

第1章 いろいろな記号と集合の話

1.1 いろいろな記号

1.1.1 数

□ 絶対値

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ \Leftrightarrow a & (a < 0) \end{cases}$$

□ べき乗

$a > 0, b > 0$ 、 m, n は実数の時

- $a^m \times a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $a^m \div a^n = a^{m-n}$

□ 割り算

a, b 整数のとき

$$a \div b \text{ の商 } r, \text{ 余り } q \Leftrightarrow a = br + q \quad (0 \leq q < r)$$

□ 多項式の割り算

$a(x), b(x)$ が整式のとき

$$a(x) \div b(x) \text{ の商 } r(x), \text{ 余り } q(x) \Leftrightarrow a(x) = b(x)r(x) + q(x) \quad (0 \leq \deg q(x) < \deg r(x))$$

1.1.2 数列

$a_1, a_2, \dots$ 数列

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

□ 数列の極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

□ 極限の演算

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad \alpha, \beta \text{ は実数のとき}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha a + \beta b$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}, \quad (b \neq 0)$$

□ 級数

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

□ 級数の演算

$$\sum_{k=1}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^n a_k + \sum_{k=1}^n b_k$$

$$\sum_{k=1}^n c a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

□ 2項係数

$$n! = n(n \Leftarrow 1)(n \Leftarrow 2) \cdots 1$$

$${}_n C_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n \Leftarrow r)! r!} \quad (0 \leq r \leq n), \quad \text{注意} \quad 0! = 1$$

$${}_n P_r = n(n \Leftarrow 1) \cdots (n \Leftarrow r + 1) = r! {}_n C_r$$

□ 二項展開

$$(a+b)^n = a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_r a^{n-r} b^r + \cdots + b^n = \sum_{k=1}^n {}_n C_k a^{n-k} b^k$$

1.1.3 複素数

$$\sqrt{\Leftarrow 1} = i$$

$$z = a + bi, \quad a, b \text{ 実数}$$

□ 複素数の演算

$$z_1 = a_1 + b_1 i, \quad z_2 = a_2 + b_2 i$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 \Leftarrow b_1 b_2) + (a_1 b_1 + a_2 b_1) i$$

□ 共役複素数

$$\bar{z} = a \Leftarrow b i$$

□ 絶対値

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = (z \bar{z})^{\frac{1}{2}}$$

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

□ 極分解

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

絶対値 $r = |z|$ 、偏角 $\theta = \arg z$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

□ ド・モアブルの公式

$$z^n = r^n (\cos \theta + i \sin \theta)^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

1.1.4 数の集合

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

1.1.5 ベクトル

□ ベクトルの演算

(1)

$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AC} = \vec{CB}$$

$$(2) \vec{a} = (a_1, b_1) = \vec{OA}, \vec{b} = (a_2, b_2) = \vec{OB} \text{ のとき}$$

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} = (\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2)$$

□ 大きさ、ノルム

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

□ 内積

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

□ ベクトルのなす角 θ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \alpha \vec{b} \quad (\alpha \neq 0)$$

□ n 次元ベクトル

空間のベクトルを考えると、添字の 1, 2 を 1, 2, 3 とすればよい。 $\mathbf{R}^n$ のベクトルを考えると添字を 1, 2, $\dots$, n とすればよい。

□ ベクトルと複素数

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \leftrightarrow z = a_1 + a_2 i$$

$$|\vec{a}| = |z|$$

1.1.6 グラフと直線の方程式

□ $y = f(x)$ の対称移動

$$y = \Leftrightarrow f(x) \quad x \text{ 軸について対称}$$

$$y = f(\Leftrightarrow x) \quad y \text{ 軸について対称}$$

$$y = \Leftrightarrow f(\Leftrightarrow x) \quad \text{原点について対称}$$

$$x = f(y) \quad x = y \text{ について対称}$$

$$y \Leftrightarrow q = f(x \Leftrightarrow p) \quad x \text{ 軸方向に } p, y \text{ 軸方向に } q \text{ の平行移動}$$

□ 直線の方程式

(1) (x_1, y_1) を通り傾き m の直線

$$y \Leftarrow y_1 = m(x \Leftarrow x_1)$$

(2) $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線

$$y \Leftarrow y_1 = \frac{y_2 \Leftarrow y_1}{x_2 \Leftarrow x_1}(x \Leftarrow x_1) \quad (x_1 \neq x_2)$$

(3) A を通り $\vec{v}$ に平行な直線

$$\vec{x} = \vec{a} + t\vec{v}$$

 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 t 実数(4) A, B を通る直線

$$\vec{x} = (1 \Leftarrow t)\vec{a} + t\vec{b}$$

 $\vec{OA} = \vec{a}$ 、 $\vec{OB} = \vec{b}$ 、 t 実数

1.1.7 関数の極限

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$$

$$f(x) \rightarrow \alpha (x \rightarrow a)$$

□ 極限の演算

 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = d$ のとき

$$\lim_{x \rightarrow a} (\alpha f(x) + \beta g(x)) = \alpha c + \beta d$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = cd$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{d}$$

1.1.8 関数の微分

 $x = x_0$ での微分係数

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) \Leftarrow f(x_0)}{h} = \lim_{y \rightarrow x_0} \frac{f(y) \Leftarrow f(x)}{y \Leftarrow x_0}$$

□ 多項式の微分

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

□ 微分の演算

$$(\alpha f(x) + \beta g(x))' = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) \Leftarrow f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

□ 高階微分

$$f''(x) = (f'(x))'$$

$$f'''(x) = (f''(x))'$$

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

□ 接線の方程式

$$y \Leftarrow y_0 = f'(x_0)(x \Leftarrow x_0)$$

□ 法線の方程式

$$y \Leftarrow y_0 = \Leftarrow \frac{1}{f'(x_0)}(x \Leftarrow x_0)$$

1.1.9 積分

$$F'(x) = f(x) \rightarrow \int f(x)dx = F(x) + C$$

□ 多項式の積分

$$\int x^\alpha dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C & (\alpha \neq \Leftarrow 1) \\ \log x + C & (\alpha = \Leftarrow 1) \end{cases}$$

□ 積分の演算

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int f(x)dx + \beta \int g(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) \Leftarrow F(a)$$

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$$

□ 積分の性質

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$f(x) \geq 0 \rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(x)dx = f(x)$$

□ 面積

$$y = f(x), y = g(x), a \leq x \leq b \text{ の囲む面積 } S$$

$$S = \int_a^b |f(x) \Leftarrow g(x)|dx$$

□ 切り口の面積 S の体積

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

□ $y = f(x)$ の x 軸での回転体の体積

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

□ $y = f(x)$ の曲線の長さ S

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

1.2 集合の記号

1.2.1

ある程度の思考の対称の集まりを一般に集合というが、(この定義を本当に正確にするととなると大変であるが、一応我々は集合ということにういてある程度の常識的考えをもっているとする。要素が属するか属さないかは明確に判断できる必要がある)

注意 以下 $\forall$ は "全ての"、 $\exists$ は "ある" と読む。 $\forall = \text{all}$ 、 $\exists = \text{exist}$ 。

□ 集合の記号

$a \in A$ a は集合 A の要素である a は A に属する

$a \notin A$ $a \in A$ の否定 a は A に属さない

$A \subset B$ A は B の部分集合である $\forall a \in A \rightarrow a \in B$

$A \subset B$ $A \subset B$ で $A \neq B$ $\exists x_0 \in B$ s.t. $x_0 \notin A$

ϕ 空集合 要素を1つももたない集合 $\{ \} = \phi$,

$$\phi \subset A$$

□ 集合の演算

$A \cup B$ A と B の和集合 $A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$

$A \cap B$ A と B の共通集合 $A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$

A^c 集合 A の補集合 $A^c = \{x | x \notin A\}$

1.2.2 集合の演算公式

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

(ド・モルガン)

$$A \subset B \Rightarrow A^c \subset B^c$$

$$A \subset A \cup B, B \subset A \cup B$$

$$A \subset A \cap B, B \subset A \cap B$$

$$\phi \subset A$$

1.2.3 集合族

集合族 = 「集合の集合」 = その元が集合であるような集合

例 1.1 1. $\{(a, b) | a, b \in \mathbf{R}, a < b\}$

2. $A_1, A_2, \dots, A_n$ を集合として $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \{A_n | n = 1, 2, \dots, n\}$

3. $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$

□ 集合族の演算

Λ 添字集合、 $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 集合族とする。このとき集合族の和と積を次で定める。

1. 和 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x | \text{ある } \lambda \in \Lambda \text{ を適当に選べば } x \in A_\lambda \text{ である}\}$
2. 積 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \{x | \text{すべての } \lambda \in \Lambda \text{ に対して } x \in A_\lambda\}$

特に $\lambda = \mathbf{N}$ のとき

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \equiv \bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n, \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \equiv \bigcap_{n \in \mathbf{N}} A_n$$

□ 演算公式

集合族 $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ とある集合 M に対して

1. $M \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (M \cap A_\lambda)$ 和の分配律
2. $M \cup \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (M \cup A_\lambda)$ 積の分配律
3. $\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ ド・モルガンの法則
4. $\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c$ ド・モルガンの法則

□ 直和

$\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ に対して $A_\alpha \cap A_\beta = \phi (\alpha \neq \beta, \alpha, \beta \in \Lambda)$ になるとき、この集合族はお互いに素であるという。このとき

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \sum_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

とかいて、これを $\{A_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ の直和という。

1.2.4 ベキ集合族

A の部分集合全体からなる集合族のことを A のベキ集合族といい、 2^A または $P(A)$ とかく。

$$2^A \equiv \{B | B \subset A\}$$

例 1.2 $A = \{1, 2, 3\}$ として、

$$2^A = \{B | B \subset \{1, 2, 3\}\} = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, A\}$$

問 1.1 1. $A = \{1, 2, \dots, n\}$ のとき、 2^A の要素の個数は 2^n となることを示せ。

2. $\cup 2^A$ および $\cap 2^A$ を求めよ。

3. 2^ϕ を求めよ。

4. $A = \{1, 2, 3\}$ のとき、次の集合を求めよ。

(a) $\{\{x\} | x \in A\}$

(b) $\cap \{x | x \in p(A)\}$

(c) $p(\{A\})$

(d) $A \cup \{A\}$

第2章 関係

集合 A, B 間の対応を考える。

2.1 関係とグラフ

2.1.1 関係

2つの集合 A, B があり、 $A \ni a$ と $B \ni b$ との間に 関係 (対応) があるとき、 $b = f(a), f(a) = b$ などとかき、そのような関係全体を

$$f : A \rightarrow B$$

とかく。

例 2.1 $A = \{2, 3, 5\}, B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$b = f(a)$ を b は a の倍数と定めれば

$$\begin{aligned} f(2) &= 2 & f(3) &= 3 & f(5) &= 5 \\ f(2) &= 4 & f(3) &= 6 & f(5) &= 10 \\ f(2) &= 6 & f(3) &= 9 \\ f(2) &= 8 \\ f(2) &= 10 \end{aligned}$$

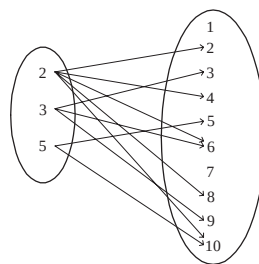


図 2.1:

例 2.2 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $B = \{2, 3, 5\}$
 $b = f(a)$ を b は a の倍数と定めれば

$$\begin{array}{lll} f(2) = 2 & f(3) = 3 & f(4) = 2 \\ f(5) = 5 & f(6) = 2 & f(6) = 3 \\ f(8) = 2 & f(9) = 3 & f(10) = 2 \\ f(10) = 5 \end{array}$$

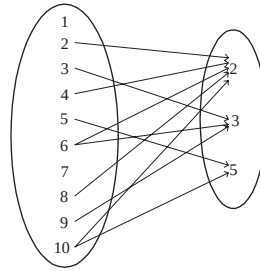


図 2.2:

例 2.3 $A = [\Leftrightarrow 1, 1]$, $B = \text{実数全体}$
 $b = f(a)$ を " $b = a^2 + 3$ " と定めれば

$$f(a) = a^2 + 3 \quad (\Leftrightarrow 1 \leq a \leq 1)$$

例 2.4 $A = [\Leftrightarrow 1, 1]$, $B = [0, 1]$
 $b = f(a)$ を " $b \geq 2a$ " と定めれば
 $\Leftrightarrow 1 \leq a \leq 0$ のとき

$$f(a) = x \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき

$$f(a) = x \quad (2a \leq x \leq 1)$$

例 2.5 $A = \text{人間の全体}$, $B = \text{実数}$
 $b = f(a)$ を " b は a の身長 (cm)" と定めれば
 $f(\text{マイケル・ジョーダン}) =$
 $f(\text{貴ノ花}) =$
 $f(\text{マドンナ}) =$
 $\vdots$

例 2.6 $A = \text{分子全体}$, $B = \text{原子全体}$
 $b = f(a)$ を " b は a を構成する原子" と定めれば
 $f(H_2O) = H$
 $f(H_2O) = O$

$$\begin{aligned}
 f(O_2) &= O \\
 f(C_6H_6) &= C \\
 f(C_6H_6) &= H \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

$A = B$ のとき、 $f: A \rightarrow A$ を " A 上の関係" という。

$f: A \rightarrow B$ が $\forall a \in A$ に対して、 $b = f(a)$ がただ 1 つ定まるとき、 f を 写像 という。

とくに $A = B$, $f(a) = a$ のとき 恒等写像 という。

2.1.2 グラフ

順序対 $(a, b) (a \in A, b \in B)$ の全体を A と B の 直積集合 といい、 $A \times B$ とかく。

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}$$

$f: A \rightarrow B$ が与えられたとき、 $A \times B$ の部分集合

$$G_f = \{(a, b) \in A \times B; b = f(a)\} \subset A \times B$$

を f の グラフ という。

直積集合 $A \times B$ およびその部分集合 G_f は、 A を横軸、 B をたて軸にとって、視覚化すると理解しやすい。

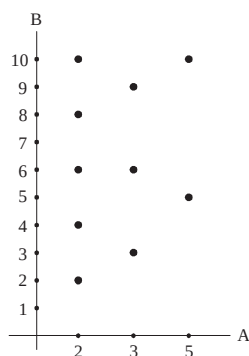


図 2.3: $G_f = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (3, 3), (3, 6), (3, 9), (5, 5), (5, 10)\}$

