリエ係数は

$$c_k(h) = \begin{cases} 0 & (\ k = 0\ ) \\ (-1)^{k+1}\dfrac{1}{ik} & (\ k = \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots\ ) \end{cases}$$

よって、関数 $h(x)$ のフーリエ級数は

$$s(h,\ x) = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k} = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\right)$$

問題１（フーリエ級数の計算問題）　ヘビサイド関数

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (\ -\pi \le x < 0 \text{ のとき }) \\ 1 & (\ 0 \le x < \pi \text{ のとき }) \end{cases}$$

を 区間 $-\pi \le x < \pi$ の周期関数としてフーリエ展開せよ。すなわち、各フーリエ係数

$$c_k(H) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} H(t)e^{-ikt}dt \quad (k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \cdots)$$

を計算し、次にフーリエ級数

$$s(H,\ x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(H)e^{ikx}$$

を求めればよい。

（問題１の解答） まず、関数 $H(x)$ の各フーリエ係数は

$$c_k(H) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & (\ k=0\ ) \\ 0 & (\ k=\pm 2,\ \ \pm 4,\ \ \pm 6,\ \ \cdots\ ) \\ \dfrac{1}{i\pi k} & (\ k=\pm 1,\ \ \pm 3,\ \ \pm 5,\ \ \cdots\ ) \end{cases}$$

よって、関数 $H(x)$ のフーリエ級数は

$$s(H,\ x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \cdots\right)$$

例題２（フーリエ級数のギブス現象） 鋸関数 $h(x)$ について、そのフーリエ級数の部分和は

$$s_n(h,\ x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(h)e^{ikx} = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}$$

となる。このとき、$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx > \frac{\pi}{2}$ なることを既知として

$$\lim_{n\to\infty} s_n(h,\ \ -\pi + \frac{\pi}{n}) < h(-\pi)$$

となることを示せ。すなわち、$n \to \infty$ のとき $-\pi \leq x \leq \pi$ において $s_n(h,\ x)$ は $h(x)$ に一様収束しない。

（例題２の解答） $s_n(h,\ x)$ に $x = -\pi + \dfrac{\pi}{n}$ を代入し、$n \to \infty$ の極限において定積分の定義により

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} s_n(h,\ \ -\pi + \frac{\pi}{n}) &= 2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin\left(-k\pi + \frac{k\pi}{n}\right) \\ &= -2\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{n} = -2\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin\frac{\pi}{n}k}{\frac{\pi}{n}k} \\ &= -2\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{x}dx < -\pi = h(-\pi) \end{aligned}$$

問題２（フーリエ級数のギブス現象） ヘビサイド関数 $H(x)$ について、そのフーリエ級数の部分和は

$$s_n(H,\ x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(H)e^{ikx} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

となる。このとき、$\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > \frac{\pi}{2}$ なることを既知として

$$\lim_{n\to\infty} s_n(H,\ \frac{\pi}{2n}) > H(0)$$

となることを示せ。すなわち、$n \to \infty$ のとき $-\pi \leq x \leq \pi$ において $s_n(H,\ x)$ は $H(x)$ に一様収束しない。

（問題２の解答） $s_n(H,\ x)$ に $x = \dfrac{\pi}{2n}$ を代入し、$n \to \infty$ の極限において定積分の定義により

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} s_n(H,\ \frac{\pi}{2n}) &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}}{2k-1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \lim_{n\to\infty} 2\frac{\pi}{2n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin \frac{(2k-1)\pi}{2n}}{\frac{(2k-1)\pi}{2n}} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 1 = H(0)
\end{aligned}$$

例題３（フェイェールの定理） 関数 $f(x)$ は $-\pi \leq x \leq \pi$ の周期関数とする。このとき、$f(x)$ のチェザロ和

$$\sigma_n(f,\ x) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} s_m(h,\ x)$$

およびフェイェール核

$$K_n(t) = \frac{1}{n+1} \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}$$

について以下の事項を示せ。

(1) $\sigma_n(f,\ x) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) dt$

(2) $K_n(t) = \dfrac{1}{n+1} \dfrac{1-\cos(n+1)t}{1-\cos t}$ （ただし $K_n(0) = n+1$ とする）

(3) $K_n(t) \geq 0$ および $\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t) dt = 1$

(4) $f(x)$ が連続ならば一様収束の意味で $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,\ x) = f(x)$

（例題３の解答）

(1)

$$\begin{aligned}\sigma_n(f,\ x) &= \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)\left(\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt}\right)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)dt\end{aligned}$$

(2) $K_n(0) = n+1$ は明らか。$t \neq 0$ のときは

$$\begin{aligned}K_n(t) &= \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\sum_{k=-m}^{m} e^{ikt} = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} e^{-imt}\frac{1-e^{i(2m+1)t}}{1-e^{it}} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\frac{e^{i\left(m+\frac{1}{2}\right)t}-e^{-i\left(m+\frac{1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}} = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\frac{\sin\left(m+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}\frac{\cos mt-\cos(m+1)t}{1-\cos t} = \frac{1}{n+1}\frac{1-\cos(n+1)t}{1-\cos t}\end{aligned}$$

(3) $K_N(t) \geq 0$ なることは (2) より明らか。さらに $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt = 1$ なることは

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = \begin{cases} 2\pi & (\ k=0\ ) \\ 0 & (\ k\neq 0\ )\end{cases}$$

