1. 直交多項式

実数値関数列 (または多項式列)$\{f_n(x)\}$ に対し

$$(f_m, f_n) = \int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ k & (m = n) \end{cases}$$

となるとき $\{f_n(x)\}$ を (a, b) における直交関数列 (直交多項式) という.
とくに $k = 1$ のとき正規直交列という.

例 Legendre の多項式

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

は $(-1, 1)$ における直交多項式である.

証明

$$G_k(x) = (x^2 - 1)^k$$

とおく. ここで $G_k^{(i)}(\pm 1) = 0 \ (0 \leq i < k)$ に注意する.
$m > n$ のとき, 部分積分を用いると

$$\begin{aligned}
& (P_m, P_n) \\
= \ & \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 G_m^{(m)}(x) G_n^{(n)}(x) dx \\
= \ & \frac{1}{2^{m+n} m! n!} [G_m^{(m-1)}(x) G_n^{(n)}(x)]_{-1}^1 - \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 G_m^{(m-1)}(x) G_n^{(n+1)}(x) dx \\
= \ & -\frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 G_m^{(m-1)}(x) G_n^{(n+1)}(x) dx \\
= \ & -\frac{1}{2^{m+n} m! n!} [G_m^{(m-2)}(x) G_n^{(n+1)}(x)]_{-1}^1 + \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 G_m^{(m-2)}(x) G_n^{(n+2)}(x) dx \\
= \ & \frac{1}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 G_m^{(m-2)}(x) G_n^{(n+2)}(x) dx \\
= \ & \cdots \\
= \ & \frac{(-1)^n}{2^{m+n} m! n!} \int_{-1}^1 G_m^{(m-n)}(x) G_n^{(2n)}(x) dx
\end{aligned}$$

となる. ここで二項定理より

$$\begin{aligned}
& G_n^{(2n)}(x) \\
= \ & \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n \\
= \ & \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^{2n} + {}_nC_1 x^{2n-2}(-1) + {}_nC_2 x^{2n-4}(-1)^2 + \cdots + (-1)^n) \\
= \ & (2n)!
\end{aligned}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
& (P_m, P_n) \\
= \; & \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{m+n}m!n!}\int_{-1}^{1} G_m^{(m-n)}(x)dx \\
= \; & \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{m+n}m!n!}[G_m^{(m-n-1)}(x)]_{-1}^{1}dx \\
= \; & 0
\end{aligned}
$$

となる.

$m=n$ のときは

$$
\begin{aligned}
& (P_n, P_n) \\
= \; & \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} G(x)G_n^{(2n)}(x)dx \\
= \; & \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n G_n^{(2n)}(x)dx \\
= \; & \frac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\int_{-1}^{1} (x^2-1)^n dx
\end{aligned}
$$

前と同様に部分積分を使って

$$
\begin{aligned}
& \int_{-1}^{1}(x^2-1)^n dx \\
= \; & [(x^2-1)^n x]_{-1}^{1} - 2n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}x^2 dx \\
= \; & -2n\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-1}x^2 dx \\
= \; & -2n[(x^2-1)^{n-1}\frac{x^3}{3}]_{-1}^{1} + \frac{2^2n(n-1)}{3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-2}x^4 dx \\
= \; & +\frac{2^2n(n-1)}{3}\int_{-1}^{1}(x^2-1)^{n-2}x^4 dx \\
= \; & \cdots \\
= \; & \frac{(-1)^n 2^n n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)}\int_{-1}^{1} x^{2n} dx \\
= \; & \frac{(-1)^n 2^{n+1} n!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)(2n+1)} \\
= \; & \frac{(-1)^n (n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)!(2n+1)}
\end{aligned}
$$

であるから

$$
(P_n, P_n) = \frac{2}{2n+1}
$$

となる.

Q.E.D

その他の直交多項式

名称	記号	式	区間	ノルム
$Chebyshev$	$T_n x$	$\frac{(-1)^n(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{(2n-1)!!}\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}$	$(-1,1)$	$\pi(n=0), \frac{\pi}{2}(n \geq 1)$
$Hermite$	$H_n x$	$2^{-\frac{n}{2}}(-1)^n e^{x^2}\frac{d(e^{-x^2})}{dx^n}$	$(-\infty,\infty)$	$\sqrt{\pi}n!$
$Laguerre$	$L_n^\alpha(x)$	$\frac{e^x x^{-\alpha}}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^{n+\alpha})$	$(0,\infty)$	$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$

2. 直交系と微分方程式

2.1 $Legendre$ の微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \ (n \text{ は負でない整数})$$

の解は $Legendre$ の多項式 $P_n(x)$ で与えられる.

2.2 $Chebyshev$ の微分方程式

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n^2y = 0 \ (n \text{ は負でない整数})$$

の解は $Chebyshev$ の多項式 $T_n(x)$ で与えられる.

3. Sturm-Liouville 系

微分方程式

$$\frac{d}{dx}(p(x)y') + r(x)y = \lambda y,\ a \leq x \leq b \cdots (2.1)$$

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,\ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$$

$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0,\ \beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$$

を考える. このような微分方程式の解を見つけることを, Sturm-Liouville 系の境界値問題という. ここで作用素 $L[y]$ を

$$L[y] = (p(x)y')' + r(x)y$$

とすれば, (2.1) は

$$L[y] = \lambda y,\ a \leq x \leq b \cdots (2.2)$$

と書ける.

(2.2) が $y \equiv 0$ 以外の解を持つとき, λ を L の固有値, そのときの解 y を固有値 λ に対する固有関数という.

例

$$L[y] = y'' = \lambda y,\ 0 \leq x \leq 1 \cdots (2.3)$$
$$y(0) = y(1) = 0$$

このとき

(a) $\lambda > 0$ のとき
(2.3) の一般解は
$$y = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}}x$$
となる. 境界条件より $C_1 = C_2 = 0$ となるので $\lambda > 0$ は固有値でない.

(b) $\lambda = 0$ のとき
(2.3) の一般解は
$$y = C_1 + C_2 x$$
となる. 境界条件より $C_1 = C_2 = 0$ となるので $\lambda = 0$ は固有値でない.

(c) $\lambda < 0$ のとき
(2.3) の一般解は
$$y = C_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$$
となる. 境界条件より $C_1 = 0,\ C_2 \sin\sqrt{-\lambda} = 0$ となるので
$$\sqrt{-\lambda} = n\pi,\ n = 1, 2, \cdots$$
のときに限り固有関数
$$y = C \sin n\pi x$$
が存在する.

一般に Sturm-Liouville 型の境界値問題に対して以下の定理がなりたつ.

定理 2.1. L のある固有値に対して可算無限個の固有値を持つ.

定理 2.2. L の異なる固有値に対する固有関数は互いに直交する.