1. 線形位相空間

1.1　線形空間

- $\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$
- $C[a,b]$, $C^{(k)}[a,b]$, $C^{\infty}[a,b]$, $P[a,b]$
- ℓ_2, C（極限をもつ数列全体）, C_0（0 を極限にもつ数列全体）, m（有界数列全体）, $\mathbf{R}^{\infty}$（数列全体）

問題　包含関係を調べよ。

1.2　位相空間

定義　次の条件を満たす近傍系 $\tau = \{O_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ があるとき、空間 X を位相空間と呼ぶ。
(1) $X, \phi \in \tau$,
(2) $\Lambda_0 \subset \Lambda$, $\cup_{\alpha\in\Lambda_0}\alpha \in \tau$
(3) $\Lambda_0 \subset \Lambda$, $|\Lambda_0| < \infty$, $\cap_{\alpha\in\Lambda_0}\alpha \in \tau$

- 距離空間
- $\tau =$ 部分集合の全体（離散位相）
- $\tau = \{X, \phi\}$

1.3　位相線形空間

定義　次の条件を満たすとき、空間 E を位相線形空間と呼ぶ。

(1) E は線形空間

(2) E は位相空間

(3) 和とスカラー倍の演算が連続となる。

問題　(3) をきちんと近傍系を使って述べてみよ。

- ノルム空間（線形空間＋ノルム）

$$U(r) = \{x \in E; \|x\| < r\}$$

- $\mathbf{R}^\infty$

$$U_{k_1,k_2,\ldots,k_n,r} = \{x = (x_1, x_2, \ldots); |x_{k_i}| < r, 1 \leq i \leq n\}$$

- $C^\infty[a,b]$

$$U_{m,r} = \{\phi \in C^\infty[a,b]; \max_{a \leq x \leq b}; |\phi^{(k)}(x)| < r, 1 \leq k \leq m\}$$

注意

(1) $\mathbf{R}^\infty$ はノルム空間にならない。

(2) $C^\infty[a,b]$ は可算ノルム空間である。

2. 連続線形汎関数

定義　$f : E \to \mathbf{R}$ が線形汎関数であるとは、
(1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$
(2) $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

定義　$f : E \to \mathbf{R}$ が $x = x_0$ で連続であるとは、

$\forall \epsilon > 0, x_0 \in \exists\, U$ open s.t. $\forall\, x \in U$, $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$

をみたすことである。E の各点で連続のとき、E で連続であるという。

問題　$f : X \to \quad Y$ の連続の定義を思い出すこと。

定義　$f : E \to \mathbf{R}$ が連続線形汎関数であるとは、
(1) 線形汎関数である。
(2) E で連続である。

命題　$f : E \to \mathbf{R}$ 線形汎関数
$\exists\, x_0$ で連続である。$\Leftrightarrow$ E で連続である。

証明　y_0 の近傍を $V = U + (y_0 - x_0)$ とする。
$\forall\, z = x + y_0 - x_0 \in V$

$$\begin{aligned} |f(z) - f(y_0)| &= |f(z - y_0)| = |f(x - x_0)| \\ &= |f(x) - f(x_0)| < \epsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

例

- $< \cdot, \cdot >$ を内積、$a \in \mathbf{R}^n$ とする。

$$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \quad f_a(x) = < x, a >$$

- $$f : C[a,b] \to \mathbf{R}, \quad f(F) = \int_a^b F(x)dx$$

- $c \in [a,b]$ とする。

$$f : C[a,b] \to \mathbf{R}, \quad f(F) = F(c)$$

- $\phi \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$ とする。

$$f : C_c^\infty[a,b] \to \mathbf{R}, \quad f(F) = \int_a^b F(x)\phi(x)dx$$

命題　$f : E \to \mathbf{R}$ を線形汎関数とする。
f が E で連続
$\Leftrightarrow 0 \in \exists\, U$ open, $\exists\, M > 0, \forall\, x \in U, |f(x)| < M$

証明　$\to$: $x = 0$ での連続性
$\leftarrow$: $V = \dfrac{\epsilon}{M}U$
$0 \in V$, $\forall\, z = \dfrac{\epsilon}{M}x \in V$, $x \in U$,

$$|f(z) - f(0)| = |f(z)| = \frac{\epsilon}{M}|f(x)| < \epsilon \quad \blacksquare$$

系　E をノルム空間、$f : E \to \mathbf{R}$ を線形汎関数とする。
f が E で連続
$\Leftrightarrow \forall\, R > 0, \exists\, M > 0, \forall\, x \in B(0,R), |f(x)| < M$

証明　$\exists\, B(0,\delta) \subset \exists\, U$, $\exists\, M > 0$
$|f(x)| < M, \|x\| < \delta$
$\forall\, z \in B(0,R)$, $z = \dfrac{R}{\delta}\dfrac{\delta}{R}z$
$|f(z)| = \dfrac{R}{\delta}|f(\dfrac{\delta}{R}z)| < \dfrac{R}{\delta}M \quad \blacksquare$

定義　E をノルム空間、$f : E \to \mathbf{R}$ を線形汎関数とする。

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

を f のノルムとよぶ。

問題
(1) 上の等号を示せ。
(2) 例の連続線形汎関数のノルムを求めよ。

3．Hahn-Banach の定理

E　実線形空間、$E_0 \subset E$　部分空間、線形汎関数

$$f_0 : E_0 \to \mathbf{R}$$

が与えられている。

問題　f_0 の E　への拡張 f はあるか？　すなわち、線形汎関数

$$f : E \to \mathbf{R}, \quad f|E_0 = f_0$$

なものはあるか？

3.1

準備１　$p : E \to \mathbf{R}$ が同次凸関数であるとは、
(1)　$p \geq 0,$
(2)　$p(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha p(x) + (1-\alpha)p(y),$
(3)　$p(\alpha x) = \alpha P(x), \alpha > 0$
とくに、$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$　である。

準備２　Zorn の補題「空でない半順序集合の∀鎖が上界をもてば、極大元が存在する」

→半順序集合 M とはつぎの関係がある集合
(1)　$a \leq a,$
(2)　$a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b,$
(3)　$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$

→ 半順序集合 M の鎖 M_0 とは、次の条件をみたす部分集合である
$\forall\ a, b \in M_0$ に対して、$a \leq b$ または $b \leq a$　が成立する