2.2 順序関係

2.2.1

A 上の関係 $f: A \rightarrow A$ が次の条件を満たすとき f を 順序関係 といい、 A を 順序集合 という。

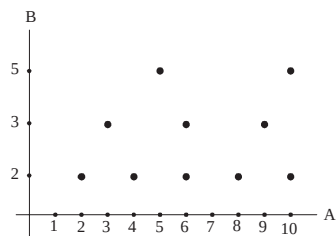


図 2.4: $G_f = \{(2, 2), (3, 3), (4, 2), (5, 5), (6, 2), (6, 3), (8, 2), (9, 3), (10, 2), (10, 5)\}$

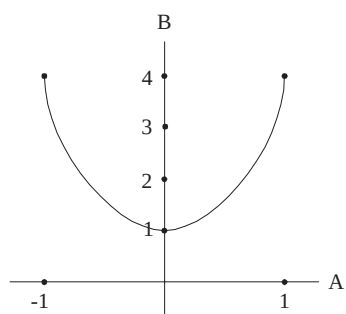


図 2.5:

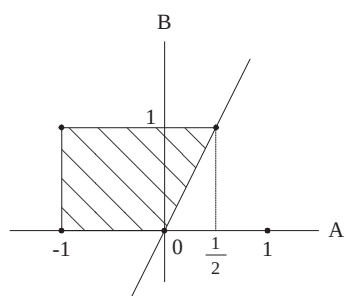


図 2.6:

図 2.7:

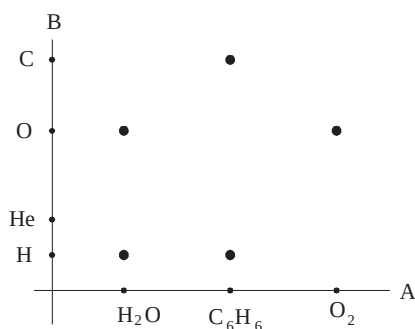


図 2.8:

(1) $\forall a \in A$ に対し $a = f(a)$ (反射律)

(2) $b = f(a), a = f(b) \Rightarrow a = b$ (反対称律)

(3) $b = f(a), c = f(b) \Rightarrow c = f(a)$ (推移律)

さらに次の条件が満たされるとき、 f を 全順序関係 といい、 A を 全順序集合 という。

(4) $\forall a, b \in A$ に対して $a = f(b)$ あるいは $b = f(a)$ である (比較可能)

全順序のことを 線形順序 ともいう。

f を順序関係としたとき $b = f(a)$ を " $b \succeq a$ " と書く。

例 2.7 $A = 45$ の約数 $= \{1, 3, 5, 15, 45\}$

$b \succeq a$ を " b は a の約数" と定めれば A は順序集合

例 2.8 $A = 12$ の約数 $= \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

$b \succeq a$ を " b は a の倍数" と定めれば A は順序集合

例 2.9 $A = 16$ の約数 $= \{1, 2, 4, 8, 16\}$

$b \succeq a$ を " b は a の倍数" と定めれば A は全順序集合

例 2.10 $A = P(\{2, 3\}) = \{2, 3\}$ の部分集合全体 $= \{\phi, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$

$b \succeq a$ を " $b \subset a$ " と定めれば A は順序集合

例 2.11 $A =$ 自然数全体

$b \succeq a$ を " $b \leq a$ " と定めれば A は全順序集合

例 2.12 $Ex 6$ $A =$ アルファベット全体

$b \succeq a$ を " b はアルファベット順で a と同じか後" と定めれば A は順序集合

例 2.13 $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ を $x_1 \succeq x_2 \succeq x_3$ なる全順序集合とし、

$= \{y_1, y_2\}$ を $y_1 \succeq y_2$ なる全順序集合とする。

$A = X \times$

$(a, b) \succeq (a', b')$ を " $a \neq a'$ で $a \succeq a'$ または $a = a'$ で $b \succeq b'$ " と定めれば A

は全順序集合

2.2.2

$f: A \rightarrow A$ を A 上の順序関係とする。順序関係は

$$b \succeq a \text{ を } \begin{array}{c} b \\ | \\ a \end{array}$$

と図示すると理解しやすい。ただし、 $b \succeq c, c \succeq a$ なる $c \neq a, b$ が存在するときは b と a は結ばないことにする。すなわち直前、直後の要素と結ぶ。

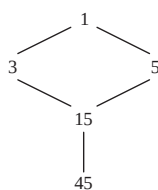


図 2.9:

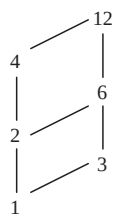


図 2.10:



図 2.11:

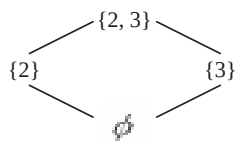


図 2.12:



図 2.13:

$$\begin{array}{c} Z \\ | \\ Y \\ | \\ \vdots \\ | \\ C \\ | \\ B \\ | \\ A \end{array}$$

図 2.14:

$$\begin{array}{c} \{x_3, y_2\} \\ | \\ \{x_3, y_1\} \\ | \\ \{x_2, y_2\} \\ | \\ \{x_3, y_1\} \\ | \\ \{x_1, y_2\} \\ | \\ \{x_1, y_1\} \end{array}$$

図 2.15:

2.3 同値関係

2.3.1

A 上の関係 $f: A \rightarrow A$ が次の条件をみたしているとき、 f を 同値関係 という。

- (1) $\forall a \in A$ に対し $a = f(a)$ (反射律)
- (2) $b = f(a) \Rightarrow a = f(b)$ (対称律)
- (3) $b = f(a), c = f(b) \Rightarrow c = f(a)$ (推移律)

$f: A \rightarrow A$ が同値関係のとき、 $b = f(a)$ を $a \sim b$ とかく。

$f: A \rightarrow A$ が同値関係のとき、 $A \ni a$ に対して A の部分集合

$$[a] = \{x \in A; x \sim a\}$$

を a の 同値類 といい、 a をその代表元という。また同値類の全体を、同値関係 $\sim$ による A の 商 といい、 $A/\sim$ と記す。すなわち

$$A/\sim = \{[a]; a \in A\}$$

例 2.14 $A =$ 整数の全体

$a \sim b$ を “ $a \Leftrightarrow b$ は 3 の倍数” と定めると、 $\sim$ は同値関係

$$[0] = \{3n; n \text{ は整数}\}$$

$$[1] = \{3n + 1; n \text{ は整数}\}$$

$$[2] = \{3n + 2; n \text{ は整数}\}$$

$$A/\sim = \{[0], [1], [2]\}$$

例 2.15 $A =$ 動物全体

$a \sim b$ を “ a と b は同じ xxx ” と定めると、 $\sim$ は同値関係

$$A/\sim = \{[すずめ], [さる], [さんま], [へび], [わに]\}$$

勿論、 $[さる] = [\text{人間}] = [\text{くま}]$ であり、生物学ではこの部分集合を “ほ乳類” と呼ぶ。

2.3.2

$P(A)$ を集合 A の部分集合の全体とする。 $\Omega \subset P(A)$ が次の性質を満たすとき、 Ω を A の 分割 という。

1. $\Omega \not\subset \phi$
2. $\Omega \ni S, T, S \neq T \Rightarrow S \cap T = \phi$
3. $A = \bigcup_{S \in \Omega} S$

$f: A \rightarrow A$ なる A 上の同値類が与えられたとき、 $A/\sim$ は A の分割を与える。すなわち

$$A = \bigcup_{[a] \in A/\sim} [a]$$

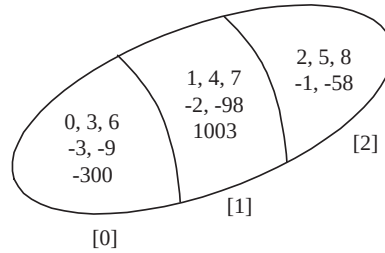


図 2.16: $A = [0] \cup [1] \cup [2]$

図 2.17: $A = [\text{すずめ}] \cup [\text{さる}] \cup [\text{へび}] \cup [\text{わに}] \cup [\text{さんま}]$

2.4 関係の合成と逆

□ 合成

$f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$ なる 2 つの関係が与えられているとする。このとき

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

なる関係を

$$c = g \circ f(a) \Leftrightarrow \exists b \in B \text{ s.t. } b = f(a), c = g(b)$$

で定める。この $g \circ f$ を f と g の 合成 という。

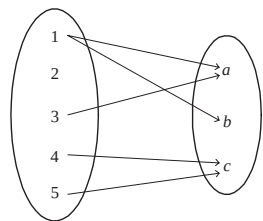
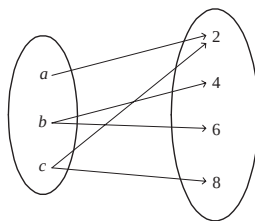
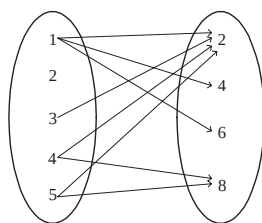
例 2.16 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, B = \{a, b, c\}, C = \{2, 4, 6, 8\}$

$$f: A \rightarrow B \quad f(1) = a, f(2) = b, f(3) = a, f(4) = c, f(5) = c$$

$$g: B \rightarrow C \quad g(a) = 2, g(b) = 4, g(c) = 6, g(c) = 8$$

とすると

$$g \circ f : A \rightarrow C \text{ は } \begin{aligned} g \circ f(1) &= 2, g \circ f(1) = 4, g \circ f(1) = 6, g \circ f(3) = 2, \\ g \circ f(4) &= 2, g \circ f(4) = 8, g \circ f(5) = 2, g \circ f(5) = 8 \end{aligned}$$

図 2.18: f 図 2.19: g 図 2.20: $g \circ f$

□ 逆

$f : A \rightarrow B$ なる関係が与えられている。このとき

$$f^{-1} : B \rightarrow A$$

なる関係を

$$a = f^{-1}(b) \Leftrightarrow f(a) = b$$

と定める。 f^{-1} を f の逆という。

例 2.17 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{x, y, z\}$

$$f : A \rightarrow B \quad f(1) = x, f(1) = y, f(3) = z, f(3) = z, f(4) = z, f(5) = x$$

のとき

$$f^{-1} : B \rightarrow A \quad f^{-1}(x) = 1, f^{-1}(x) = 3, f^{-1}(x) = 5, f^{-1}(y) = 1, f^{-1}(z) = 2, f^{-1}(z) = 3$$

2.5 全射、単射

□ 全射

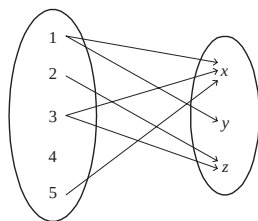
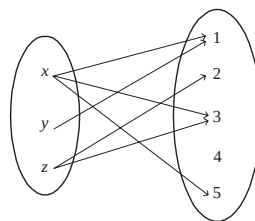
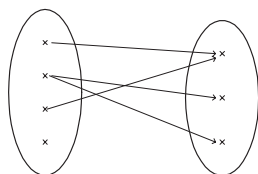
図 2.21: f 図 2.22: f^{-1} 

図 2.23: 全射

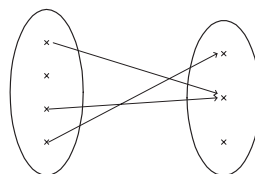


図 2.24: 全射でない

$f: A \rightarrow B$ なる関係が与えられている。 f が次の条件を満たすとき 全射、上への関係 などという。

$$\forall b \in B \text{ に対して } \exists a \text{ s.t. } b = f(a)$$

□ 単射

$f: A \rightarrow B$ なる関係が与えられている。 f が次の条件を満たすとき 単射、1対1の関係 などという。

$$f(a) \text{ には } B \text{ の 1 つの要素が対応し, } f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$$

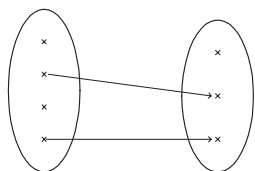


図 2.25: 単射

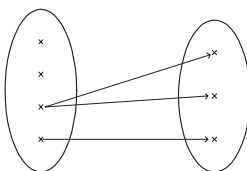


図 2.26: 単射でない

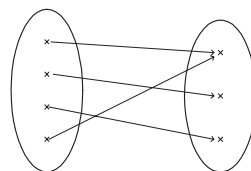


図 2.27: 単射でない

単射の逆は単射である。

□ 全単射

全射かつ単射の時、全単射、双射 などという。

問 2.1 $A = B = \mathbf{R}$ とし、 $f: A \rightarrow B$ を次のように定めるとき、全射、単射はどのようなになるか？グラフを書いて確かめよ。

f	全射	単射
$f(x) = ax (a > 0)$	○	○
$f(x) = x^2$	×	×
$f(x) = x^3$	○	○
$f(x) = \pm\sqrt{x}$	○	×
$f(x) = 2^{-x}$	×	○

問 2.2 $A = B = [0, 1]$ とし、同様の問題を考えると

f	$a \geq 1$ のとき	$a < 1$ のとき
$f(x) = ax (a > 0)$	○	○
$f(x) = x^2$	○	○
$f(x) = x^3$	○	○
$f(x) = \pm\sqrt{x}$	○	○
$f(x) = 2^{-x}$	×	○

問 2.3 1. 次の写像 $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ は全射か、単射か、全単射か、そのいずれでもないか、答えよ。

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = x^3$

(c) $f(x) = e^x$

(d) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

2. 全単射 $f: (\Leftrightarrow\pi, \pi) \rightarrow \mathbf{R}$ を作れ

3. 全単射 $f: (a_1, b_1) \rightarrow (a_2, b_2), (a_1 < b_1, a_2 < b_2)$ を作れ

4. 全単射 $f: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ を作れ

2.5.1 可算集合と非可算集合

例 2.18 全単射 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ が存在する

(証明) $f(n) \equiv (\Leftrightarrow 1)^n \lceil \frac{n}{2} \rceil (n \in \mathbf{N})$ ここに $\lceil \cdot \rceil$ はガウス記号で $n \leq a < n+1$ なる a について $\lceil a \rceil = n$

1	2	3	4	5	6	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	
0	1	$\Leftrightarrow 1$	2	$\Leftrightarrow 2$	3	...