なることより明らか。

(4) $f(x)$ が連続ならば $-\pi \leq x \leq \pi$ において一様連続でもあるから、任意の $\epsilon > 0$ に対しこれのみに依存する定数 $\delta_\epsilon > 0$ が存在し、$|t| < \delta_\epsilon$ ならば、すべての $-\pi \leq x \leq \pi$ に対して

$$|\ f(x-t) - f(x)\ | < \frac{\epsilon}{2}$$

なる不等式が成り立つ。ここで $M = \max\limits_{|x|\leq\pi}|\ f(x)\ |$ として、すでに示された (2) および (3) より ϵ のみに依存する自然数 n_ϵ がとれて、すべての $n \geq n_\epsilon$ ならば

$$\begin{aligned}\int_{\delta_\epsilon\leq|t|\leq\pi} K_n(t)dt &\leq \frac{1}{n+1}\int_{\delta_\epsilon\leq|t|\leq\pi}\frac{2}{1-\cos t}dt \leq \frac{1}{n+1}\frac{2}{1-\cos\delta_\epsilon}\int_{\delta_\epsilon\leq|t|\leq\pi} dt \\ &< \frac{\epsilon}{4M}\int_{-\pi}^{\pi} dt = \frac{\epsilon\pi}{2M}\end{aligned}$$

となるようにもできる。したがって、$n \geq n_\epsilon$ ならば、すべての $-\pi \leq x \leq \pi$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\ \sigma_n(f,\ x) - f(x)\ | &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\ f(x-t) - f(x)\ | K_n(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|<\delta_\epsilon} + \int_{\delta_\epsilon \leq |t| \leq \pi}\right) |\ f(x-t) - f(x)\ | K_n(t)dt \\
&< \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt + \frac{M}{\pi}\int_{\delta_\epsilon \leq |t| \leq \pi} K_n(t)dt \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

となる。したがって一様収束の意味で $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,\ x) = f(x)$ が成立する。

問題３（ポアソンの定理） 関数 $f(x)$ は $-\pi \leq x \leq \pi$ の周期関数とする。このとき、$0 \leq r < 1$ なるパラメーターに対して、$f(x)$ のアーベルーポアソン和

$$f(r,\ x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} c_k(f) e^{ikx}$$

およびポアソン核

$$P_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}$$

について以下の事項を示せ。

(1) $f(r,\ x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)dt$

(2) $P_r(t) = \dfrac{1-r^2}{1-2r\cos t + r^2}$

(3) $P_r(t) \geq 0$ および $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt = 1$

(4) $f(x)$ が連続ならば一様収束の意味で $\lim_{r\to 1} f(r,\ x) = f(x)$

（問題３の解答）

(1)

$$f(r,\ x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}dt\right)e^{ikx}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-t)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ikt}\right)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)dt
\end{aligned}
$$

(2)

$$
\begin{aligned}
P_r(t) &= 1+\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{ikt}+\sum_{k=1}^{\infty} r^k e^{-ikt} = 1+\frac{re^{it}}{1-e^{it}}+\frac{re^{-it}}{1-e^{-it}} \\
&= \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2}
\end{aligned}
$$

(3)

$$
P_r(t) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos t+r^2} = \frac{1-r^2}{(1-r)^2+4r\sin^2\frac{t}{2}} \geq 0
$$

また $\displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)(t)dt = 1$ なることは

$$
\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}dt = \begin{cases} 2\pi & (\ k=0\ ) \\ 0 & (\ k\neq 0\ ) \end{cases}
$$

なることより明らか。

(4) $f(x)$ が連続ならば $-\pi \leq x \leq \pi$ において一様連続でもあるから、任意の $\epsilon > 0$ に対しこれのみに依存する定数 $\delta_\epsilon > 0$ が存在し、$|t| < \delta_\epsilon$ ならば、すべての $-\pi \leq x \leq \pi$ に対して

$$
|\ f(x-t)-f(x)\ | < \frac{\epsilon}{2}
$$

なる不等式が成り立つ。ここで $M = \max_{|x|\leq\pi}|\ f(x)\ |$ として、すでに示された (2) および (3) より ϵ のみに依存する数 r_ϵ がとれて、すべての $1 > r \geq r_\epsilon$ ならば

$$
\begin{aligned}
\int_{\delta_\epsilon\leq|t|\leq\pi} P_r(t)dt &\leq \frac{1-r^2}{4r}\int_{\delta_\epsilon\leq|t|\leq\pi}\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}dt \leq \frac{1-r^2}{4r}\int_{\delta_\epsilon\leq|t|\leq\pi}\frac{\pi^2}{t^2}dt \\
&\leq \frac{(1-r^2)\pi^2}{2r}\left|\ \frac{1}{\delta_\epsilon}-\frac{1}{\pi}\ \right| < \frac{\epsilon\pi}{2M}
\end{aligned}
$$

となるようにもできる。したがって、$1 > r \geq r_\epsilon$ ならば、すべての $-\pi \leq x \leq \pi$ に対して

$$
\begin{aligned}
|\ f(r,\ x) - f(x)\ | &\leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\ f(x-t) - f(x)\ | P_r(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|t|<\delta_\epsilon} + \int_{\delta_\epsilon \leq |t| \leq \pi}\right) |\ f(x-t) - f(x)\ | P_r(t)dt \\
&< \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(t)dt + \frac{M}{\pi}\int_{\delta_\epsilon \leq |t| \leq \pi} K_n(t)dt < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon
\end{aligned}
$$

となる。したがって一様収束の意味で $\lim_{r\to 1} f(r,\ x) = f(x)$ が成立する。