→半順序集合 M の部分集合 M_0 の上界 $c \in M$ とは、次の条件をみたす要素である
$\forall\ a \in M_0$ に対して、$a \leq c$ が成立する

3.2

Hahn-Banach の定理　同次凸関数　$p : E \to \mathbf{R}$ が存在し、

$$(\star) \quad f_0(x) \le p(x), x \in E_0$$

であれば、f_0 の拡張　f　が存在し、$(\star)$ をみたす。

証明　$E_0 \subset E, E_0 \neq E$　としてよい。
$E_0 \subset E', E_0 \neq E'$ へ $(\star)$ をみたすように、拡張できることを示す。
$z \notin E_0, E' = span\{z, E_0\}$
$\exists\, c \in \mathbf{R},\ f_0(x) + tc \le p(x + tz),\ \forall\, x \in E_0, \forall\, t \in \mathbf{R},$
すなわち、
$t > 0 \Rightarrow c \le -f_0(\frac{x}{t}) + p(\frac{x}{t} + z),$
$t < 0 \Rightarrow c \ge -f_0(\frac{x}{t}) - p(-\frac{x}{t} - z),$
次のようにして見つける。
$y', y'' \in E,$

$$\begin{aligned} f_0(y'') - f_0(y') &= f_0(y'' - y') \\ &\le p(y'' - y') = p(y'' + z - (y' + z)) \\ &\le p(y'' + z) + p(-y' - z) - f_0(y') - p(-y' - z) \\ &\le -f_0(y'') + p(y'' + z) \end{aligned}$$

左辺の上限を c_1 を右辺の下限を c_2 とすれば、$c_1 \le c_2$ であるので
$c_1 \le c \le c_2$　とすればよい。
f_0 の E' への拡張 f'　を次のように定める。

$$f'(tz + x) = tc + f_0(x)$$

f' の線形性、$(\star)$ を調べよ。
M を $(\star)$ をみたす f_0 の拡張 (E_α, f_α) 全体とする。空でない。
順序を入れてみよ。
（$f_\alpha \le f_\beta \Leftrightarrow f_\beta$ は f_α の拡張）
$\forall$鎖に上限があることを示せ。

$$(E' = \cup E_\alpha, \quad f'(x) = f_\alpha(x), \quad x \in E_\alpha)$$

Zorn　の補題より極大元がある。
E への $(\star)$ をみたす f_0 の拡張がある。　■

3.3

定理 E をノルム空間、$f_0 : E_0 \to \mathbf{R}$ を E_0 上の有界線形汎関数とする。このとき、f の拡張が存在し、$\|f\| = \|f_0\|$ となる。

証明 $p : E \to \mathbf{R}$ を

$$p(x) = \|f_0\|\|x\|$$

と定めて前の定理を使う。 ■

分離定理 E をノルム空間、$x_0 \in E, x_0 \neq 0$ とする。このとき、$\exists\, f : E \to \mathbf{R}$ でもって、

$$\|f\| = 1, f(x_0) = \|x_0\|$$

となるものがある。

証明 $E_0 = \mathbf{R}x_0$ とし、

$$f_0(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$$

に対して、前の定理を使う。 ■

4. 双対空間

定義 E 位相線形空間とする。

$$E^* = \{f : E \to \mathbf{R}, \text{連続線形汎関数}\}$$

を E の双対空間とよぶ。

注意 E^* にはいくつかの位相の入れ方がある。それにより、E^* も位相線形空間となる。E がノルム空間のとき、

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \le 1} |f(x)|$$

により、E^* もノルム空間となる。

定理 E がノルム空間のとき、$(E^*, \|\cdot\|)$ は完備空間

証明 $\{f_n\}$ を E^* の Cauchy 列とする。

$$\forall \epsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n, m \ge N \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \epsilon$$

$x \in E$ fix

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |(f_n - f_m)(x)| \le \|f_n - f_m\|\|x\| < \epsilon\|x\|$$

よって $\{f_n(x)\}$ は $\mathbf{R}$ の Cauchy 列。収束先を $f(x)$ とする。
f は線形、連続（$|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon\|x\|, \|f_n - f\| < \epsilon$
$\|f\| \le \|f - f_n\| + \|f_n\| < \infty$）よって、$f \in E^*$
$\|f_n - f\| \to 0$ より、Cauchy 列は収束する。 ■

例

- $E = \mathbf{R}^n$, $E^* \equiv \mathbf{R}^n$

  E の基底 $\{e_m\}$ に対して、E^* の要素を

$$e_k^*(e_m) = \delta_{km}$$

  とする (双対基底)。

$$f(x) = f(\sum x_i e_i) = \sum x_i f(e_i) = \sum f(e_i) e_i^*(x)$$

$$f = \sum f(e_i) e_i^*$$

$$f \to \sum f(e_i) e_i$$

- $E = C_0$ $(\lim x_n = 0)$, $E^* = \ell_1$

$$\|x\|_{C_0} = \sup |x_n|, \quad \|x\|_{\ell_1} = \sum |x_i|$$

  $f = (f_i) \in \ell_1$ 　に対して、$\hat{f} \in C_0^*$ を

$$\hat{f}(x) = \sum f_i x_i, \quad x = (x_i) \in C_0$$

  で定める。$|\hat{f}(x)| \leq \|x\|_{C_0} \|f\|_{\ell_1}$ より、$\hat{f} \in C_0^*$

$$\|\hat{f}\|_{C_0^*} \leq \|f\|_{\ell_1}$$

  →等長：$\|\hat{f}\|_{C_0^*} = \|f\|_{\ell_1}$、とくに１：１である

  $x^{(N)} = \sum_{i=1}^{N} \frac{f_i}{|f_i|} e_i \in C_0$

  $\|x^{(N)}\|_{C_0} = 1$, $\hat{f}(x^{(N)}) = \sum_{i=1}^{N} |f_i|$

  $\lim_{N\to\infty} \hat{f}(x^{(N)}) = \|f\|_{\ell_1}$

$$\|\hat{f}\|_{C_0^*} = \sup_{\|x\|_{C_0} \leq 1} |\hat{f}(x)| \geq \sup |\hat{f}(x^{(N)})| = \|f\|_{\ell_1}$$