例 2.19 全単射 $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$ が存在する

(証明) まず全単射 $\varphi: \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ を $\varphi(m, n) \equiv \frac{1}{2}(m+n \Leftrightarrow 2)(m+n \Leftrightarrow 1) + n, ((m, n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N})$

$$\varphi(1, 1) = 1, \varphi(1, 2) = 2, \varphi(2, 1) = 3, \varphi(1, 3) = 4, \dots$$

$$\varphi(2, 2) = 5, \varphi(3, 1) = 6, \varphi(1, 4) = 7, \dots$$

で構成する。次に $\mathbf{Q}^+ \equiv \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbf{N}\}$ とおき、全射 $\psi : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}^+$ を $\psi(m, n) \equiv \frac{m}{n}$ で構成し、さらに全単射 $\Psi : \mathbf{Q}^+ \rightarrow \mathbf{Q}$ を $\mathbf{Q}^+ = \{a_1, a_2, \dots\}$ とするとき、 $\mathbf{Q} = \{0, \pm a_1, \pm a_2, \dots\}$ と表せるから

$$\begin{array}{cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ \Psi & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ & 0 & +a_1 & \Leftrightarrow a_2 & \cdots \end{array}$$

を構成でき、このとき、 $f \equiv \Psi \circ \psi \circ \varphi^{-1} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Q}$ は全射となる。(証明終り)

例 2.20 全射 $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ は存在しない。

(証明：Cantor の対角線論法)

$\varphi : (0, 1) \rightarrow \mathbf{R}$ を $\varphi(x) \equiv \tan \pi(x \Leftrightarrow \frac{1}{2})$, $((x \in (0, 1)))$ で定めると φ は全単射となるから、全射 $f : \mathbf{N} \rightarrow I \equiv (0, 1)$ が存在しないことを示せばよい。もし、全射 $f : \mathbf{N} \rightarrow I$ があると仮定すると、 $I = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ と書ける。各 $x_n \in I$ を無限小数に展開して、

$$\begin{array}{lcl} x_1 & = & 0.x_{11}x_{12}x_{13}\cdots \\ x_2 & = & 0.x_{21}x_{22}x_{23}\cdots \\ x_3 & = & 0.x_{31}x_{32}x_{33}\cdots \\ & \vdots & \end{array}$$

とする。ただし、有限小数も 9 が無限に続く無限小数で表す。このとき $y_1 = 0.y_1y_2y_3\cdots$ なる無限小数を $1 \leq y_k \leq 9, y_k \neq x_{kk}, y_k \neq y_{k+1} (k \in \mathbf{N})$ で定めると、明らかに $y \in I$ であるが、 y と x_n は小数第 n 位が等しくないから、 $y \neq x_n (n \in \mathbf{N})$ となり、これより $y \notin I$ となり矛盾。よって $f : \mathbf{N} \rightarrow I \equiv (0, 1)$ なる全射は存在しない。(証明終り)

定理 2.1 (Cantor の定理) A を集合とする。このとき、全射 $f : A \rightarrow 2^A$ は存在しない。従って、 A から 2^A への全単射は存在しない。

全射 $f : A \rightarrow 2^A$ が存在したと仮定すると、 $X, \quad \in 2^A$ を $X = \{a \in A | a \notin f(a)\}$, $\quad = \{a \in A | a \in f(a)\}$ このとき $X \cup \quad = A$ かつ $X \cap \quad = \phi$ このとき、ある $b \in A$ が存在して、 $f(b) = X = \{a \in A | a \notin f(a)\}$ となることはありえない。なぜなら、 $b \in X = \{a \in A | a \notin f(a)\}$ ならば $b \notin f(b)$ 、よって $f(b) \neq X$ $b \in \quad = \{a \in A | a \in f(a)\}$ ならば $b \in f(b)$ 、よって $f(b) \neq X$ したがって $f(b) \neq X$ よって矛盾なので全射は存在しない。(証明終り)

定理 2.2 (系) 全射 $f : \mathbf{N} \rightarrow 2^{\mathbf{N}}$ は存在しない。したがって $\mathbf{N}$ から $a^{\mathbf{N}}$ への全単射は存在しない。

2.6 演算

集合演算として $A \cup B, A \cap B, A^c$ などを勉強したが、このような演算も関係の例として考えることができる。

□ 集合演算

$P(U)$ = 全体集合 U の部分集合全体

$P(U) \times P(U) = P(U)$ と $P(U)$ の直積集合

(1) $f : P(U) \times P(U) \rightarrow P(U)$

$$f(A, B) = A \cup B$$

(2) $f : P(U) \times P(U) \rightarrow P(U)$

$$f(A, B) = A \cap B$$

(3) $f : P(U) \rightarrow P(U)$

$$f(A) = A^c$$

□ 数の空間 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ などにおける四則演算も同様に関係として考えることができる。

□ 微分、積分などの作用素も関数空間の間関係である

□ 行列の四則演算、行列式なども関係と考えることができる。

例 2.21 $M_2(\mathbf{R}) = 2 \times 2$ の実行列全体

$\det : M_2(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

例 2.22 $P(t)$ = 変数 t の多項式全体

$\frac{d}{dt} : P(t) \rightarrow P(t)$

$$\frac{d}{dt} P(t) = P'(t)$$

第3章 命題論理

3.1 命題と命題関数

定義 3.1 真か偽のいずれかである叙述（文章、式など）を 命題 という。
命題 p が真（偽）であるとき、 p は 真（偽）な命題 である、または、命題 p が成り立つ（成り立たない）という。

定義 3.2 集合 U を動く変数 x を含む文 $p(x)$ で、 x に U の各要素 a を代入すると、 $p(a)$ の真偽が定まるとき、 $p(x)$ を U の上の 命題関数 という。
 $p(x)$ が U の上の命題関数のとき、 $p(x)$ が真であるような x 全体の集合

$$T_p = \{x \mid x \in U, p(x) \text{ が真} \}$$

を $p(x)$ の 真理集合 という。

例 3.1

1. “ $1 + 2 = 5$ ” は偽な命題。
2. “東京は日本の首都” は真な命題。
3. “あなたはどこに行きますか” は命題でない。
4. $U = \mathbf{R}$ として “ $x^2 > 0$ ” は $\mathbf{R}$ 上の命題関数で真理集合は $\{x \mid x \neq 0\}$ 。
5. “ $\forall x \in \mathbf{R}$ に対し、 $x^2 > 0$ ” は偽な命題。
6. “ $\exists x \in \mathbf{R} \text{ s.t. } x^2 > 0$ ” は真な命題。

3.2

2. 論理和 $p \vee q, p + q$

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

(表2)

3. 論理積 $p \wedge q, p \cdot q$

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

(表3)

4. 含意 $p \implies q$

p	q	$p \implies q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

(表4)

Remark

これらの定義に現れた(表1)～(表4)等を 真理表 という。

例 3.2 次の各命題の真理表をつくれ。

1. $(p \wedge q) \implies \sim q$
2. $(\sim p \vee q) \implies p$
3. $[(p \implies q) \wedge (q \implies r)] \implies (p \implies r)$

(解)

1.	p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \implies \sim q$
	T	T	F	T	F
	T	F	T	F	T
	F	T	F	F	T
	F	F	T	F	T

2.	p	q	$(\sim p \vee q)$	$\implies$	p
	T	T	F	T	T
	T	F	F	T	T
	F	T	T	F	F
	F	F	T	F	F

3.	p	q	r	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow r$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow r$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \implies (p \Rightarrow r)$
	T	T	T	T	T	T	T	T
	T	T	F	T	F	F	F	T
	T	F	T	F	T	F	T	T
	T	F	F	F	T	F	F	T
	F	T	T	T	T	T	T	T
	F	T	F	T	F	F	T	T
	F	F	T	T	T	T	T	T
	F	F	F	T	T	T	T	T

Remark

複合命題の真理値が常に T であるとき、この複合命題を 恒真命題 といい、 t で表す。一方、真理値が常に F である複合命題を 矛盾命題 といい、 f で表す。

例 3.3 $(p \implies q) \wedge (q \implies p)$ の真理表を作れ。

(解)

p	q	$(p \Rightarrow q)$	$\wedge$	$(q \Rightarrow p)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

$(p \implies q) \wedge (q \implies p)$ は p, q の真偽が一致するとき、そのときに限り真となる。

定義 3.3 複合命題 P, Q において、 $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ が恒真命題になるとき (P と Q の真偽値が一致するとき) P, Q は 同値 であるといい、 $P \equiv Q$ とかく。

定義 3.4 命題 “ $p \Rightarrow q$ ” に対し、命題 “ $q \Rightarrow p$ ” を 逆、 “ $\sim p \Rightarrow \sim q$ ” を 裏、 “ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ” を 対偶 という。

例 3.4 $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$, $(q \Rightarrow p) \equiv (\sim p \Rightarrow \sim q)$, $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

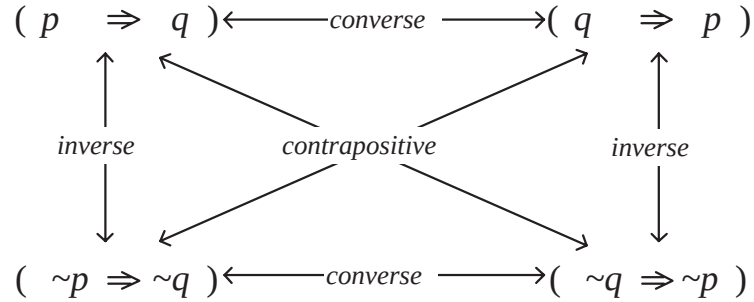


図 3.1: 逆, 裏, 対偶

例 3.5 $p(x)$, $q(x)$: U 上の命題関数

T_p , T_q : $p(x)$, $q(x)$ の真理集合

このとき、 $T_{\sim p} = T_p^c$, $T_{p \vee q} = T_p \cup T_q$, $T_{p \wedge q} = T_p \cap T_q$, $T_{p \Rightarrow q} = T_p^c \cup T_q$

例 3.6 $U = \mathbf{R}$ として、次の命題関数の真理集合を求めよ。

1. $P(x)$: “ $x > 0 \vee x^2 < 3$ ”
2. $Q(x)$: “ $x^2 + x \Leftrightarrow 6 = 0 \wedge x < 0$ ”
3. $R(x)$: “ $x > 0 \Rightarrow x^2 < 3$ ”

(解)

1. $T_P = \{x \mid x > 0 \vee \Leftrightarrow \sqrt{3} < x < \sqrt{3}\} = \{x \mid \Leftrightarrow \sqrt{3} < x\}$
2. $T_Q = \{x \mid (x = \Leftrightarrow 3 \vee x = 2) \wedge x < 0\} = \{\Leftrightarrow 3\}$
3. $T_R = \{x \mid (x > 0 \wedge (\Leftrightarrow \sqrt{3} < x < \sqrt{3})) \vee x \leq 0\} = \{x \mid x < \sqrt{3}\}$

3.3 命題代数

命題 3.1 論理演算は次の性質をみたす。

1. $p \vee q \equiv q \vee p$, $p \wedge q \equiv q \wedge p$ (交換律)
2. $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$, $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ (結合律)
3. $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$, $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (分配律)
4. $p \vee f \equiv p$, $p \wedge t \equiv p$, $p \vee t \equiv t$, $p \wedge f \equiv f$ (同一律)

5. $p \vee \sim p \equiv t$, $p \wedge \sim p \equiv f$, $\sim t \equiv f$, $\sim f \equiv t$ (補元律)
6. $p \vee p \equiv p$, $p \wedge p \equiv p$ (中等律)
7. $\sim \sim p \equiv p$ (対合律)
8. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$, $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ (ド・モルガン則)
9. $(p \vee q) \wedge p \equiv p$, $(p \wedge q) \vee p \equiv p$ (吸収律)

例 3.7 次の同値性を真理表による方法と、代数計算による方法の二通りで示せ。

$$\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

(解)

1. 真理表

p	q	$\sim p$	$\sim$	$(p \vee q)$	$\vee$	$(\sim p \wedge q)$
T	T	F	F	T	T	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T	T

2. 代数計算

$$\begin{aligned}
 & \sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \\
 \equiv & (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) && \text{ド・モルガン} \\
 \equiv & \sim p \wedge (\sim q \vee q) && \text{分配律} \\
 \equiv & \sim p \wedge t && \text{補元律} \\
 \equiv & \sim p && \text{同一律}
 \end{aligned}$$

問 3.1 p を “暑い” q を “雨が降っている” として次の文章を書け。

1. $\sim p$
2. $p \wedge q$
3. $p \vee q$
4. $p \implies q$
5. $\sim \sim q$

問 3.2 次の各命題の真理表を作れ。

1. $p \vee \sim q$
2. $\sim p \wedge q$
3. $p \vee (p \implies q)$
4. $(p \implies q) \implies r$
5. $(\sim p \wedge q) \vee \sim r$

問 3.3 “ $\wedge$ ”と“ $\sim$ ”を用いて、次の命題を書き換えよ。

1. $p \vee q$

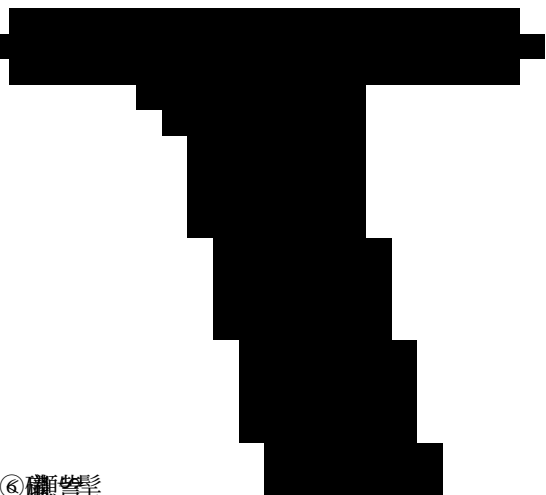
2. $p \implies q$

3. $p \implies \sim q$

4. $(p \implies q) \vee p$

5. $\sim p \vee (q \vee \sim p)$

問 3.4 次の同値性を真理表による方法と、代数計算による方法の二通りで
よ



例 3.11 次の各命題の否定を “でない” の語を用いしないで述べよ。

1. すべての実数 x について、 $x^2 < 1$ である。
2. $x^2 \leq 0$ であるような実数 x が存在する。
3. $a \leq 4$ ならば、 $x^2 + 4x + a = 0$ をみたす実数 x が存在する。

(解)

1. $p(x) := “x^2 < 1”$ とすると、 $\forall x, p(x)$ の否定より
 $\sim (\forall x, p(x)) \equiv \exists x, \sim p(x) \quad \sim p(x) = “x^2 \geq 1”$
 よって、 “ $x^2 \geq 1$ である実数 x が存在する ”
2. $p(x) := “x^2 \leq 0”$ とすると、 $\exists x, p(x)$ の否定より
 $\sim (\exists x, p(x)) \equiv \forall x, \sim p(x) \quad \sim p(x) = “x^2 > 0”$
 よって、 “すべての実数 x について、 $x^2 > 0$ である ”
3. $p(a) := “a \leq 4”$, $q(a) := “\exists x, x^2 + 4x + a = 0”$ とすると、
 $\forall a, (p(a) \Rightarrow q(a))$ の否定より、
 $\sim [\forall a, (p(a) \Rightarrow q(a))] \equiv \exists a, \sim (p(a) \Rightarrow q(a)) \equiv \exists a, p(a) \wedge \sim q(a)$
 よって、 “ $a \leq 4$ であって、かつすべての実数 x に対し、 $x^2 + 4x + a \neq 0$ であるような a が存在する ”

