

2002年度「数理と現象」試験問題

解答はすべて解答用紙の解答欄に答えなさい。

1. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < \pi \\ -1 & -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ とする。このとき f のフーリエ級数は

$$F(x) = \boxed{\text{ア}} + \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\text{イ}} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{\text{ウ}} \sin(nx)$$

である。また

$$F(-\pi) = \boxed{\text{エ}}, \quad F(0) = \boxed{\text{オ}}, \quad F(\pi) = \boxed{\text{カ}}$$

となる。パーセバルの等式から

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \times \boxed{\text{キ}}$$

となり、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \boxed{\text{ク}}$ 分かる。

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & x < 0, x > 2 \end{cases}$ とする。このとき f のフーリエ変換は

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{i\lambda} \left(e^{\boxed{\text{ケ}}} - 1 \right) = \boxed{\text{コ}} \frac{\sin \lambda}{\lambda}$$

である。 $F(x)$ を \hat{f} の逆変換としたとき、 $F(0) = F(2) = \boxed{\text{サ}}$ となる。パーセバルの等式を用いれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \lambda}{\lambda} \right)^2 d\lambda = \boxed{\text{シ}}$$

が分かる。

3. 熱と波の伝わり方の違いについて述べよ。