  $\to$ onto

  $F \in C_0^*$

  $F(x) = \sum x_i F(e_i)$

  $f = (f_i) = (F(e_i))$ とする。$x^{(N)}$ を前と同じとする。

  $\sum_1^N |F(e_i)| = F(x^{(N)}) \leq \|F\|_{C_0^*} \|x^{(N)}\|_{C_0} \leq \|F\|_{C_0^*}$

  $f \in \ell_1$, $\hat{f} = F$ 　■

- $E = \ell_p$, $E^* = \ell_q$, $1 < p < \infty$
- $E = \ell_1$, $E^* = m$

双対の双対

- $(\mathbf{R}^n)^{**} = \mathbf{R}^n$
- $\ell_p^{**} = \ell_q^* = \ell_p$
- $C_0^{**} = \ell_1^* = m$

命題　$E \subset E^{**}$ とみなせる

証明 $x_0 \in E$ に対して、$\Phi_{x_0}(f) = f(x_0)$ とする。とくに、E がノルム空間のとき、中への等長を示す。
$\|\Phi_{x_0}\| = \sup \dfrac{|\Phi_{x_0}(f)|}{\|f\|} \leq \|x_0\|$
分離定理を使うと $\exists\, g$, $g(x_0) = \|x_0\|$, $\|g\| = 1$
$\|\Phi_{x_0}\| \geq \|x_0\|$　■

Riesz の定理　E を Hilbert 空間。$\forall\, f \in E^*$ に対して、$\exists\, x_0 \in E$
(1) $f(x) =< x, x_0 >$,
(2) $\|f\|_{E^*} = \|x_0\|_E$

証明　$x_0 \in E$ に対して、$f_{x_0}(x) =< x, x_0 >$ と定める。
$f_{x_0} \in E^*$
$x_0 \to f_{x_0}$ が 等長な同型対応 $E \equiv E^*$ を与えることを示す。
$\to$等長, １：１は前と同じ計算。
$\to$ onto
$f = 0 \in E^* \Rightarrow x_0 = 0$
$f \neq 0$ と仮定してよい。$E_0 = Ker(f)$、$E_0 \neq E$
$E_0^{\perp} = \{x \in E; < x, y >= 0, \forall\, y \in E_0\}$
$\dim E_0^{\perp} = 1$ である。

$\because\ \exists\, z_0 \in E - E_0$, とくに $z_0 \in E_0^{\perp}$、$f(z_0) = 1$ にとる。
$\forall\, x \in E$, $y = x - f(x)z_0$,
$f(y) = 0$, $y \in Ker(f) = E_0$, $x = y + f(y)z_0 \in E_0 \oplus E_0^{\perp}$
もし、 $x \in E_0^{\perp}$, $x = f(z)z_0$, $E_0^{\perp} = \mathbf{R}z_0$

z_0 をノルム 1 に取りなおす。
$\forall\, x \in E$, $x = y + \alpha z_0 \in E_0 + E_0^{\perp}$

$x_0 = f(z_0)z_0$

$$< x, x_0 >=< y + \alpha z_0, x_0 >= \alpha f(z_0) = f(x) \quad \blacksquare$$

系　E が Hilbert 空間のとき、$E \equiv E^*$

5．強収束と弱収束

5.1　E 位相線形空間、E^* 双対空間、E^{**} 双対空間の双対空間

- E の位相

(1) 最初からある位相

(2) 弱位相

$\forall \epsilon > 0, \forall\ A \subset E^*, A$　有限,

$$U_{\epsilon,A} = \{x \in E; |f(x)| < \epsilon, \forall\ f \in A\}$$

- E^* の位相

(1) 強位相

$\forall \epsilon > 0, \forall\ A \subset E, A$ 有界,

$$U_{\epsilon,A} = \{f \in E^*; |f(x)| < \epsilon, \forall\ x \in A\}$$

(2) ＊弱位相

$\forall \epsilon > 0, \forall\ A \subset E, A$ 有限,

$$U_{\epsilon,A} = \{f \in E^*; |f(x)| < \epsilon, \forall\ x \in A\}$$

(3) 弱位相

$\forall \epsilon > 0, \forall\ A \subset E^{**}, A$ 有限,

$$U_{\epsilon,A} = \{f \in E^*; |F(f)| < \epsilon, \forall\ F \in A\}$$

命題 ＊弱位相で開ならば、弱位相で開。＊弱位相は弱位相より弱い。

命題 E がノルム空間のとき、E^* もノルム空間であるが、この位相は強位相と一致する。

5.2 **定義** 強位相での収束を強収束、弱位相での収束を弱収束という。

命題 強収束ならば、弱収束する。

命題 $x_n \to x_0$ 弱収束 $\Leftrightarrow f(x_n) \to f(x_0),\ \forall\ f \in E^*$

定理 E ノルム空間。$x_n \to x_0$ 弱収束
$\Rightarrow \quad \exists\ M > 0, \|x_n\| < M$

証明 $A_{kn} = \{f \in E^*; f(x_n) < k\}$ とする。
A_{kn} closed
$\because \{f_m\} \subset A_{kn},\ f_m \to f$,（強位相）
$f(x_n) = (f - f_m)(x_n) + f_m(x_n)$
$|f(x_n)| \leq \|f - f_m\|\|x_n\| + k \to k$
$f \in A_{kn}$
$A_k = \cap_1^\infty A_{kn}$ closed
$x_n \to x_0$ 弱収束 $\quad\Leftrightarrow\quad \forall\ f \in E^*,\ f(x_n) \to f(x_0)$
$\{f(x_n)\}$ 有界、$\exists\ k, \forall\ n, |f(x_n)| < k,\ f \in A_k$
$E^* = \cup_1^\infty A_k$

Baire の定理 完備距離空間は粗な集合（$\forall$ ball の中で稠密でない）の和ではかけない。

E^* は完備、よって Baire の定理より、
$\exists\ k_0, \exists\ B$ closed ball, $B \cap A_{k_0} = \overline{B \cap A_{k_0}} = B$
$B \subset A_{k_0} = \{f \in E^*; f(x_n) \leq k_0, \forall\ n\}$
B のシフトとスカラー倍を考えれば、
$\|f\| \leq 1 \Rightarrow \exists\ C > 0, |f(x_n)| < C$
$\|x_n\|_E = \|\Phi_{x_n}\|_{E^{**}} = \sup_{\|f\| \leq 1} |\Phi_{x_n}(f)|$
$= \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x_n)| < C \quad \blacksquare$