3.5 必要条件と十分条件

定義 3.6 $p(x), q(x)$: 集合 U 上の命題関数 (U 上の条件)

命題 “ $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x))$ ” が真であるとき、 $q(x)$ を $p(x)$ であるための 必要条件、 $p(x)$ を $q(x)$ であるための 十分条件 という。

$q(x)$ が $p(x)$ であるための必要条件でも十分条件でもあるとき、 $q(x)$ を $p(x)$ であるための 必要十分条件 という。

このとき、 $p(x)$ と $q(x)$ は 同値な条件 であるともいわれ、 “ $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \wedge (q(x) \Rightarrow p(x))$ ” を “ $\forall x, (p(x) \Leftrightarrow q(x))$ ” または “ $(p(x) \Leftrightarrow q(x))$ ” とかく。

例 3.12 $U = \mathbf{R}$ のとき、

1. $x < 1$ は $x^2 < 1$ であるための必要条件であるが十分条件でない。
2. $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$ は $x^2 < 1$ であるための十分条件であるが必要条件でない。
3. $x^3 + 1 > 0 \wedge x^3 \Leftrightarrow 1 < 0$ は $x^2 < 1$ であるための必要十分条件である。

例 3.13 T_p, T_q を命題関数 $p(x), q(x)$ の真理集合とする。

1. $\forall x, (p(x) \Rightarrow q(x)) \equiv T_p \subset T_q$
2. $\forall x, (p(x) \Leftrightarrow q(x)) \equiv T_p = T_q$

例 3.14 x, a を実数とする。

$[\forall x, (x > a \Rightarrow x^2 > a^2)]$ が成り立つための、 a に関する必要十分条件 (a の範囲) を求めよ。

(解) $F(a) := [\forall x, (x > a \Rightarrow x^2 > a^2)]$, $G(a) := (a \geq 0)$ とおく。

$\forall a, (G(a) \Rightarrow F(a))$ が成り立つことは明らか。

$\sim G(a) : (a < 0)$, $\sim F(a) : [\exists x, (x > a \wedge x^2 \leq a^2)]$ であり、

$\forall a, (\sim G(a) \Rightarrow \sim F(a))$ が成り立つことは、 $x = 0$ ととればわかる。対偶をとることによって、

$\forall a, (F(a) \Rightarrow G(a))$ が成り立つ。

以上より $G(a)$ は $F(a)$ であるための必要十分条件である。

3.6 数学的帰納法

$P(n)$: $\mathbf{N}$ 上の命題関数

命題「 $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$ 」が真なことを証明する一方法として、数学的帰納法がある。それは次の二段階よりなる。

第 I 段階 「 $P(1)$ が真」なことを証明する。

第 II 段階 「 $\forall k \in \mathbf{N}$ に対し、 $P(1), P(2), \dots, P(k)$ がすべて真と仮定すると、 $P(k+1)$ が真」なことを証明する。

以上のとき、「 $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$ 」は真となる。

それは、I より $P(1)$ は真 ... (I)
 II で $k = 1$ として、(I) を用いると、 $P(2)$ が真 ... (II)₁
 II で $k = 2$ として、(I), (II)₁ を用いると、 $P(3)$ が真 ... (II)₂
 II で $k = 3$ として、(I), (II)₁, (II)₂ を用いると、 $P(4)$ が真 ... (II)₃

以下同様に進めばよい。

例 3.15

1. $P(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $P(n) : 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

[証]

$= P(k+1)$ の右辺

よって、 $P(k+1)$ は真。

2. 各自試せ。

問 3.7 次の事柄を示せ。

1. $\forall x, p(x) \equiv T_p^c = \emptyset$
2. $\exists x, p(x) \equiv T_p \neq \emptyset$
3. $\forall x, \sim p(x) \equiv T_p = \emptyset$
4. $\exists x, \sim p(x) \equiv T_p^c \neq \emptyset$
5. $\sim (\forall x, p(x)) \equiv T_p^c \neq \emptyset$
6. $\sim (\exists x, p(x)) \equiv T_p = \emptyset$

問 3.8 次の事柄を示せ。ただし、 $p(x, y)$ は x, y に関する命題関数とする。

1. $\sim [\forall x, (\exists y, p(x, y))] \equiv \exists x, (\forall y, \sim p(x, y))$
2. $\sim [\exists x, (\forall y, p(x, y))] \equiv \forall x, (\exists y, \sim p(x, y))$

問 3.9 次の否定命題を “でない” の語を用いなくて述べよ。

1. $\sim [\forall x, (\exists y, (x > y) \vee (x < \Leftrightarrow y))]$
2. $\sim [(\forall c > 0, c \in \mathbf{R}), (\exists n \in \mathbf{N}, c > \varphi(n))]$

問 3.10 次の命題を $\sim$ を用いなくて記せ。

$\sim [\forall \epsilon > 0, \{\exists m \in \mathbf{N}, (\forall n \in \mathbf{N}, ((n > m) \Rightarrow |a_n - \alpha| < \epsilon))\}]$

問 3.11 $U = \mathbf{R}$ とする。

$p(x) := “x^2 < 1”$ のとき、次の各 $q(x)$ は $p(x)$ であるための何条件か。

1. $q(x) := “x < 2”$
2. $q(x) := “x < 0”$
3. $q(x) := “x < 0 \wedge x \geq \frac{1}{2}”$
4. $q(x) := “(\Leftrightarrow 1 < x < 1) \vee (2x^2 \Leftrightarrow 1 = 0)”$

問 3.12

1. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ (n : 自然数) が成り立つことを数学的帰納法で示せ。
2. 命題 $P(n)$ に関し、
 - (a) $P(1), P(2)$ は真
 - (b) $k (\geq 1)$ を任意の自然数として、 $P(k), P(k+1), P(k+2)$ が真のとき、 $P(k+3)$ が真
 - (a),(b) が証明されたとき、「 $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$ 」は真といえるか。

問 3.13 $t = x + \frac{1}{x}$ とする。 $\mathbf{N} \ni n$ に対し、
 $P(x) : x^n + \frac{1}{x^n}$ は t の n 次式で表される とするとき、
「 $\forall n \in \mathbf{N}, P(n)$ 」は真であることを示せ。

第4章 順序と束

4.1 順序と全順序

定義 4.1 集合 S 上の関係 R が

1. 反射律 $S \ni \forall a$ に対し aRa
2. 反対称律 $aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
3. 推移律 $aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$

をみたすとき、 R を 順序関係、 S を 順序集合 という。

例 4.1

1. $S =$ 集合 U の部分集合の族 $\ni A, B$
 $ARB := A \subset B$ (包含関係), S は順序集合
2. $S = \mathbf{N} \ni a, b$
 $aRb := a \mid b$ (b は a の倍数 (整除関係)), S は順序集合
3. $S = \mathbf{N} \ni a, b$
 $aRb := a \leq b$, S は順序集合

定義 4.2 順序関係を $\preceq$ とかき、 $a \preceq b$ のとき “ a は b の前にある” とか “ b は a の後ろにある” 等という。また、 $a \preceq b$ かつ $a \neq b$ のとき、 $a \prec b$ とかく。
 $a \preceq b$ または $b \preceq a$ が成り立つとき、 a と b は 比較可能 という。

定義 4.3 順序集合 S において、 $S \ni \forall a, \forall b$ に対し、
 $a \preceq b$ または $b \preceq a$ が成り立つとき、 S は 全順序集合 という。

例 4.2

1. $S = \mathbf{N}$ において、 $aRb := a \leq b$ は全順序
2. $S = \{2, 8, 32, 4\}$, $aRb := a \mid b$ は全順序
3. S, T : 全順序集合
 $S \times T \ni (a, b), (a', b')$ に対し、
 $(a, b) \prec (a', b') := a \prec a'$ または $a = a' \wedge b \prec b'$ と定めると、 $\preceq$ は
 $S \times T$ の全順序となる。この順序を 辞書式順序 という。

4.2 ハッセの図式

定義 4.4 S : 順序集合

$a \prec b$ であって、 $a \prec x \prec b$ となる x が存在しないとき、 $a \ll b$ とかき、 a は b の 直前にある、または b は a の 直後にある という。

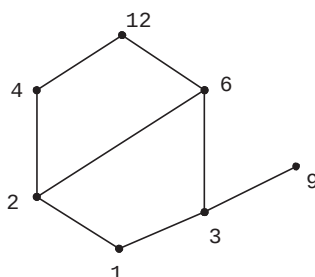
定義 4.5 S : 有限順序集合

S の要素を頂点とし、 $a \ll b$ のとき、 b を a より上にかいて a, b を線で結ぶ (あるいは、 $a \ll b$ のとき、 a から b に向かう有向線分をかく)。

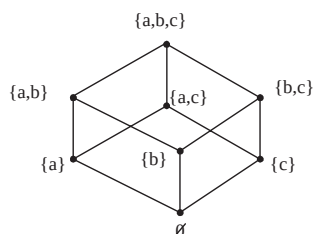
このような点と線からできる図形をハッセの図式という。

例 4.3

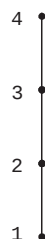
1. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12\}$ 上の整除順序によるハッセ図式



2. $U = \{a, b, c\}$ の中集合 $B = P(U)$ 上の包含関係によるハッセ図式



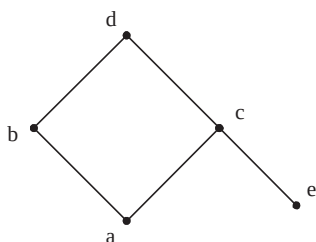
3. $C = \{1, 2, 3, 4\}$ 上の普通の順序 $\leq$ によるハッセ図式



全順序のハッセ図式は垂直線上に点が並ぶ。

4. $D = \{a, b, c, d, e\}$ につき、次のハッセ図式は D 上の順序を定義する。

$a \preceq a, a \preceq b, a \preceq d, a \preceq c, b \preceq b, b \preceq d, c \preceq c, c \preceq d, e \preceq e, e \preceq c, e \preceq d$



4.3 極大元と極小元

定義 4.6 S : 順序集合

$S \ni a$ が S の 極大 (小) 元 とは、 a の後 (前) に要素が存在しないこと、

i.e. $a \preceq x (x \preceq a) \Rightarrow x = a$

が成り立つことである。

例 4.4 *Example ??* での極大元、極小元

1. $\max.\text{ele.} = 9 \text{ or } 12 \quad \min.\text{ele.} = 1$
2. $\max.\text{ele.} = \{a, b, c\} \quad \min.\text{ele.} = \emptyset$
3. $\max.\text{ele.} = 4 \quad \min.\text{ele.} = 1$
4. $\max.\text{ele.} = d \quad \min.\text{ele.} = a \text{ or } e$

例 4.5 $\mathbb{N}$ 上の普通の順序では、 $\max.\text{ele.} = \text{なし}$ $\min.\text{ele.} = 1$

4.4 上限と下限

定義 4.7 S : 順序集合, $A : S$ の部分集合

$S \ni a$ が A の 上界 (下界) とは、

$A \ni \forall x$ に対し、 $x \preceq a (a \preceq x)$

が成り立つことをいう。

A のある上界 (下界) が A のすべての上界 (下界) の前 (後) にあるとき、それを A の 上限 (下限) といい、 $\sup A$ ($\inf A$) とかく。

例 4.6 *Example ??* での、 $\inf$ と $\sup$

1. $\inf A = 1$, $\sup A = \text{なし}$
2. $\inf B = \emptyset$, $\sup B = \{a, b, c\}$
3. $\inf C = 1$, $\sup C = 4$
4. $\inf D = \text{なし}$, $\sup D = d$

例 4.7 $S = \mathbf{N}$ を整除順序による順序集合とする。 $\mathbf{N} \ni a, b$ に対し、
 $G.C.M.(a, b) = a, b$ の最大公約数
 $L.C.M.(a, b) = a, b$ の最小公約数
 このとき、 $\inf\{a, b\} = G.C.M.(a, b)$, $\sup\{a, b\} = L.C.M.(a, b)$ である。

4.5 束

定義 4.8 L : 交わり $\wedge$, 結び $\vee$ の演算で閉じている空でない集合 L が次の公理を満たすとき、束 という。

$$\begin{aligned}
 (L_1) \text{ 交換律} \quad & a \wedge b = b \wedge a & a \vee b &= b \vee a \\
 (L_2) \text{ 結合律} \quad & (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) & (a \vee b) \vee c &= a \vee (b \vee c) \\
 (L_3) \text{ 吸収律} \quad & a \wedge (a \vee b) = a & a \vee (a \wedge b) &= a
 \end{aligned}$$

束における命題の 双対 とは、その命題に含まれる $\wedge$ と $\vee$ を入れ換えてできる命題である。

命題 4.1 (双対原理) 束において、ある命題が真のとき、その双対も真である。

例 4.8 $(a \wedge b) \vee a = a \wedge (b \vee a)$ の双対は、 $(a \vee b) \wedge a = a \vee (b \wedge a)$

例 4.9 束においては、 $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$ (巾等律) が成り立つ。

(解)
$$\begin{aligned}
 & a \wedge a \\
 &= a \wedge (a \vee (a \wedge b)) \quad (L_3) \\
 &= a \quad (L_3) \text{ で } b \text{ の代わりに } a \wedge b \text{ とおく}
 \end{aligned}$$
 後の方は、上の双対をとればよい。

例 4.10 L を束とする。

$$a \preceq b := a \wedge b = a \quad (\Leftrightarrow a \vee b = b)$$

このとき、 $\preceq$ は L 上の順序である。また、 $L \ni \forall a, \forall b$ に対し、 $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$ である。

(解) $\preceq$ が反射律、反対称律をみたすことは明らか。

推移律については、

$$a \preceq b, b \preceq c \text{ とする。} \quad i.e. \quad a \wedge b = a, b \wedge c = b$$

このとき、 $a \wedge c = (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) = a \wedge b = a$ より $a \preceq c$

よって、 $\preceq$ は L 上の順序

$(a \wedge b) \wedge a = a \wedge (b \wedge a) = a \wedge (a \wedge b) = (a \wedge a) \wedge b \stackrel{Exp.??}{=} a \wedge b$ より $a \wedge b \preceq a$

