

## 変化の理論

慶應大学総合政策学部 河添 健

目的 この講義では「微分」とは何か？について考え、そしてその本質が「関数の線形近似」である事に注目します。例えば、 $f(x) = \sin x$  を例にとって話しましょう。 $(0, 0)$  のところでこの曲線を直線  $y = x$  で近似することを考えます。この近似の度合を表す記号がランダウ記号で

$$\sin x = O(x)$$

と書きます（第4回）。ここで  $y = x$  は  $(0, 0)$  における接線です。このとき接線の傾き 1 は一階の微分を用いて計算されます。実際、 $f'(0) = \cos 0 = 1$  となります。

更に高階の微分を使えば、近似の度合があがるのでは？と予想されます。このことは正しくて、例えば 7 階までの微分を使えば次の様な多項式近似（テイラー近似）ができます。（第9回）

$$\sin x \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

この様に「微分」の概念を「近似」の概念で捉える事は、多変数関数や写像の微分を定義する上で重要です。実際の計算は 1 变数の時と何ら変わりませんが、偏微分と呼ばれ、何故か難しがられています。また名前も変わってしまいます。例えば二変数関数  $z = f(x, y)$  を考えたとき、「微分係数」は「勾配ベクトル」（gradient）（第5回）「接線」は「接平面」（第6回）と呼ばれるようになります。講義では一般的の写像まで微分の概念を拡張します。

関数の微分を使うと関数の「極点」や増減が分かりました。高校のとき増減表を作つてグラフを描いたと思います。多変数関数についても同様で、微分を用いて多変数関数の「極点」を計算することができます（第10回、第11回）。特に制約条件の元での極値問題は「条件付き極値問題」と呼ばれ多くの経済などの幅広い分野で応用されます（第12回）。

教材 ホームページ ([www.sfc.keio.ac.jp/~kawazoe](http://www.sfc.keio.ac.jp/~kawazoe)) に貼つてあります。もつと自分で勉強したい人は

解析入門（渡部隆一著）培風館

微積分入門（有馬哲 / 浅枝陽共著）東京図書

解析入門（杉浦光夫著）東大出版会

などがよいでしょう。数学ソフト「Mathematica」を使うと便利です。

## 授業計画

- 第 1 回  $n$  次元ユークリッド空間、距離、近傍、開集合、閉集合
- 第 2 回 関数と写像、定義域、値域、写像の連続性
- 第 3 回 連続関数、中間値の定理、最大最小の定理、不動点定理
- 第 4 回 線形近似と微分 (1): 無限小、ランダウ記号、接線
- 第 5 回 線形近似と微分 (2): 偏微分、全微分と接平面
- 第 6 回 線形近似と微分 (3): 写像の微分とヤコビ行列
- 第 7 回 微分計算 (1): 写像の合成と逆写像、行列の演算
- 第 8 回 微分計算 (2): 陰関数でなに?
- 第 9 回 テイラーの定理、多項式近似、マクローリン展開
- 第 10 回 極値問題 (1): 極点と微分、極大極小の判定、変曲点
- 第 11 回 極値問題 (2): 多変数関数の極値、鞍点、極大極小の判定
- 第 12 回 極値問題 (3): 条件付き極値問題、ラグランジュの乗数法
- 第 13 回 まとめ + 傾向と対策

成績評価 毎回講義の終り頃に演習行ないます。講義の理解度を自己採点し、それをもとに次回の講義レベルを決めて行きます。演習の出来具合は評価しませんが、出席点として評価します。(白紙は減点、代筆は大幅減点です) 実際の評価は期末試験(持ち込み何でも可。他人と通信機器はダメ)によりますが、

履修上の注意 「微分」 = 「計算問題」といった固定概念を捨てること。試験には計算問題を出しますが、その本質である「微分」と「近似」の関係を理解してください。また高校で習わなかった多くの新しい概念や言葉が登場しますので、一つ一つ積み上げて理解し決して焦らぬ様にして下さい。