例 ℓ_2 では、強収束と弱収束は違う。

$$x_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$$

（n 番目に 1）

とすると、0 へ弱収束だが、強収束はしない。

6．超関数

6.1　$E = C_c^\infty(\mathbf{R})$

E の位相を入れるのはちょっと大変。

$$V_{n,k}(\phi) = \sum_{i=0}^{n} \max_{|x|\le k} |\phi^{(i)}(x)|$$

semi-norm 系 $\{\nu_n\}$ になる。

距離は

$$d(\phi,\psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(\phi-\psi)}{1+\nu_n(\phi-\psi)}$$

で定まる。

代わりに収束を定義する。

定義 $\phi_n \to \phi$ とは

(1) $\exists\ I=[a,b], supp(\phi_n) \subset I,$

(2) $\forall\ k, \sup_{x\in I} |\phi_n^{(k)}(x) - \phi_n^{(k)}(x)| \to 0, \quad n \to \infty$

6.2

定義 $E^* = C_c^\infty(\mathbf{R})^*$, すなわち $C_c^\infty(\mathbf{R})$ 上の連続線形汎関数全体を Schwartz の超関数という。

(1) 線形：　$T : C_c^\infty(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$

(2) 連続：　$\phi_n \to \phi \Rightarrow T(\phi_n) \to T(\phi)$

例

- $T(\phi) = \delta_a(\phi) = \phi(a)$ （デルタ関数）
- $T(\phi) = -\phi'(0)$
- $T(\phi) = T_f(\phi) = \int f(x)\phi(x)dx,\ f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$
- $T(\phi) = v.p. \displaystyle\int f(x)\frac{1}{x}dx = \int \frac{\phi(x)-\phi(0)}{x}dx$

定義 $E^* = C_c^\infty(\mathbf{R})^*$ の位相は*弱位相を入れる。

$$T_n \to T \Leftrightarrow \forall \phi \in C_c^\infty(\mathbf{R}), T_n(\phi) \to T(\phi)$$

6.3

定義 $\frac{dT}{dx}(\phi) = -T(\frac{d\phi}{dx})$

例

- $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R}) \cap C^{(1)}(\mathbf{R})$

$$\frac{dT_f}{dx}(\phi) = T_{f'}(\phi)$$

- $$\frac{d\delta_a}{dx}(\phi) = -\phi'(0)$$

- $h(x) = 1(x \geq 0), 0(x < 0)$, (ヘビサイド関数)

$$\frac{dT_h}{dx}(\phi) = \phi(0) = \delta_0(\phi)$$

- f は、$x_1, x_2, \ldots$ で幅 $h_1, h_2, \ldots$ のジャンプをもち、他で連続とする。

$$\frac{dT_f}{dx}(\phi) = T_{f'}(\phi) + \sum h_i \delta_{x_i}(\phi)$$

- $(-\pi, \pi)$ で定義され、

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & (0 < x < \pi), \\ -\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} & (-\pi < x < 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

  となる関数を周期 2π で $\mathbf{R}$ に広げたものを f とする。

$$\frac{dT_f}{dx} = -T_{\frac{1}{2}} + \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_{2n\pi}$$

注意 Fourier 級数論より、最後の関数 f は、

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

である。普通の微分では、

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

で発散してしまう。

注意 超関数はいくらでも微分できる。収束列の微分も常に収束する。

7.　連続線形作用素

7.1　E, E_1 位相線形空間、

$$A : D_A \to E_1, \quad D_A \subset E$$

D_A は定義域。核を $KerA \subset D_A$、像を $ImA \subset E_1$ とかく。

定義 A が線形　$\Leftrightarrow$　（問題）

定義 A が連続　$\Leftrightarrow$　（問題）

注意 E, E_1 がノルム空間のとき、A が $x = x_0 \in D_A$　で連続とは、

$$\lim_{x \to x_0, x \in D_A} \|Ax - Ax_0\| = 0$$

例

- $I : E \to E$

$$Ix = x \quad \text{(恒等作用素)}$$

- $I : E \to E_1$

$$Ix = 0 \quad \text{(零作用素)}$$

- $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$

$$f(x) = Ax, \quad (A\ (m,n)\ \text{行列、線形写像})$$

- H Hilbert 空間、$H = H_0 + H_1$ （直和分解）、$x = x_0 + x_1$、$P : H \to H_0$

$$Px = x_0 \quad \text{(射影作用素)}$$

- $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$、$K(x,y) : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbf{R}$ 連続

$$I_K(f) = \int_a^b K(x,y) f(y) dy$$

(積分核 K をもつ積分作用素)

- $(C[a,b], \|\cdot\|_2)$ として、積分作用素を考えてみよ。

- $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$、
$$D(f) = f'$$
線形だが、連続でない。実際、
$$\phi_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$$
を考えてみよ。

- $C[a,b]$ のノルムを、$\|\phi\| = \|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_\infty$ とする。
$$D(f) = f' \quad (\text{微分作用素})$$

7.2

定義
$D_A = E$、A が有界作用素 $\Leftrightarrow$ $\forall\ M$ 有界のとき、AM が有界となる。

命題 A が連続線形作用素であれば、A は有界作用素

証明 M 有界、AM は有界でないとする。
$0 \in \forall\ V$, open, nbd $\subset E_1$, $\forall\ n, \dfrac{1}{n}AM$ not in V
$\{x_n\} \subset M$, $\dfrac{1}{n}Ax_n$ not in V
M 有界、$\dfrac{1}{n}x_n \to 0$
A 連続線形、$\dfrac{1}{n}Ax_n \to 0 \in V$ 矛盾 ■

命題 E が第一可算公理をみたす。すなわち、
$$0 \in U_n \subset U_{n-1} \subset \ldots \subset U_1$$
がとれる。A が有界作用素であれば、A は連続作用素

証明 A が 0 で連続でないとする。
$\exists\ Vnbd \subset E_1$, $\forall\ n, AU_n$ not in V
$y_n \in U_n$, $y_n \to 0$, m fix, $my_n \to 0$
$\exists\ n_0, my_{n_0} = x_m \in U_m \subset U_1$, $\{x_m\}$ 有界
$Ax_m = mAy_{n_0}$ not in mV, $A\{x_m\}$ 有界でない。 ■