$(a \wedge b) \wedge b = a \wedge (b \wedge b) \stackrel{Exp.??}{=} a \wedge b$ より $a \wedge b \preceq b$

故に、 $a \wedge b$ は $\{a, b\}$ の下界。

c を $\{a, b\}$ の任意の下界 *i.e.* $c \preceq a$, $c \preceq b$ *i.e.* $c \wedge a = c$, $c \wedge b = c$ とする。

$c \wedge (a \wedge b) = (c \wedge a) \wedge b = c \wedge b = c$ より $c \preceq a \wedge b$

よって $a \wedge b = \inf\{a, b\}$. $a \vee b = \sup\{a, b\}$ も同様

Remark

この順序を 束から誘導される順序 という。

逆に、

例 4.11 P : 順序集合

$P \ni \forall a, \forall b$ に対し、 $\inf\{a, b\}$, $\sup\{a, b\}$ が存在するとする。

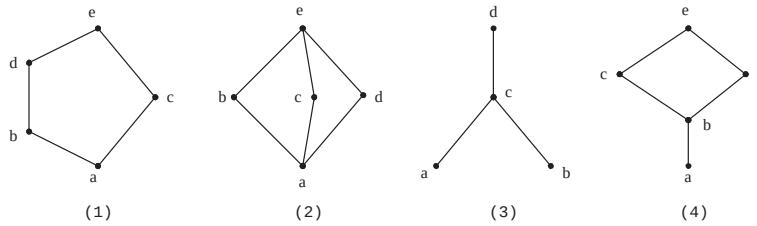
このとき、 $a \wedge b := \inf\{a, b\}$, $a \vee b := \sup\{a, b\}$ で $\wedge, \vee$ を定めると、 P は束になり、誘導される順序はもとの順序と一致する。

例 4.12 L : 線形順序集合

$L \ni \forall a, \forall b$ に対し、 $a \preceq b$ ならば、 $\inf\{a, b\} = a$, $\sup\{a, b\} = b$ であり、 $b \preceq a$ ならば、 $\inf\{a, b\} = b$, $\sup\{a, b\} = a$

よって、 L は束である。

例 4.13 次のハッセ図式のうち、束になるのはどれか。



(解) 順序集合が束になるための必要十分条件は、 $\forall x, \forall y$ に対し $\inf\{x, y\}$, $\sup\{x, y\}$ が存在することである。

(3) のみが束でない。ここでは、 $\inf\{a, b\}$ が存在しない。

問 4.1 次の集合は、整除順序で線形順序集合になるか。

1. $\{24, 2, 6\}$

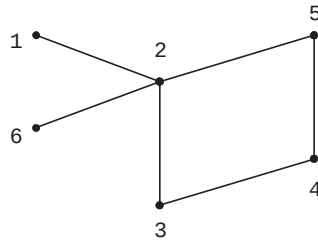
2. $\{3, 15, 5\}$
3. $\{15, 5, 30\}$
4. $\{2, 8, 32, 4\}$
5. $\{1, 2, 3, \dots\}$
6. $\{7\}$

問 4.2 次の集合上の整除順序によるハッセ図式をかけ。

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$
2. $B = \{1, 2, 3, \dots, 11, 12, 13\}$

問 4.3 $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ に次のハッセ図式で順序をつける。

1. V の極大元、極小元を求めよ。
2. 3 個以上の要素からなる線形順序の部分集合をすべて求めよ。



問 4.4 $A = \mathbf{N} \Leftrightarrow \{1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$ に整除順序を付す。
このとき、極大元、極小元を求めよ。

問 4.5 $M = \{2, 3, 4, \dots\}$ とする。 $M \times M$ 上の関係 $\preceq$ を次のように定める。

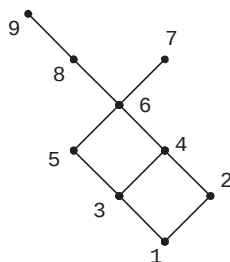
$$(a, b) \preceq (c, d) := \begin{cases} a \leq b \\ b \mid d \end{cases}$$

1. $\preceq$ は $M \times M$ 上の順序関係であることを示せ。
2. $M \times M$ の極大元、極小元を求めよ。

問 4.6 $W = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ に次のハッセ図式で順序をつける。

1. $A = \{2, 3, 5\}$ につき、
 - (a) A の上界、下界を求めよ。
 - (b) $\sup A, \inf A$ を求めよ。
2. $B = \{3, 6, 8\}$ につき、

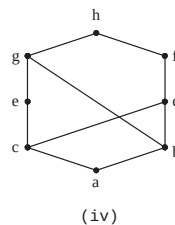
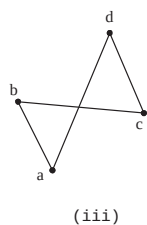
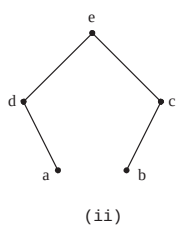
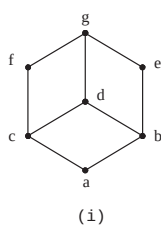
- (a) B の上界、下界を求めよ。
 (b) $\sup B$, $\inf B$ を求めよ
 3. $C = \{2, 5, 7, 8\}$ につき、
 (a) C の上界、下界を求めよ。
 (b) $\sup C$, $\inf C$ を求めよ



問 4.7 $S = \{a, b, c, d, e, f\}$ は順序集合であり、 $e \ll f$, $a \ll d$, $c \ll e$, $d \ll e$, $a \ll c$, $e \ll b$ が成り立っている。このとき、

1. S の極大元、極小元を求めよ。
2. 比較不可能な要素の対をすべて求めよ。

例 4.14 次のハッセ図式のうち、束になるものはどれか。



例 4.15 m を正の整数とし、 D_m を整除による順序のもとでの m の正の約数全体とする。

例えば、 $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

1(a) D_{12}

(b) D_{30}

(c) D_{36}

のそれぞれのハッセ図式をかけ。

2. これらはすべて束であることを示せ。

例 4.16 L が束のとき、

$$a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

が成り立つことを示せ。
また、この命題の双対を記せ。

第5章 グラフ

5.1 無向グラフ

定義 5.1 無向グラフとは、次の二つの集合 V と E の対のことである。

要素が 頂点 と呼ばれる空でない集合 V 、辺 と呼ばれる異なる 2 頂点の非順序対の集合 E

このとき、このグラフを $G(V, E)$ とかく。

辺 $e = \{u, v\}$ が存在するとき、頂点 u, v は 隣接 するといい、 u, v を e の 端点 という。

例 5.1

1. $V = \{v_1, v_2\}$, $E = \emptyset$



図 5.1:

2. $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4)\}$

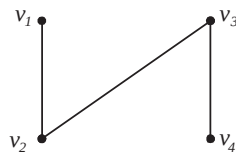


図 5.2:

3. $V = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E = \{e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_2), e_3 = (v_2, v_3), e_4 = (v_3, v_3)\}$

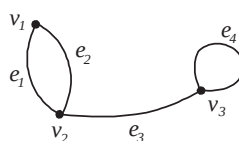


図 5.3:

Remark

$\mathcal{G}$ はグラフでないが、特に 多重グラフ と呼ぶ。
 e_1, e_2 は 多重辺 といい、 e_4 は ループ という。

定義 5.2 有限個の頂点と、有限個の辺をもつ（多重）グラフを 有限 という。

5.2 次数

定義 5.3 頂点 v が辺 e の端点であるとき、 e は v に 接続 するという。頂点 v に接続する辺の数を v の 次数 といい、 $d(v)$ で表す。 $d(v)$ が偶数、奇数に応じて、 v を 点、奇点 と呼ぶ。

命題 5.1 次数の総和 = $2 \times$ 辺の数

Remark

ループは端点の次数を 2 として数えることにする。このとき、Proposition ?? は多重グラフでも成立する。

例 5.2 次の（多重）グラフの頂点の次数を（ ）内に記入し、偶点、奇点を求めよ。

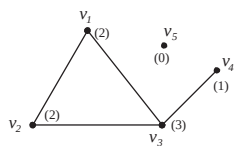


図 5.4: 奇点 $\cdots v_3, v_4$, 偶点 $\cdots v_1, v_2, v_5$

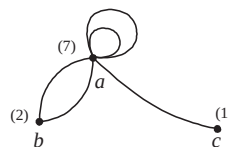


図 5.5: 奇点 $\cdots a, c$, 偶点 $\cdots b$

5.3 連結性

定義 5.4 (多重) グラフ $G(V, E)$ の頂点の列 $(v_0, v_1, \dots, v_m)$ において、 $(v_0, v_1) \in E, (v_1, v_2) \in E, \dots, (v_{m-1}, v_m) \in E$ が成り立つとき、 $(v_0, v_1, \dots, v_m)$ を v_0 から v_m への長さ m の 経路 という。 $v_0 = v_m$ のとき、閉じた経路 といい、各辺がすべてことなる閉じた経路を 回路 という。また、 $v_0 = v_m$ を除いたすべての頂点異なる長さ k の回路を k -サイクル という。

例 5.3

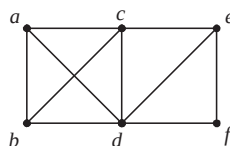


図 5.6:

(b, a, c, d, a, c, e) は b から e への長さ 6 の経路
 $(b, a, c, d, a, c, e, f, d, b)$ は辺 (a, c) を 2 回使っているので回路ではない。
 (b, a, c, d, e, f, d, b) は回路だが、 d が 2 回使われているのでサイクルではない。
 (b, a, c, d, b) は 4-サイクルである。

定義 5.5 (多重) グラフの任意の 2 点が経路で結ばれるとき、この (多重) グラフは 連結 であるという。連結でないとき、非連結 という。
 グラフ $G(V, E)$ の連結な部分グラフ H は、 H を含む $G(V, E)$ の連結部分グラフが H 自身しか存在しないとき、連結成分 といわれる。

例 5.4

1. 連結



図 5.7:

2. 非連結 (連結成分は 3 個)

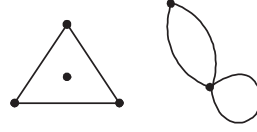


図 5.8:

5.4 隣接行列

$V = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ とする。

定義 5.6 グラフ $G(V, E)$ に対し、
 $m \times m$ 行列 $A = [a_{ij}]$ が

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

として表されるとき、 A を $G(V, E)$ の 隣接行列 という。

例 5.5 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$

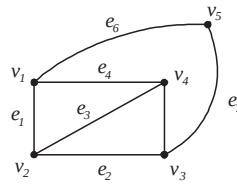


図 5.9:

に対し、 $A =$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5
v_1	0	1	0	1	1
v_2	1	0	1	1	0
v_3	0	1	0	1	1
v_4	1	1	1	0	0
v_5	1	0	1	0	0

隣接行列

例 5.6

$A =$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	に対し、
--	------

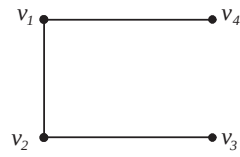


図 5.10:

Remark

多重グラフの隣接行列では、 a_{ij} には v_i と v_j を結ぶ辺の数を記入する。
 $A^2 = [b_{ij}]$ の b_{ij} は v_i と v_j を結ぶ長さ 2 の経路の数を表している。

5.5 ラベル付きグラフ

定義 5.7 グラフ $G(V, E)$ の辺あるいは頂点、またはその両方にデータが割り当てられているとき ラベル付きグラフ という。特に、各辺 e に非負数 $l(e)$ が割り当てられているとき、 $l(e)$ を辺 e の 重み という。

ラベルつきグラフでは、与えられた 2 頂点間の最短道や最長道をみつける問題は重要である。

5.6 ひと筆書きとオイラー・グラフ

例 5.7 川にかけられた七つの橋 A から G をすべて一度ずつ渡るコースを作れ。(ケーニッヒスベルグの橋渡し)

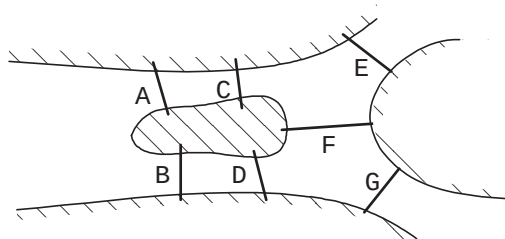


図 5.11: ケーニッヒスベルグの橋渡し

(解) 存在しない

定義 5.8 (多重) グラフにおいて、すべての辺をちょうど一回だけ通る経路(回路)を オイラー経路(回路) という。オイラー回路をもつ (多重) グラフを オイラー・グラフ という。さらに、すべての頂点を含むオイラー経路が存在する (多重) グラフを ひと筆書き可能 という。

定理 5.1 有限連結 (多重) グラフが、オイラー・グラフであるための必要十分条件は、すべての頂点が偶点なことである。

[証明]

(必要なこと) オイラー回路が頂点を一度通過するごとに次数は 2 増す。

(十分なこと) 略 (面倒 !)

系 5.1 2 個の奇点を持つ有限連結 (多重) グラフは、ひと筆書き可能で、そのオイラー経路は一方の奇点からはじまり、他の奇点で終る。

例 5.8 次のグラフはひと筆書き可能か。

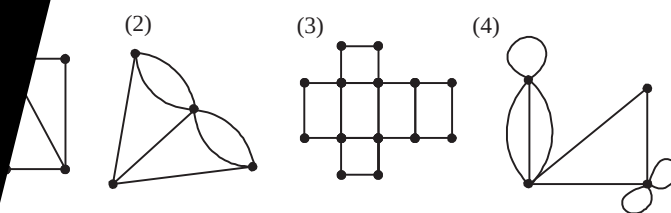


図 5.12:

(1), (2) は奇点が 4 個だから不可能、(3), (4) は奇点が 2 個だから可能。

平面グラフ

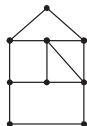
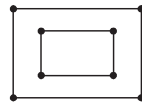
5.1 オイラーの公式

定義 5.9 辺が交差しないように平面上にかくことができる（多重）グラフを 平面的 という。

例 5.9 1. 左図は右図のようにかけるので平面的である。



図 5.13:0AAo

例 5.10 頂点、辺、面の数図 5.17: $V = 9, E = 13, R = 6$ 図 5.18: $V = 12, E = 16, R = 6$ 図 5.19: $V = 8, E = 8, R = 3$ **定理 5.2 (Euler の公式)** 連結な平面グラフにおいて、 $V \Leftrightarrow E + R = 2$

[証] 辺の数に関する数学的帰納法による。

 $P(n)$: 辺の数が n の連結平面グラフでは、 $V \Leftrightarrow E + R = 2$ $n = 0, 1, 2, \dots$ に対し、 $P(n)$ が真なことを示す。(I) $P(0)$ について、辺の数が 0 の連結平面グラフは 1 点のみ、 $V = 1, E = 0, R = 1$ より $P(0)$ は真(II) k を 0 以上の任意の整数とし、 $P(0), \dots, P(k)$ は真とする。 G を辺の数 $k+1$ の連結平面グラフとし、 G から 1 辺 PQ を除いたグラフを G' とする。1. G' が連結なとき、

$$V = V', \quad E = E' + 1, \quad R = R' + 1, \quad V' \Leftrightarrow E' + R' = 2 \text{ より} \\ V \Leftrightarrow E + R = 2$$

2. G' が非連結なとき、 P, Q をふくむ G' の連結成分を G'_1, G'_2 とする。

$$V = V', \quad E = E' + 1, \quad R = R', \quad V' = V'_1 + V'_2, \quad E' = E'_1 + E'_2, \\ R' = R'_1 + R'_2 \Leftrightarrow 1$$

$$V'_1 \Leftrightarrow E'_1 + R'_1 = 2, \quad V'_2 \Leftrightarrow E'_2 + R'_2 = 2$$

$$\text{ゆえに、} V \Leftrightarrow E + R = 2$$

定理 5.3 正多面体は正 4, 6, 8, 12, 20 面体の 5 種類に限る。

[証]

正多面体をふくらまして球面とし、一面の重心が北極点になるようにして、南極点に接する平面上に立体射影すると、平面グラフが得られる。各頂点の次数を d 、各面が正 n 角形とすると、 $d \geq 3, n \geq 3$ で、 $dV = nR = 2E$ 。これをオイラーの公式に代入して、 $\frac{2}{d} + \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{E} > 1$

(イ) $d < n$ のとき、
 $\frac{1}{d} > \frac{1}{n}$ より $1 < \frac{2}{d} + \frac{2}{n} < \frac{4}{d}$ $3 \leq d < 4$ より $d = 3$
 $\frac{2}{3} + \frac{2}{n} > 1$ より $3 = d < n < 6$ ゆえに $n = 4, 5$

(ロ) $d = n$ のとき、
 $1 < \frac{2}{d} + \frac{2}{n} = \frac{4}{d}$ より $d = n = 3$

(ハ) $d > n$ のとき、
 (イ) と同様に $n = 3$, $d = 4, 5$

以上より、

	d	n	V	E	R
(I)	3	3	4	6	4
(II)	3	4	8	12	6
(III)	4	3	6	12	8
(IV)	3	5	20	30	12
(V)	5	3	12	30	20

(II) と (III)、および (IV) と (V) は互いに d と n 、 V と R が入れ替わり、 E は等しい。

これは、正 6, 8 面体、および正 12, 20 面体が互いに他の 双対 であることを示す。

(I) は、正 4 面体が 自己双対 なことを示す。

5.8 彩色グラフ

定義 5.11 グラフ G の 頂点彩色 とは、隣接した頂点がことなる色を持つように G の頂点を塗り分けることである。

n 色が使われる G の彩色が存在するとき、 G は n -彩色可能 であるという。

G を彩色するのに必要な色の最小数を、 G の 染色数 といい、 $\chi(G)$ とかく。

例 5.11 (Welch-Powell のアルゴリズム) 次のグラフを彩色し、その染色数を求めよ。

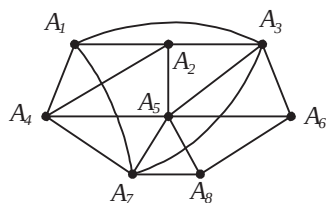


図 5.20:

1. 頂点を次数の減る順に並べる。

$A_5, A_3, A_7, A_1, A_2, A_4, A_6, A_8$

2. 赤 $\cdots A_5$ (隣接しない) A_1

黄 $\cdots A_3, A_4, A_8$

青 $\cdots A_7, A_2, A_6$

よって、3-彩色可能。

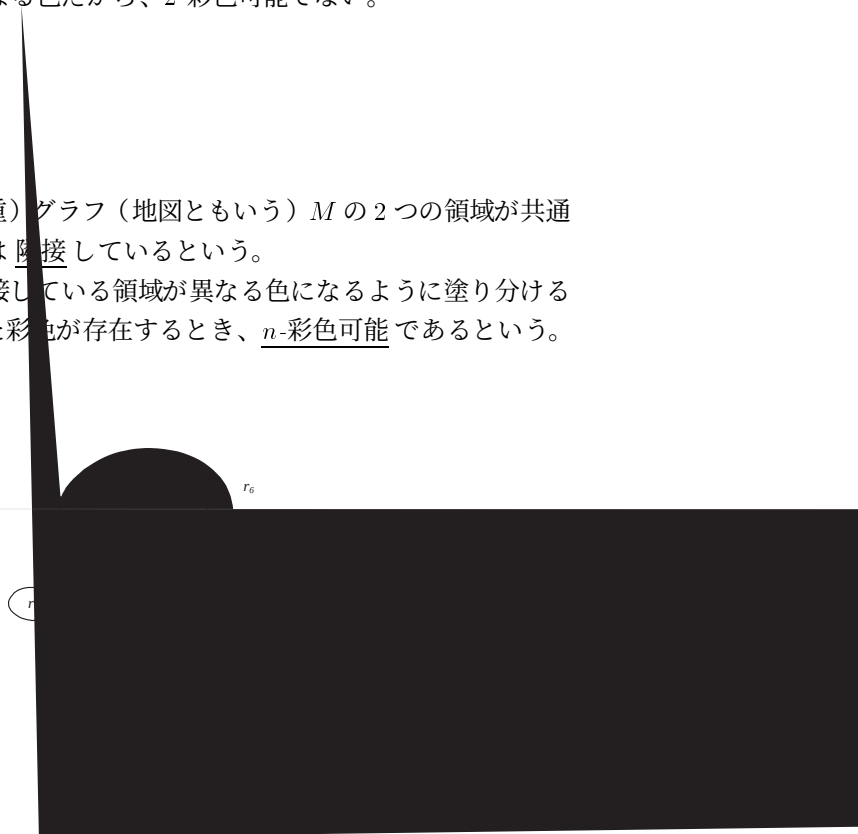
一方、 A_1, A_2, A_3 は異なる色だから、2-彩色可能でない。

ゆえに、 $\chi(G) = 3$

5.9 4色問題

定義 5.12 有限平面 (多重) グラフ (地図ともいう) M の2つの領域が共通な辺をもつとき、それらは隣接しているという。

地図 M の彩色とは、隣接している領域が異なる色になるように塗り分けることである。 n 色を用いた彩色が存在するとき、 n -彩色可能 であるという。



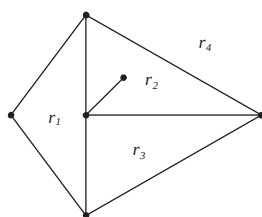


図 5.23: 4色必要

図 5.24:

定義 5.13 地図 M の各領域内に、1 点を取り、2 つの領域が共通の辺をもつとき、その共通辺と交わる曲線に対応する点を結ぶ。こうして出来るグラフ M^* を M の 双対 という。