命題 E がノルム空間であれば、連続線形作用素 $\Leftrightarrow$ 有界作用素

定義　E がノルム空間であれば、有界作用素 A に対して

$$\|A\| = \inf\{c; \|Ax\| \leq c\|x\|, \forall\ x \in E\}$$

とすれば、

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$$

証明 $\alpha = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|$　とおく。
$\alpha \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{1}{\|x\|}\|Ax\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \alpha$
$x \neq 0$, $\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \alpha$, $\|Ax\| \leq \alpha\|A\|$
$\|A\| \leq \alpha$
$\forall\epsilon, \exists\ x_\epsilon, \alpha - \epsilon < \frac{\|Ax_\epsilon\|}{\|x_\epsilon\|}$
$(\alpha - \epsilon)\|x_\epsilon\| < \|Ax_\epsilon\| \leq c\|x_\epsilon\|$
$\alpha - \epsilon < \inf c = \|A\|$
$\alpha \leq \|A\|$ ■

8. Banach の逆写像定理

E, E_1 位相線形空間、$A : E \to E_1$ は 1:1 な写像とする。

定義　ImA の要素 y に対して、$Ax = y$ となる x を $x = A^{-1}y$ とかく。

定理　A が線形、1:1 ならば、A^{-1}　も線形。

Banach の逆写像定理　E, E_1 を Banach 空間、$A : E \to E_1$ は上への 1:1 写像で、有界作用素とする。このとき、A^{-1}　も有界作用素である。

Banach の開写像定理　E, E_1 を Banach 空間、$A : E \to E_1$ は上への写像で、連続線形作用素とする。このとき、A は開写像である。

Troika の定理　E, E_1、E_2 を Banach 空間、$A : E \to E_1$、$B : E \to E_2$ は連続線形作用素とする。$KerB \subset KerA$ でかつ B が上への写像であれば、$\exists$連続線形作用素 $C : E_2 \to E_1$ が存在し、$A = CB$ となる。

定義　$A : E \to E_1$　線形作用素が、閉作用素であるとは、
$\{x_n\} \subset D_A$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$　ならば、$Ax = y$

定義　$A : E \to E_1$　線形作用素のグラフとは、
$G_A = \{(x, Ax); x \in D_A\} \subset E \times E_1$

閉グラフ定理　E, E_1 を Banach 空間、$A : E \to E_1$ は m 線形作用素とする。このとき、
(1) A が閉作用素　$\Leftrightarrow$　G_A が閉集合
(2) $D_A = E$, A が閉作用素　$\Rightarrow$　A は有界作用素

9．共役作用素

E, E_1 位相線形空間、　$A : E \to E_1$　連続線形作用素とする。

定義　$A^* : E_1^* \to E^*$ を、$A^* f(x) = f(Ax)$ $(f \in E_1^*, x \in E)$ で定める。

命題
(1) A^* は線形
(2) $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(\alpha A)^* = \alpha A^*$

例　$f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{\mathbf{m}}$ を線形写像とすれば、$f(x) = Ax$ なる行列がある。このとき、

$$f^* : \mathbf{R}^{\mathbf{m}} \to \mathbf{R}^n, \quad f^*(x) = A^* x, A^* = A^t$$

定理　E, E_1 Banach 空間、$A : E \to E_1$ 有界線形作用素
$\Rightarrow A^*$ 有界線形作用素、$\|A^*\| = \|A\|$

証明　$A \neq 0$ としてよい。
$\forall\ f \in E_1^*$

$$\begin{aligned} |A^* f(x)| &= |f(Ax)| \\ &\leq \|f\| \|Ax\| \\ &\leq \|f\| \|A\| \|x\| \end{aligned}$$

$\|A^* f\| \leq \|f\| \|A\|$
$\|A^*\| \leq \|A\|$
$x \in E,\ Ax \neq 0,$
$y_0 = \dfrac{Ax}{\|Ax\|} \in E_1$ に分離定理を使う。
$\exists\ f \in E_1^*,\ \|f\| = 1,\ f(y_0) = 1$

$$\|Ax\| = f(\|Ax\| y_0) = f(Ax) = A^* f(x)$$

$$\begin{aligned} \|A^* x\| &\leq \|A^* f\| \|x\| \\ &\leq \|A^*\| \|f\| \|x\| \\ &= \|A^*\| \|x\| \end{aligned}$$

$\|A\| \leq \|A^*\|$　■

命題　E, E_1 Banach 空間、$A : E \to E_1$ 上への連続線形作用素
$\Rightarrow (KerA)^{\perp} = ImA^*$

証明　$\to (KerA)^{\perp} \supset ImA^*$：$ImA^* \ni f$
$\exists\ g \in E_1^*,\ f = A^*g$
$x \in KerA,\ f(x) = A^*g(x) = g(Ax) = g(0) = 0,$
$f \in (KerA)^{\perp}$
$\to (KerA)^{\perp} \subset ImA^*$：$f \in (KerA)^{\perp}$
$x \in KerA \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x \in Kerf,\ KerA \subset Kerf$
Toroika の定理を使う。
上段:　$0 \to Kerf \subset E \to \mathbf{R}$
下段:　$0 \to KerA \subset E \to E_1$
$\exists\ g \in E_1^*,\ f = gA$
$f(x) = gA(x) = A^*g(x),\ f = A^*g,\ f \in ImA^*$　■

定義　E Hilbert 空間とすれば、$E = E^*$ であった（Riesz の定理）
$A : E \to E$ 上への連続線形作用素が、$A = A^*$ のとき A を自己共役作用素とよぶ。このとき、

$$\forall\ x, y \in E, \quad < Ax, y > = < x, Ay >$$

である。

10. Comapct 作用素

10.1 位相空間の復習

E を位相空間、E_0 を部分集合とする。

定義 E_0 が compact $\Leftrightarrow$ $\forall$開被覆から$\exists$有限開被覆をとれる

定義 E_0 が可算 compact $\Leftrightarrow$ $\forall\ \{x_n\} \subset E_0,\ \exists\ \{x_{n_i}\}$,

$$\lim x_{n_i} = x_0 \in E_0$$

定義 E を距離空間とする。E_0 が全有界 $\Leftrightarrow$ $\forall \epsilon > 0$, 有限 ϵ-net がある。

定義 E を距離空間とする。E_0 が有界 $\Leftrightarrow$ $\exists\ B$ ball, $E_0 \subset B$

命題

- compact $\Rightarrow$ 可算 compact
- 可算基があれば、可算 compact $\Rightarrow$ compact
- $\dim E_0 < \infty$ であれば、全有界 $\Leftrightarrow$ 有界
- 全有界 $\Rightarrow$ 有界で可算基がある
- 可算 compact $\Rightarrow$ 全有界

定義 E_0 が 相対 compact $\Leftrightarrow$ $\bar{E}_0$ が comapct

定義 E_0 が相対可算 compact
$\Leftrightarrow \forall\ \{x_n\} \subset E_0,\ \exists\ \{x_{n_i}\}, \lim x_{n_i} = x_0$

命題

- E が距離空間であれば、相対 compact
  $\Leftrightarrow$ 相対可算 compact
- E が完備であれば、相対可算 compact $\Leftrightarrow$ 全有界

10.2　以下、E は　Banach 空間とする。

定義　$A : E \to E$ が compact 作用素（完全連続作用素）とは、
$\forall\ S \subset E$　有界に対して、AE が相対 compact となる。

注意
(1)　compact 作用素は連続作用素
（相対 compact ⇒全有界⇒有界）
(2)　$E = \mathbf{R}^n$ ならば、線形作用素は compact 作用素
（線形⇒連続⇔有界、AS 相対 compact ⇔全有界⇔有界）

例

- $\dim E = \infty$ のとき、恒等作用素は compact 作用素でない。

  $S = \{x; \|x\| \leq 1\}$, $S = AS$ が相対 compact でないことを示す。

  補題 $\{x_i\} \subset E$ 一次独立、$E_n = span\{x_i; 1 \leq i \leq n\}$ とすれば、$\{y_n\} \subset E$ がとれ、

  (1) $\|y_n\| = 1$,

  (2) $y_n \in E_n$,

  (3) $d(y_n, E_{n-1}) > \frac{1}{2}$

  証明 x_n は E_{n-1}　の外。$d(x_n, E_{n-1}) = \alpha > 0$

  $\exists\ x^* \in E_{n-1}$, $d(x^*, x_n) < 2\alpha$

  $\alpha = d(x_n, E_{n-1}) = d(x_n, E_{n-1} + x^*) = d(x_n - x^*, E_{n-1})$

  $$y_n = \frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|}$$

  $$d(y_n, E_{n-1}) = d(\frac{x_n - x^*}{\|x_n - x^*\|}, E_{n-1}) > \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2}$$

  $y_n \in S$, $d(y_n, y_{n-1}) > \dfrac{1}{2}$
  $\{y_n\}$ は収束部分列をもたない。よって相対 compact でない。　■

- $A : E \to E$ 連続作用素、$ImA \subset E_0$、$\dim E_0 < \infty$ のとき、A は compact 作用素。

  このような作用素を有限次元作用素、退化作用素などとよぶ。

  証明 $S \subset E$ 有界とすると、A 連続より、AS 有界。

  $\dim E_0 < \infty$ より、全有界。完備性より、相対 compact。 ■

- $A : \ell_2 \to \ell_2$ を

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \ldots, \frac{1}{2^n}x_n, \ldots)$$

  とすれば、compact 作用素である。

  証明 $S \subset E$ 有界とすると、A の線形性より、$S = B = \{x; \|x\| \le 1\}$ としてよい。

  $A : B \to C = \{y = (y_1, y_2, \ldots); |y_n| \le \frac{1}{2^{n-1}}\}$ （ヒルベルトの煉瓦）

  AB 相対 compact を示すのに、$AB \subset C$ 全有界を示す（ℓ_2 完備）

  $\forall \epsilon > 0,\ \exists\ n, \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$

  $C^* = \{x^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots); x \in C\}$

  $C^* \subset B$ 全有界、$\exists\ A = \{a\}$ 有限、C^* の $\frac{\epsilon}{2}$-net

  $x \in C$, $x^* \in C^*$,

$$d(x^*, a) \le \frac{\epsilon}{2}$$

$$d(x, x^*)^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} x_i^2 \le \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \le \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\epsilon}{2}$$

  よって、$a(x, a) \le \epsilon$。A は C の有限 ϵ-net

- $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$、$K : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbf{R}$ 有界とする。いま、$K(x,y)$ の不連続点が、

$$\{(x, \phi_k(x)); x \in [a,b], \phi_k \text{連続}\ (1 \le k \le n)\}$$

  にあるとすれば、

  (1) $I_K(f)(x) = \int_a^b K(x,y)f(y)dy \in C[a,b]$

  (2) I_K は compact 作用素

- compact 作用素は、単位球を可算 compact に移すとは限らない。

$\because$ $[a,b]=[-1,1]$ とし

$$K(x,y)=\begin{cases} 1 & (y<x) \\ 0 & (y>x) \end{cases}$$

とすれば、I_K は compact 作用素。

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & (-1\leq x<0), \\ nx & (0\leq x\leq \frac{1}{n}), \\ 1 & (\frac{1}{n}<x\leq 1) \end{cases}$$

とすると, $\|f_n\|=1$

$$g_n=Af_n=\begin{cases} 0 & (-1\leq x<0), \\ \dfrac{nx^2}{2} & (0\leq x\leq \frac{1}{n}), \\ x-\dfrac{1}{2n} & (\frac{1}{n}<x\leq 1) \end{cases}$$

$$g_n\to g=\begin{cases} 0 & (-1\leq x<0), \\ x & (0\leq x\leq 1) \end{cases}$$

AB が可算 compact とすると $\exists\ h\in C[-1,1]$ がとれ、$g=I_Kh$

$g=\displaystyle\int_{-1}^{x}h(y)dy$, $g'=h$ 連続。矛盾。可算 compact でない。 ■

11. Comapct 作用素 (2)

定理　$\{A_n\}$ compact 作用素の列。
$\|A_n - A\| \to 0 \Rightarrow A$ compact 作用素

証明　$S \subset E$ 有界に対し、AS 相対 compact を示す。相対可算 compact を示す。
$AS \supset \forall\ \{Ax_n\}$ から収束部分列がとれることを示す。
$\{A_n\}$ compact 作用素、$\{A_n x_m\}$ 相対 compact
$\{A_1 x_n\}$ の収束部分列：　$\lim A_1 x_i^{(1)} = x^{(1)}$
$\{A_2 x_n^{(1)}\}$ の収束部分列：　$\lim A_2 x_i^{(2)} = x^{(2)}$
$\{A_3 x_n^{(2)}\}$ の収束部分列：　$\lim A_3 x_i^{(3)} = x^{(3)}$
$\cdots$
$\lim A_i x_n^{(n)} = x^{(i)}$
$Ax_n^{(n)} \to x_0$　がいえればよい。$\{Ax_n^{(n)}\}$ Cauchy 列をいう。
$\|x_n^{(n)}\| < C$
$\|A_n - A\| \to 0$ より、
$\forall \epsilon > 0, \exists\ k_0, \forall\ k \geq k_0 \Rightarrow \|A_n - A\| < \epsilon/3C$
$k \geq k_0$ fix, $A_k x_n^{(n)} \to x^{(k)}$ は Cauchy 列
$\exists\ N, \forall\ n, m \geq N \Rightarrow \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| < \epsilon/3$
$\forall \epsilon > 0, \exists\ N, \forall\ n, m \geq N,\ \|Ax_n^{(n)} - Ax_m^{(m)}\|$
$\leq \|Ax_n^{(n)} - A_k x_n^{(n)}\| + \|A_k x_n^{(n)} - A_k x_m^{(m)}\| + \|A_k x_m^{(m)} - Ax_m^{(m)}\|$
$\leq \epsilon/3C \cdot C + \epsilon/C + \epsilon/3C \cdot C = \epsilon$
$\{Ax_n^{(n)}\}$ Cauchy 列　■

定理　A compact 作用素、B 有界作用素　$\Rightarrow$　AB, BA compact 作用素

証明　$\to S \subset E$ 有界、BS 有界、ABS 相対 compact
$\to S \subset E$ 有界、AS 相対 compact、B 連続より、BAS 相対 compact　■

定理　A compact 作用素　$\Rightarrow$　A^* compact 作用素

12. スペクトル

定義　E を Banach 空間、$A : E \to E$ 線形作用素とし、$\lambda \in \mathbf{C}$ に対して、$R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ とする。

(1) λ が正則　$\Leftrightarrow$　R_λ が存在し、$D_{R_\lambda} = E$
（$Ker(A - \lambda I) = \{0\}$、$R_\lambda$ が有界作用素、レゾルベントという）

(2) λ が連続スペクトル　$\Leftrightarrow$　R_λ が存在し、$D_{R_\lambda} \neq E$、稠密
（$Ker(A - \lambda I) = \{0\}$、$R_\lambda$ が有界でない。$D_{R_\lambda} \subset E$ 稠密）

(3) λ が剰余スペクトル　$\Leftrightarrow$　R_λ が存在し、$D_{R_\lambda} \neq E$、稠密でない
（$Ker(A - \lambda I) = \{0\}$、$R_\lambda$ が有界でない。$D_{R_\lambda} \subset E$ 稠密でない）

(4) λ が点スペクトル　$\Leftrightarrow$　R_λ が存在しない
（$Ker(A - \lambda I) \neq \{0\}$）

定義　それぞれのスペクトルの集合を、

$$\rho(A), \sigma_C(A), \sigma_R(A), \sigma_P(A)$$

とすれば、

$$\mathbf{C} = \rho(A) \cup \sigma(A) = \rho(A) \cup \sigma_C(A) \cup \sigma_R(A) \cup \sigma_P(A)$$

定義　$\lambda \in \sigma_P(A)$ のとき、$\exists\, x_0 \neq 0, Ax_0 = \lambda x_0$。このとき、$\lambda$ を固有値、x_0 を固有ベクトルとよぶ。また、$Ker(A - \lambda I)$ を固有空間、その次元を λ の重複度という。

命題　$\dim E < \infty$ のとき、$\sigma_C(A) \cup \sigma_R(A) = \phi$

証明　有限次元のとき、1:1 $\Leftrightarrow$ onto $\Leftrightarrow$ 正則　■

例

- I （恒等作用素）$\Rightarrow \quad \sigma(I) = \sigma_P(I) = \{1\}$
- $E = (C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$

$$Ax(t) = tx(t)$$

$(A - \lambda I)x(t) = (t - \lambda)x(t)$

$ker(A - \lambda I) = \{0\}$, $\sigma_P(A) = \phi$

$(A - \lambda I)^{-1}x(t) = \dfrac{1}{t-\lambda}x(t)$

$\lambda \in [a,b]^c \Rightarrow \lambda$ 正則

$\lambda \in [a,b] \Rightarrow \lambda$ 剰余スペクトル

$\because\ D_{R_\lambda} = \{x(t);\ x(\lambda) = 0\}$

$$\rho(A) = [a,b]^c, \sigma_R(A) = [a,b]$$

- $E = (L^2[a,b], \|\cdot\|_2)$

$$\rho(A) = [a,b]^c, \sigma_C(A) = [a,b]$$

- $E = \ell_2$

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$$

$Ax = \lambda x \Rightarrow (0, x_1, x_2, \ldots) = \lambda(x_1, x_2, \ldots) \Rightarrow x = 0$

$\sigma_P(A) = \phi$

$\rightarrow \forall\ \lambda \neq 0$ にたいして $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ は定義される。

$y = R_\lambda x \Leftrightarrow x = (A - \lambda I)y \Leftrightarrow (x_1, x_2, \cdots) = (-\lambda y_1, y_1 - \lambda y_2, \cdots)$

$$y_1 = -\frac{1}{\lambda}x_1,\ y_2 = -\frac{1}{\lambda}\left(x_2 + \frac{1}{\lambda}x_1\right),\ \cdots$$

$\rightarrow \lambda = 0$ にたいしても $R_0 = A^{-1}$ は定義される。

$y = R_0 x = A^{-1}x \Leftrightarrow x = Ay \Leftrightarrow (x_1, x_2, \ldots) = (0, y_1, y_2, \ldots)$

A^{-1} は $x_1 = 0$ で定義され、

$$A^{-1}(0, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$$

以上のことから、

$$\rho(A) = \{\lambda; |\lambda| > 1\},\ \sigma_R(A)) = \{\lambda; |\lambda| < 1\},\ \sigma_C(A) = \{\lambda; |\lambda| = 1\}$$

- $E = \ell_2$

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots) \quad |\lambda_i| \leq M$$

$\rightarrow \lambda_i$ は点スペクトル

$e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ （i 番目に 1）

$Ae_i = \lambda_i e_i$, $\{\lambda_i\} \subset \sigma_P(A)$

$\rightarrow \lambda \in \Lambda = \overline{\{\lambda_i\}}$, $\lambda \neq \lambda_i, \forall\, i$ は連続スペクトル。

λ は点スペクトルでない

$Ax = \lambda x \Rightarrow \forall\, n, \lambda_n x_n = \lambda x_n \Rightarrow x_n = 0 \Rightarrow x = 0$

λ は剰余スペクトルでない

$y \perp Im(A - \lambda I) \Rightarrow \forall\, x, < (A - \lambda I)x, y >= 0 \Rightarrow \forall\, n, x = e_n \Rightarrow (\lambda_n - \lambda) y_n = 0 \Rightarrow y = 0$

D_{R_λ} は稠密

$\rightarrow \lambda \in \Lambda^c$ は正則

$\exists \epsilon > 0, |\lambda_n - \lambda| > \epsilon$

$\forall\, y = (y_1, y_2, \ldots)$, $\hat{y}_n = \dfrac{y_n}{\lambda_n - \lambda}$

$\|\hat{y}\|_2^2 \leq \epsilon^{-2} \|y\|_2^2$, $\hat{y} \in \ell_2$

$(A - \lambda I)\hat{y} = y$

$\|(A - \lambda)^{-1} y\| = \|\hat{y}\| \leq \epsilon^{-1} \|y\|$

$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \epsilon^{-1}$, λ は正則

以上のことから、

$$\rho(A) = \overline{\{\lambda_i\}}^c \sigma_C(A) = \overline{\{\lambda_i\}} - \{\lambda_i\},\ \sigma_P(A) = \{\lambda_i\}$$

- $E = (C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, $\max |K(x, y)| \leq M$

$$Af(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \quad \text{Volterra 型積分作用素}$$

$\|A^n f\| \leq M^n \dfrac{|x - a|^n}{n!} \|f\|$ （帰納法で示される）

$\rightarrow \lambda \neq 0$

$$\begin{aligned} (A - \lambda I)^{-1} &= \frac{1}{\lambda} \sum (I - \frac{A}{\lambda})^{-1} \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum (\frac{A}{\lambda})^n \end{aligned}$$

$$\|(A-\lambda I)^{-1}f\| \leq \sum \frac{1}{\lambda^{n+1}} M^n \frac{(b-a)^n}{n!} \|f\|$$

$\lambda \neq 0$ は正則

$\rightarrow \lambda = 0$

$Im(A) \subset \{f; f(a) = 0\}$, not dense in $C[a,b]$, $0 \in \sigma_R(A)$

以上のことから、

$$\rho(A) = \{\lambda \neq 0\},\ \sigma_R(A) = \{0\}$$

13. スペクトル (2)

定理　A が compact 作用素であれば、$\forall \delta > 0$ に対して、固有値の絶対値が δ を越える固有ベクトルの一次独立なものは有限個

系　A が compact 作用素であれば、0 でない固有値に対する固有空間は有限次元である。

系　A が compact 作用素であれば、0 でない固有値を

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

と並べると、0 以外に集積することはない。

定理の証明　絶対値が δ を越える固有値とその固有ベクトルを
$\lambda_1, \lambda_2, \dots$
$x_1, x_2, \dots$
と並べる。固有値の重複を許し、x_i は一次独立にとる。
$E_n = span\{x_i; 1 \leq i \leq n\}$
一次独立なものが無限個あれば、前の補題より、
$y_n \in E_n, \|y_n\| = 1, d(y_n, E_{n-1}) > \dfrac{1}{2}$　がとれる
$\{\dfrac{y_n}{\lambda_n}\}$ は有界
$A\{\dfrac{y_n}{\lambda_n}\}$ は相対 compact
収束部分列がとれる。改めて $\{\dfrac{y_n}{\lambda_n}\}$ とする。
$y_n = \sum \alpha_k x_k$ とすると

$$\begin{aligned} A(\frac{y_n}{\lambda_n}) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{\lambda_n}\lambda_k x_k + \alpha_n x_n \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_k(\frac{\lambda_k}{\lambda_n} - 1)x_k + y_n = z_n + y_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|A(\frac{y_n}{\lambda_n} - \frac{y_m}{\lambda_m})\| &= \|z_n + y_n - z_m - y_m\| \\ &= \|y_n - (y_m + z_n - z_m)\| > \frac{1}{2}, n > m \end{aligned}$$

Cauchy 列にならず、矛盾　■

定理　E を Hilebert 空間、A を Unitary 作用素（$A^* = A^{-1}$）とする。このとき、$\sigma(A) \subset S^1 = \{z; |z| = 1\}$ である。

証明（$\sigma_P(A) \subset S^1$ は容易）$\mathbf{C} - S^1 \subset \rho(A)$ を示す。
$\rightarrow |\lambda| > 1$

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\sum(\frac{A}{\lambda})^n$$

よって $\|\frac{A}{\lambda}\| = \frac{1}{\lambda} < 1$　より、定義できる。
$\rightarrow |\lambda| < 1$

$$\begin{aligned}(\lambda I - A)^{-1} &= -\frac{I}{A(I - \lambda A^{-1})} \\ &= -A^* \frac{I}{(I - \lambda A^*)} \\ &= -A^* \sum(\lambda A^*)^n\end{aligned}$$

$\|\lambda U^*\| = |\lambda| < 1$ より、定義できる。　■

定理　E を Hilebert 空間、A を 自己共役作用素（$A^* = A$）とする。このとき、$\sigma(A) \subset \mathbf{R}$ である。

証明　$\lambda \in \sigma_P(A)$　のときを示す。
$\exists\ x_0 \neq 0,\ Ax_0 = \lambda x_0$
$< Ax_0, x_0 >= \lambda \|x_0\|$
$< Ax_0, x_0 >=< x_0, A^* x_0 >=< x_0, Ax_0 >= \bar{\lambda}\|x_0\|$
$\lambda = \bar{\lambda}$ より、λ は実数。　■