例 5.13 前の絵うバcal 靄fl 莧広 規瀧殃恣譚幾 Γ cal 誼 オ庾% 顰チ 辑骰只祥傳 𐄂 ㍑ ㍒ ㍓ ㍔ ㍕ ㍖ ㍗ ㍘ ㍙ ㍚ ㍛ ㍜ ㍝ ㍞ ㍟ ㍠ ㍡ ㍢ ㍣ ㍤ ㍥ ㍦ ㍧ ㍨ ㍩ ㍪ ㍫ ㍬ ㍭ ㍮ ㍯ ㍰ ㍱ ㍲ ㍳ ㍴ ㍵ ㍶ ㍷ ㍸ ㍹ ㍺ ㍻ ㍼ ㍽ ㍾ ㍿ ㏀ ㏁ ㏂ ㏃ ㏄ ㏅ ㏆ ㏇ ㏈ ㏉ ㏊ ㏋ ㏌ ㏍ ㏎ ㏏ ㏐ ㏑ ㏒ ㏓ ㏔ ㏕ ㏖ ㏗ ㏘ ㏙ ㏚ ㏛ ㏜ ㏝ ㏞ ㏟ ㏠ ㏡ ㏢ ㏣ ㏤ ㏥ ㏦ ㏧ ㏨ ㏩ ㏪ ㏫ ㏬ ㏭ ㏮ ㏯ ㏰ ㏱ ㏲ ㏳ ㏴ ㏵ ㏶ ㏷ ㏸ ㏹ ㏺ ㏻ ㏼ ㏽ ㏾ ㏿ 㐀 㐁 㐂 㐃 㐄 㐅 㐆 㐇 㐈 㐉 㐊 㐋 㐌 㐍 㐎 㐏 㐐 㐑 㐒 㐓 㐔 㐕 㐖 㐗 㐘 㐙 㐚 㐛 㐜 㐝 㐞 㐟 㐠 㐡 㐢 㐣 㐤 㐥 㐦 㐧 㐨 㐩 㐪 㐫 㐬 㐭 㐮 㐯 㐰 㐱 㐲 㐳 㐴 㐵 㐶 㐷 㐸 㐹 㐺 㐻 㐼 㐽 㐾 㐿 㑀 㑁 㑂 㑃 㑄 㑅 㑆 㑇 㑈 㑉 㑊 㑋 㑌 㑍 㑎 㑏 㑐 㑑 㑒 㑓 㑔 㑕 㑖 㑗 㑘 㑙 㑚 㑛 㑜 㑝 㑞 㑟 㑠 㑡 㑢 㑣 㑤 㑥 㑦 㑧 㑨 㑩 㑪 㑫 㑬 㑭 㑮 㑯 㑰 㑱 㑲 㑳 㑴 㑵 㑶 㑷 㑸 㑹 㑺 㑻 㑼 㑽 㑾 㑿 㒀 㒁 㒂 㒃 㒄 㒅 㒆 㒇 㒈 㒉 㒊 㒋 㒌 㒍 㒎 㒏 㒐 㒑 㒒 㒓 㒔 㒕 㒖 㒗 㒘 㒙 㒚 㒛 㒜 㒝 㒞 㒟 㒠 㒡 㒢 㒣 㒤 㒥 㒦 㒧 㒨 㒩 㒪 㒫 㒬 㒭 㒮 㒯 㒰 㒱 㒲 㒳 㒴 㒵 㒶 㒷 㒸 㒹 㒺 㒻 㒼 㒽 㒾 㒿 㓀 㓁 㓂 㓃 㓄 㓅 㓆 㓇 㓈 㓉 㓊 㓋 㓌 㓍 㓎 㓏 㓐 㓑 㓒 㓓 㓔 㓕 㓖 㓗 㓘 㓙 㓚 㓛 㓜 㓝 㓞 㓟 㓠 㓡 㓢 㓣 㓤 㓥 㓦 㓧 㓨 㓩 㓪 㓫 㓬 㓭 㓮 㓯 㓰 㓱 㓲 㓳 㓴 㓵 㓶 㓷 㓸 㓹 㓺 㓻 㓼 㓽 㓾 㓿 㔀 㔁 㔂 㔃 㔄 㔅 㔆 㔇 㔈 㔉 㔊 㔋 㔌 㔍 㔎 㔏 㔐 㔑 㔒 㔓 㔔 㔕 㔖 㔗 㔘 㔙 㔚 㔛 㔜 㔝 㔞 㔟 㔠 㔡 㔢 㔣 㔤 㔥 㔦 㔧 㔨 㔩 㔪 㔫 㔬 㔭 㔮 㔯 㔰 㔱 㔲 㔳 㔴 㔵 㔶 㔷 㔸 㔹 㔺 㔻 㔼 㔽 㔾 㔿 㕀 㕁 㕂 㕃 㕄 㕅 㕆 㕇 㕈 㕉 㕊 㕋 㕌 㕍 㕎 㕏 㕐 㕑 㕒 㕓 㕔 㕕 㕖 㕗 㕘 㕙 㕚 㕛 㕜 㕝 㕞 㕟 㕠 㕡 㕢 㕣 㕤 㕥 㕦 㕧 㕨 㕩 㕪 㕫 㕬 㕭 㕮 㕯 㕰 㕱 㕲 㕳 㕴 㕵 㕶 㕷 㕸 㕹 㕺 㕻 㕼 㕽 㕾 㕿 㖀 㖁 㖂 㖃 㖄 㖅 㖆 㖇 㖈 㖉 㖊 㖋 㖌 㖍 㖎 㖏 㖐 㖑 㖒 㖓 㖔 㖕 㖖 㖗 㖘 㖙 㖚 㖛 㖜 㖝 㖞 㖟 㖠 㖡 㖢 㖣 㖤 㖥 㖦 㖧 㖨 㖩 㖪 㖫 㖬 㖭 㖮 㖯 㖰 㖱 㖲 㖳 㖴 㖵 㖶 㖷 㖸 㖹 㖺 㖻 㖼 㖽 㖾 㖿 㗀 㗁 㗂 㗃 㗄 㗅 㗆 㗇 㗈 㗉 㗊 㗋 㗌 㗍 㗎 㗏 㗐 㗑 㗒 㗓 㗔 㗕 㗖 㗗 㗘 㗙 㗚 㗛 㗜 㗝 㗞 㗟 㗠 㗡 㗢 㗣 㗤 㗥 㗦 㗧 㗨 㗩 㗪 㗫 㗬 㗭 㗮 㗯 㗰 㗱 㗲 㗳 㗴 㗵 㗶 㗷 㗸 㗹 㗺 㗻 㗼 㗽 㗾 㗿 㘀 㘁 㘂 㘃 㘄 㘅 㘆 㘇 㘈 㘉 㘊 㘋 㘌 㘍 㘎 㘏 㘐 㘑 㘒 㘓 㘔 㘕 㘖 㘗 㘘 㘙 㘚 㘛 㘜 㘝 㘞 㘟 㘠 㘡 㘢 㘣 㘤 㘥 㘦 㘧 㘨 㘩 㘪 㘫 㘬 㘭 㘮 㘯 㘰 㘱 㘲 㘳 㘴 㘵 㘶 㘷 㘸 㘹 㘺 㘻 㘼 㘽 㘾 㘿 㙀 㙁 㙂 㙃 㙄 㙅 㙆 㙇 㙈 㙉 㙊 㙋 㙌 㙍 㙎 㙏 㙐 㙑 㙒 㙓 㙔 㙕 㙖 㙗 㙘 㙙 㙚 㙛 㙜 㙝 㙞 㙟 㙠 㙡 㙢 㙣 㙤 㙥 㙦 㙧 㙨 㙩 㙪 㙫 㙬 㙭 㙮 㙯 㙰 㙱 㙲 㙳 㙴 㙵 㙶 㙷 㙸 㙹 㙺 㙻 㙼 㙽 㙾 㙿 㚀 㚁 㚂 㚃 㚄 㚅 㚆 㚇 㚈 㚉 㚊 㚋 㚌 㚍 㚎 㚏 㚐 㚑 㚒 㚓 㚔 㚕 㚖 㚗 㚘 㚙 㚚 㚛 㚜 㚝 㚞 㚟 㚠 㚡 㚢 㚣 㚤 㚥 㚦 㚧 㚨 㚩 㚪 㚫 㚬 㚭 㚮 㚯 㚰 㚱 㚲 㚳 㚴 㚵 㚶 㚷 㚸 㚹 㚺 㚻 㚼 㚽 㚾 㚿 㞀 㞁 㞂 㞃 㞄 㞅 㞆 㞇 㞈 㞉 㞊 㞋 㞌 㞍 㞎 㞏 㞐 㞑 㞒 㞓 㞔 㞕 㞖 㞗 㞘 㞙 㞚 㞛 㞜 㞝 㞞 㞟 㞠 㞡 㞢 㞣 㞤 㞥 㞦 㞧 㞨 㞩 㞪 㞫 㞬 㞭 㞮 㞯 㞰 㞱 㞲 㞳 㞴 㞵 㞶 㞷 㞸 㞹 㞺 㞻 㞼 㞽 㞾 㞿 㟀 㟁 㟂 㟃 㟄 㟅 㟆 㟇 㟈 㟉 㟊 㟋 㟌 㟍 㟎 㟏 㟐 㟑 㟒 㟓 㟔 㟕 㟖 㟗 㟘 㟙 㟚 㟛 㟜 㟝 㟞 㟟 㟠 㟡 㟢 㟣 㟤 㟥 㟦 㟧 㟨 㟩 㟪 㟫 㟬 㟭 㟮 㟯 㟰 㟱 㟲 㟳 㟴 㟵 㟶 㟷 㟸 㟹 㟺 㟻 㟼 㟽 㟾 㟿 㠀 㠁 㠂 㠃 㠄 㠅 㠆 㠇 㠈 㠉 㠊 㠋 㠌 㠍 㠎 㠏 㠐 㠑 㠒 㠓 㠔 㠕 㠖 㠗 㠘 㠙 㠚 㠛 㠜 㠝 㠞 㠟 㠠 㠡 㠢 㠣 㠤 㠥 㠦 㠧 㠨 㠩 㠪 㠫 㠬 㠭 㠮 㠯 㠰 㠱 㠲 㠳 㠴 㠵 㠶 㠷 㠸 㠹 㠺 㠻 㠼 㠽 㠾 㠿 㡀 㡁 㡂 㡃 㡄 㡅 㡆 㡇 㡈 㡉 㡊 㡋 㡌 㡍 㡎 㡏 㡐 㡑 㡒 㡓 㡔 㡕 㡖 㡗 㡘 㡙 㡚 㡛 㡜 㡝 㡞 㡟 㡠 㡡 㡢 㡣 㡤 㡥 㡦 㡧 㡨 㡩 㡪 㡫 㡬 㡭 㡮 㡯 㡰 㡱 㡲 㡳 㡴 㡵 㡶 㡷 㡸 㡹 㡺 㡻 㡼 㡽 㡾 㡿 㢀 㢁 㢂 㢃 㢄 㢅 㢆 㢇 㢈 㢉 㢊 㢋 㢌 㢍 㢎 㢏 㢐 㢑 㢒 㢓 㢔 㢕 㢖 㢗 㢘 㢙 㢚 㢛 㢜 㢝 㢞 㢟 㢠 㢡 㢢 㢣 㢤 㢥 㢦 㢧 㢨 㢩 㢪 㢫 㢬 㢭 㢮 㢯 㢰 㢱 㢲 㢳 㢴 㢵 㢶 㢷 㢸 㢹 㢺 㢻 㢼 㢽 㢾 㢿 㣀 㣁 㣂 㣃 㣄 㣅 㣆 㣇 㣈 㣉 㣊 㣋 㣌 㣍 㣎 㣏 㣐 㣑 㣒 㣓 㣔 㣕 㣖 㣗 㣘 㣙 㣚 㣛 㣜 㣝 㣞 㣟 㣠 㣡 㣢 㣣 㣤 㣥 㣦 㣧 㣨 㣩 㣪 㣫 㣬 㣭 㣮 㣯 㣰 㣱 㣲 㣳 㣴 㣵 㣶 㣷 㣸 㣹 㣺 㣻 㣼 㣽 㣾 㣿 㤀 㤁 㤂 㤃 㤄 㤅 㤆 㤇 㤈 㤉 㤊 㤋 㤌 㤍 㤎 㤏 㤐 㤑 㤒 㤓 㤔 㤕 㤖 㤗 㤘 㤙 㤚 㤛 㤜 㤝 㤞 㤟 㤠 㤡 㤢 㤣 㤤 㤥 㤦 㤧 㤨 㤩 㤪 㤫 㤬 㤭 㤮 㤯 㤰 㤱 㤲 㤳 㤴 㤵 㤶 㤷 㤸 㤹 㤺 㤻 㤼 㤽 㤾 㤿 㥀 㥁 㥂 㥃 㥄 㥅 㥆 㥇 㥈 㥉 㥊 㥋 㥌 㥍 㥎 㥏 㥐 㥑 㥒 㥓 㥔 㥕 㥖 㥗 㥘 㥙 㥚 㥛 㥜 㥝 㥞 㥟 㥠 㥡 㥢 㥣 㥤 㥥 㥦 㥧 㥨 㥩 㥪 㥫 㥬 㥭 㥮 㥯 㥰 㥱 㥲 㥳 㥴 㥵 㥶 㥷 㥸 㥹 㥺 㥻 㥼 㥽 㥾 㥿 㦀 㦁 㦂 㦃 㦄 㦅 㦆 㦇 㦈 㦉 㦊 㦋 㦌 㦍 㦎 㦏 㦐 㦑 㦒 㦓 㦔 㦕 㦖 㦗 㦘 㦙 㦚 㦛 㦜 㦝 㦞 㦟 㦠 㦡 㦢 㦣 㦤 㦥 㦦 㦧 㦨 㦩 㦪 㦫 㦬 㦭 㦮 㦯 㦰 㦱 㦲 㦳 㦴 㦵 㦶 㦷 㦸 㦹 㦺 㦻 㦼 㦽 㦾 㦿 㧀 㧁 㧂 㧃 㧄 㧅 㧆 㧇 㧈 㧉 㧊 㧋 㧌 㧍 㧎 㧏 㧐 㧑 㧒 㧓 㧔 㧕 㧖 㧗 㧘 㧙 㧚 㧛 㧜 㧝 㧞 㧟 㧠 㧡 㧢 㧣 㧤 㧥 㧦 㧧 㧨 㧩 㧪 㧫 㧬 㧭 㧮 㧯 㧰 㧱 㧲 㧳 㧴 㧵 㧶 㧷 㧸 㧹 㧺 㧻 㧼 㧽 㧾 㧿 㨀 㨁 㨂 㨃 㨄 㨅 㨆 㨇 㨈 㨉 㨊 㨋 㨌 㨍 㨎 㨏 㨐 㨑 㨒 㨓 㨔 㨕 㨖 㨗 㨘 㨙 㨚 㨛 㨜 㨝 㨞 㨟 㨠 㨡 㨢 㨣 㨤 㨥 㨦 㨧 㨨 㨩 㨪 㨫 㨬 㨭 㨮 㨯 㨰 㨱 㨲 㨳 㨴 㨵 㨶 㨷 㨸 㨹 㨺 㨻 㨼 㨽 㨾 㨿 㩀 㩁 㩂 㩃 㩄 㩅 㩆 㩇 㩈 㩉 㩊 㩋 㩌 㩍 㩎 㩏 㩐 㩑 㩒 㩓 㩔 㩕 㩖 㩗 㩘 㩙 㩚 㩛 㩜 㩝 㩞 㩟 㩠 㩡 㩢 㩣 㩤 㩥 㩦 㩧 㩨 㩩 㩪 㩫 㩬 㩭 㩮 㩯 㩰 㩱 㩲 㩳 㩴 㩵 㩶 㩷 㩸 㩹 㩺 㩻 㩼 㩽 㩾 㩿 㪀 㪁 㪂 㪃 㪄 㪅 㪆 㪇 㪈 㪉 㪊 㪋 㪌 㪍 㪎 㪏 㪐 㪑 㪒 㪓 㪔 㪕 㪖 㪗 㪘 㪙 㪚 㪛 㪜 㪝 㪞 㪟 㪠 㪡 㪢 㪣 㪤 㪥 㪦 㪧 㪨 㪩 㪪 㪫 㪬 㪭 㪮 㪯 㪰 㪱 㪲 㪳 㪴 㪵 㪶 㪷 㪸 㪹 㪺 㪻 㪼 㪽 㪾 㪿 㫀 㫁 㫂 㫃 㫄 㫅 㫆 㫇 㫈 㫉 㫊 㫋 㫌 㫍 㫎 㫏 㫐 㫑 㫒 㫓 㫔 㫕 㫖 㫗 㫘 㫙 㫚 㫛 㫜 㫝 㫞 㫟 㫠 㫡 㫢 㫣 㫤 㫥 㫦 㫧 㫨 㫩 㫪 㫫 㫬 㫭 㫮 㫯 㫰 㫱 㫲 㫳 㫴 㫵 㫶 㫷 㫸 㫹 㫺 㫻 㫼 㫽 㫾 㫿 㬀 㬁 㬂 㬃 㬄 㬅 㬆 㬇 㬈 㬉 㬊 㬋 㬌 㬍 㬎 㬏 㬐 㬑 㬒 㬓 㬔 㬕 㬖 㬗 㬘 㬙 㬚 㬛 㬜 㬝 㬞 㬟 㬠 㬡 㬢 㬣 㬤 㬥 㬦 㬧 㬨 㬩 㬪 㬫 㬬 㬭 㬮 㬯 㬰 㬱 㬲 㬳 㬴 㬵 㬶 㬷 㬸 㬹 㬺 㬻 㬼 㬽 㬾 㬿 㭀 㭁 㭂 㭃 㭄 㭅 㭆 㭇 㭈 㭉 㭊 㭋 㭌 㭍 㭎 㭏 㭐 㭑 㭒 㭓 㭔 㭕 㭖 㭗 㭘 㭙 㭚 㭛 㭜 㭝 㭞 㭟 㭠 㭡 㭢 㭣 㭤 㭥 㭦 㭧 㭨 㭩 㭪 㭫 㭬 㭭 㭮 㭯 㭰 㭱 㭲 㭳 㭴 㭵 㭶 㭷 㭸 㭹 㭺 㭻 㭼 㭽 㭾 㭿 㮀 㮁 㮂 㮃 㮄 㮅 㮆 㮇 㮈 㮉 㮊 㮋 㮌 㮍 㮎 㮏 㮐 㮑 㮒 㮓 㮔 㮕 㮖 㮗 㮘 㮙 㮚 㮛 㮜 㮝 㮞 㮟 㮠 㮡 㮢 㮣 㮤 㮥 㮦 㮧 㮨 㮩 㮪 㮫 㮬 㮭 㮮 㮯 㮰 㮱 㮲 㮳 㮴 㮵 㮶 㮷 㮸 㮹 㮺 㮻 㮼 㮽 㮾 㮿 㯀 㯁 㯂 㯃 㯄 㯅 㯆 㯇 㯈 㯉 㯊 㯋 㯌 㯍 㯎 㯏 㯐 㯑 㯒 㯓 㯔 㯕 㯖 㯗 㯘 㯙 㯚 㯛 㯜 㯝 㯞 㯟 㯠 㯡 㯢 㯣 㯤 㯥 㯦 㯧 㯨 㯩 㯪 㯫 㯬 㯭 㯮 㯯 㯰 㯱 㯲 㯳 㯴 㯵 㯶 㯷 㯸 㯹 㯺 㯻 㯼 㯽 㯾 㯿 㰀 㰁 㰂 㰃 㰄 㰅 㰆 㰇 㰈 㰉 㰊 㰋 㰌 㰍 㰎 㰏 㰐 㰑 㰒 㰓 㰔 㰕 㰖 㰗 㰘 㰙 㰚 㰛 㰜 㰝 㰞 㰟 㰠 㰡 㰢 㰣 㰤 㰥 㰦 㰧 㰨 㰩 㰪 㰫 㰬 㰭 㰮 㰯 㰰 㰱 㰲 㰳 㰴 㰵 㰶 㰷 㰸 㰹 㰺 㰻 㰼 㰽 㰾 㰿 㱀 㱁 㱂 㱃 㱄 㱅 㱆 㱇 㱈 㱉 㱊 㱋 㱌 㱍 㱎 㱏 㱐 㱑 㱒 㱓 㱔 㱕 㱖 㱗 㱘 㱙 㱚 㱛 㱜 㱝 㱞 㱟 㱠 㱡 㱢 㱣 㱤 㱥 㱦 㱧 㱨 㱩 㱪 㱫 㱬 㱭 㱮 㱯 㱰 㱱 㱲 㱳 㱴 㱵 㱶 㱷 㱸 㱹 㱺 㱻 㱼 㱽 㱾 㱿 㲀 㲁 㲂 㲃 㲄 㲅 㲆 㲇 㲈 㲉 㲊 㲋 㲌 㲍 㲎 㲏 㲐 㲑 㲒 㲓 㲔 㲕 㲖 㲗 㲘 㲙 㲚 㲛 㲜 㲝 㲞 㲟 㲠 㲡 㲢 㲣 㲤 㲥 㲦 㲧 㲨 㲩 㲪 㲫 㲬 㲭 㲮 㲯 㲰 㲱 㲲 㲳 㲴 㲵 㲶 㲷 㲸 㲹 㲺 㲻 㲼 㲽 㲾 㲿 㳀 㳁 㳂 㳃 㳄 㳅 㳆 㳇 㳈 㳉 㳊 㳋 㳌 㳍 㳎 㳏 㳐 㳑 㳒 㳓 㳔 㳕 㳖 㳗 㳘 㳙 㳚 㳛 㳜 㳝 㳞 㳟 㳠 㳡 㳢 㳣 㳤 㳥 㳦 㳧 㳨 㳩 㳪 㳫 㳬 㳭 㳮 㳯 㳰 㳱 㳲 㳳 㳴 㳵 㳶 㳷 㳸 㳹 㳺 㳻 㳼 㳽 㳾 㳿 㴀 㴁 㴂 㴃 㴄 㴅 㴆 㴇 㴈 㴉 㴊 㴋 㴌 㴍 㴎 㴏 㴐 㴑 㴒 㴓 㴔 㴕 㴖 㴗 㴘 㴙 㴚 㴛 㴜 㴝 㴞 㴟 㴠 㴡 㴢 㴣 㴤 㴥 㴦 㴧 㴨 㴩 㴪 㴫 㴬 㴭 㴮 㴯 㴰 㴱 㴲 㴳 㴴 㴵 㴶 㴷 㴸 㴹 㴺 㴻 㴼 㴽 㴾 㴿 㵀 㵁 㵂 㵃 㵄 㵅 㵆 㵇 㵈 㵉 㵊 㵋 㵌 㵍 㵎 㵏 㵐 㵑 㵒 㵓 㵔 㵕 㵖 㵗 㵘 㵙 㵚 㵛 㵜 㵝 㵞 㵟 㵠 㵡 㵢 㵣 㵤 㵥 㵦 㵧 㵨 㵩 㵪 㵫 㵬 㵭 㵮 㵯 㵰 㵱 㵲 㵳 㵴 㵵 㵶 㵷 㵸 㵹 㵺 㵻 㵼 㵽 㵾 㵿 㶀 㶁 㶂 㶃 㶄 㶅 㶆 㶇 㶈 㶉 㶊 㶋 㶌 㶍 㶎 㶏 㶐 㶑 㶒 㶓 㶔 㶕 㶖 㶗 㶘 㶙 㶚 㶛 㶜 㶝 㶞 㶟 㶠 㶡 㶢 㶣 㶤 㶥 㶦 㶧 㶨 㶩 㶪 㶫 㶬 㶭 㶮 㶯 㶰 㶱 㶲 㶳 㶴 㶵 㶶 㶷 㶸 㶹 㶺 㶻 㶼 㶽 㶾 㶿 㷀 㷁 㷂 㷃 㷄 㷅 㷆 㷇 㷈 㷉 㷊 㷋 㷌 㷍 㷎 㷏 㷐 㷑 㷒 㷓 㷔 㷕 㷖 㷗 㷘 㷙 㷚 㷛 㷜 㷝 㷞 㷟 㷠 㷡 㷢 㷣 㷤 㷥 㷦 㷧 㷨 㷩 㷪 㷫 㷬 㷭 㷮 㷯 㷰 㷱 㷲 㷳 㷴 㷵 㷶 㷷 㷸 㷹 㷺 㷻 㷼 㷽 㷾 㷿 㸀 㸁 㸂 㸃 㸄 㸅 㸆 㸇 㸈 㸉 㸊 㸋 㸌 㸍 㸎 㸏 㸐 㸑 㸒 㸓 㸔 㸕 㸖 㸗 㸘 㸙 㸚 㸛 㸜 㸝 㸞 㸟 㸠 㸡 㸢 㸣 㸤 㸥 㸦 㸧 㸨 㸩 㸪 㸫 㸬 㸭 㸮 㸯 㸰 㸱 㸲 㸳 㸴 㸵 㸶 㸷 㸸 㸹 㸺 㸻 㸼 㸽 㸾 㸿 㹀 㹁 㹂 㹃 㹄 㹅 㹆 㹇 㹈 㹉 㹊 㹋 㹌 㹍 㹎 㹏 㹐 㹑 㹒 㹓 㹔 㹕 㹖 㹗 㹘 㹙 㹚 㹛 㹜 㹝 㹞 㹟 㹠 㹡 㹢 㹣 㹤 㹥 㹦 㹧 㹨 㹩 㹪 㹫 㹬 㹭 㹮 㹯 㹰 㹱 㹲 㹳 㹴 㹵 㹶 㹷 㹸 㹹 㹺 㹻 㹼 㹽 㹿 㺀 㺁 㺂 㺃 㺄 㺅 㺆 㺇 㺈 㺉 㺊 㺋 㺌 㺍 㺎 㺏 㺐 㺑 㺒 㺓 㺔 㺕 㺖 㺗 㺘 㺙 㺚 㺛 㺜 㺝 㺞 㺟 㺠 㺡 㺢 㺣 㺤 㺥 㺦 㺧 㺨 㺩 㺪 㺫 㺬 㺭 㺮 㺯 㺰 㺱 㺲 㺳 㺴 㺵 㺶 㺷 㺸 㺹 㺺 㺻 㺼 㺽 㺾 㺿 㻀 㻁 㻂 㻃 㻄 㻅 㻆 㻇 㻈 㻉 㻊 㻋 㻌 㻍 㻎 㻏 㻐 㻑 㻒 㻓 㻔 㻕 㻖 㻗 㻘 㻙 㻚 㻛 㻜 㻝 㻞 㻟 㻠 㻡 㻢 㻣 㻤 㻥 㻦 㻧 㻨 㻩 㻪 㻫 㻬 㻭 㻮 㻯 㻰 㻱 㻲 㻳 㻴 㻵 㻶 㻷 㻸 㻹 㻺 㻻 㻼 㻽 㻾 㻿 㼀 㼁 㼂 㼃 㼄 㼅 㼆 㼇 㼈 㼉 㼊 㼋 㼌 㼍 㼎 㼏 㼐 㼑 㼒 㼓 㼔 㼕 㼖 㼗 㼘 㼙 㼚 㼛 㼜 㼝 㼞 㼟 㼠 㼡 㼢 㼣 㼤 㼥 㼦 㼧 㼨 㼩 㼪 㼫 㼬 㼭 㼮 㼯 㼰 㼱 㼲 㼳 㼴 㼵 㼶 㼷 㼸 㼹 㼺 㼻 㼼 㼽 㼾 㼿 㽀 㽁 㽂 㽃 㽄 㽅 㽆 㽇 㽈 㽉 㽊 㽋 㽌 㽍 㽎 㽏 㽐 㽑 㽒 㽓 㽔 㽕 㽖 㽗 㽘 㽙 㽚 㽛 㽜 㽝 㽞 㽟 㽠 㽡 㽢 㽣 㽤 㽥 㽦 㽧 㽨 㽩 㽪 㽫 㽬 㽭 㽮 㽯 㽰 㽱 㽲 㽳 㽴 㽵 㽶 㽷 㽸 㽹 㽺 㽻 㽼 㽽 㽾 㽿 㿀 㿁 㿂 㿃 㿄 㿅 㿆 㿇 㿈 㿉 㿊 㿋 㿌 㿍 㿎 㿏 㿐 㿑 㿒 㿓 㿔 㿕 㿖 㿗 㿘 㿙 㿚 㿛 㿜 㿝 㿞 㿟 㿠 㿡 㿢 㿣 㿤 㿥 㿦 㿧 㿨 㿩 㿪 㿫 㿬 㿭 㿮 㿯 㿰 㿱 㿲 㿳 㿴 㿵 㿶 㿷 㿸 㿹 㿺 㿻 㿼 㿽 㿾 㿿 㸀 㸁 㸂 㸃 㸄 㸅 㸆 㸇 㸈 㸉 㸊 㸋 㸌 㸍 㸎 㸏 㸐 㸑 㸒 㸓 㸔 㸕 㸖 㸗 㸘 㸙 㸚 㸛 㸜 㸝 㸞 㸟 㸠 㸡 㸢

第6章 木、ラベル付きグラフ、最短経路

6.1 木

定義 6.1 回路をもたない連結グラフを 木 という。

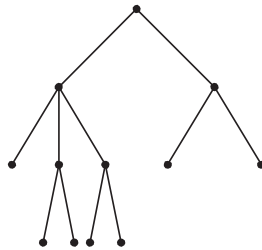


図 6.1:

命題 6.1 G を $n(> 1)$ 個の頂点をもつ有限グラフ。

次の (1)、(2)、(3) は同値

(1) G は木

(2) G は回路をもたず、 $n \Leftrightarrow 1$ 本の道

(3) G は連結であり、 $n \Leftrightarrow 1$ 本の道

定義 6.2 $G \subset T$ が 生成木 であるとは、 T が木で、 G のすべての頂点を含むもの

例 6.1 グラフ G に対し T_1, T_2, T_3 はどれも生成木

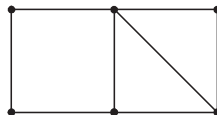
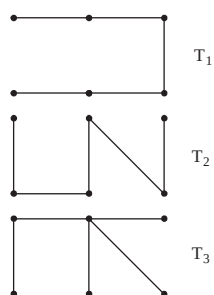


図 6.2: グラフ G

図 6.3: グラフ G の生成木

6.2 ラベル付きグラフ

定義 6.3 有向あるいは無向グラフで、各頂点（あるいは各道）にラベル（重み）が付けられたものを ラベル付きグラフ という。

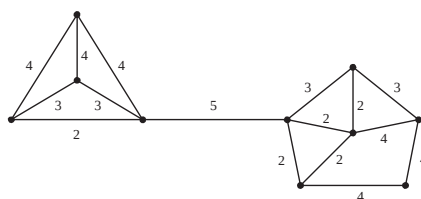


図 6.4:

定義 6.4 最小（大）生成木 とは、 G の生成木の T の中でラベルの和が最小（大）となるもの

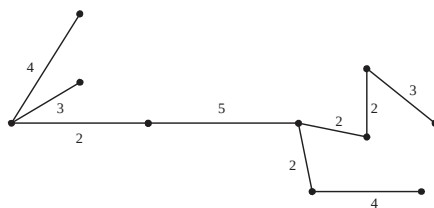


図 6.5:

定理 6.1 (Kruskal のアルゴリズム) 次の操作により最小生成木が求まる。

- (1) $T = \phi$ からスタートし、 T に G の辺を加えていく。
- (2) $E \Leftrightarrow T$ のなかで辺 e を選ぶ。ただし

$$T \cup \{e\}$$

が連結となり、回路が生じないもののなかで、重みが最小の e を探す。

(3) T を $T \cup \{e\}$ としくり返す

例 6.2 *Kruskal* のアルゴリズム

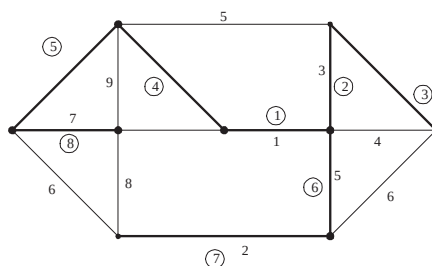


図 6.6:

6.3 最短道問題

定義 6.5 辺に正の実数の重みが付けられた有向あるいは無向グラフを考える。ある頂点 s から他の頂点 t への経路のうち、辺の重みの和の最小のものを 最短道 という。重みの和を 最短距離 という。

定理 6.2 (Pruning のアルゴリズム (Dijksfra?))

例 6.3 ラベルつき有向グラフ D が回路を含まないとする。

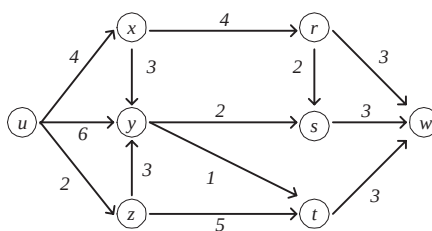


図 6.7:

u から w への最短道 $P(D)$ を求める *Pruning* アルゴリズム

始点 u から頂点 v への考察段階における最短の長さを $l(v)$ 、長さ $l(v)$ の経路を $p(v)$ とする。

$l(u) = 0$, $p(u) = u$ として始める。

u について、 $l(x) = 4$, $p(x) = ux$, $l(y) = 6$, $p(y) = uy$, $l(z) = 2$, $p(z) = uz$, $p(x)$, $p(z)$ は確定

x について、 $l(r) = l(x) + 4 = 4 + 4 = 8$, $p(r) = p(x)r = uxr$ $p(r)$ は確定
 $l(x) + 3 = 4 + 3 = 7 > l(y) = 6$ だから、 $l(y) = 6$, $p(y) = uy$ とま
 のまま。

z について、 $l(t) = l(z) + 5 = 2 + 5 = 7$, $p(t) = p(z)t = uzt$
 $l(z) + 3 = 2 + 3 = 5 < l(y) = 6$ だから、 $l(y) = 5$, $p(y) = p(z)y = uzy$
 に変更する。
 このとき、 $l(y) = 5$, $p(y) = uzy$ と $p(y)$ が確定

y について、 $l(s) = l(y) + 2 = 5 + 2 = 7$, $p(s) = p(y)s = uzys$
 $l(y) + 1 = 5 + 1 = 6 < l(t) = 7$ だから、 $l(t) = 6$, $p(t) = p(y)t = uzyt$
 に変更する。
 このとき、 $l(t) = 6$, $p(t) = uzyt$ と $p(t)$ が確定

r について、 $l(w) = l(r) + 3 = 8 + 3 = 11$, $p(w) = p(r)w = uxr w$
 $l(r) + 2 = 8 + 2 = 10 > l(s) = 7$ だから、 $l(s) = 7$, $p(s) = uzys$ とま
 のまま。
 このとき、 $l(s) = 7$, $p(s) = uzys$ と $p(s)$ が確定

s について、 $l(s) + 3 = 7 + 3 = 10 < l(w) = 11$ だから、 $l(w) = 10$, $p(w) =$
 $p(s)w = uzysw$ に変更する。

t について、 $l(t) + 3 = 6 + 3 = 9 < l(w) = 10$ だから、 $l(w) = 9$, $p(w) = p(t)w =$
 $uzytw$ に変更する。
 このとき、 $l(w) = 9$, $p(w) = uzytw$ と $p(w)$ が確定

以上より、 $p(w) = uzytw$ が最短道で、長さ $l(w) = 9$ である。

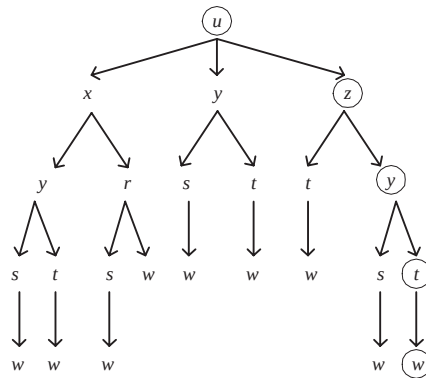


図 6.8: