Adams 不等式に関連した重み付き Morrey 空間上での分数べき積分作用素について

和泉孝志 (山形大学大学院理工学研究科 D3)
(東海大 理・古谷康雄 氏, 山形大 理・佐藤圓治 氏 との共同研究)

1974 年, Muckenhoupt and Wheeden [5] は重み付き L^p 空間上で, 分数べき積分作用素の有界性を示した. また Adams [1] は Morrey 空間上で, 分数べき積分作用素の有界性を研究し, 後に Chiarenza and Frasca [2] が別証明を与えている. Komori and Shirai [4] はこれらの結果に注目し, 重み付き Morrey 空間での分数べき積分作用素の有界性を証明した. 今回は, この Komori and Shirai の結果の改良について述べる.

p' を p の共役指数とする. また, $\mathbb{R}^n$ 上の局所可積分関数 $w \geq 0$ を重みと呼び, $w(E) = \int_E w(x)dx$ $(E \subset \mathbb{R}^n)$ で定義する.

Definition 1. $0 < \alpha < n$ とする. このとき, 分数べき積分作用素 I_α を

$$I_\alpha f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy.$$

で定義する.

Definition 2. $1 < p < \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ とし, u, $v \geq 0$ を重みとする. このとき, 重み付き Morrey 空間 $L^{p,\lambda}(u,v)(\mathbb{R}^n)$ を

$$L^{p,\lambda}(u,v)(\mathbb{R}^n) := \Bigg\{ f \in L^1_{loc}(u)(\mathbb{R}^n) : \\ ||f||_{L^{p,\lambda}(u,v)} = \sup_{B\subset\mathbb{R}^n, B:ball} \left(\frac{1}{v(B)^\lambda} \int_B |f(y)|^p u(y) dy \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \Bigg\}.$$

で定義する.

Definition 2 において $u = v = 1$ のときは, 古典的な Morrey 空間となる.

次に, $A_{p,q}$ 条件について定義をする:

Definition 3. $1 < p, q < \infty$ とする.

$$\sup_{B \subset \mathbb{R}^n, B:ball} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^q(y) dy \right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{1}{|B|} \int_B w^{-p'}(y) dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

をみたすとき, $w \in A_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ であるとする.

Komori and Shirai [4] は重み付きの評価を与えた:

Theorem A ([4; Theorem 3.6]). $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n}{\alpha}$, $0 \le \lambda < \frac{p}{q_1}$ とし, 重み w は $w \in A_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)$ をみたすとする. このとき,

$$||I_\alpha f||_{L^{q_1, \frac{\lambda q_1}{p}}(w^{q_1}, w^{q_1})} \le C ||f||_{L^{p,\lambda}(w^p, w^{q_1})}$$

が成立する. ここで $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ である.

我々はこの Theorem A について改良を行い, 次の結果を得た:

Theorem 1. $0 < \alpha < n$, $1 < p < \frac{n(1-\lambda)}{\alpha}$, $0 \le \lambda < \frac{p}{q_1}$ とし, 重み w は $w \in A_{p,q_1}(\mathbb{R}^n)$ をみたすとする. このとき,

$$||I_\alpha f||_{L^{q_2,\lambda}(w^{q_1}, w^{q_1})} \le C ||f||_{L^{p,\lambda}(w^p, w^{q_1})}$$

が成立する. ここで q_1 および q_2 は, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$, $\frac{1}{q_2} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n(1-\lambda)}$ である.

参考文献

[1] D. R. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J. **42** (1975), 765-778.

[2] F. Chiarenza and M. Frasca, *Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function*, Rend. Math. Appl. **7** (1987), 273-279.

[3] T. Iida, Y. Komori-Furuya and E. Sato, *A note on multilinear fractional integrals*, Anal. Theory Appl. **26** (2010), 301-307.

[4] Y. Komori and S. Shirai, *Weighted Morrey spaces and a singular integral operator*, Math. Nachr. **282** (2009), 219-231.

[5] B. Muckenhoupt and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1974), 261-274.

[6] E. Nakai, *Orlicz-Morrey spaces and the Hardy-Littlewood maximal function*, Studia Math. **188** (2008), 193-221.

L^2_{loc} 関数のフーリエ変換とその応用

伊東由文著

序

本論文においては, L^2_{loc} 関数のフーリエ変換について考察する．さらに, その応用として, フーリエ変換の方法を用いた局所ソボレフ空間の特徴付け, および自由粒子系の自然統計物理学的研究と理想気体の比熱について考察する.

1　L^2 関数のフーリエ変換

本節においては $L^2 = L^2(\boldsymbol{R}^n)$ の関数のフーリエ変換の定義とその基本性質について既知の結果をまとめておく．本節の内容に関しては, 伊藤清三 [1], 第 VI 章と, 黒田 [1], 第 5 章を参照してもらいたい.

$\boldsymbol{R^n}$ の点 $x = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ と双対空間 $\boldsymbol{R}^n$ の点 $p = {}^t(p_1, p_2, \cdots, p_n)$ に対して, 内積を関係式

$$px = (p, x) = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

によって定義する．このとき, $\boldsymbol{R}^n$ のノルムを関係式

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

によって定義し, $\boldsymbol{R}_n$ のノルムを関係式

$$|p| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + \cdots + p_n^2}$$

によって定義する.

$\boldsymbol{R}^n$ と $\boldsymbol{R}_n$ は n 次元計量ベクトル空間として同型であるので, $\boldsymbol{R}_n$ を $\boldsymbol{R}^n$ と同一視して, $\boldsymbol{R}_n = \boldsymbol{R}^n$ と考えることがある．この意味で, $\boldsymbol{R}^n$ は自己双対空間である.

定義 1.1(フーリエ変換)　$f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に対し, f の**フーリエ変換** $(\mathcal{F}f)(p)$ を関係式

$$(\mathcal{F}f)(p) = \operatorname*{l.i.m.}_{R\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|x|\le R} f(x)e^{-ipx}dx$$

によって定義する.

l.i.m. は $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ における平均収束を意味する．すなわち, 上の極限は L^2 収束の意味における極限である．$(\mathcal{F}f)(p) \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ である.

このとき, $(\mathcal{F}f)(p)$ を

$$(\mathcal{F}f)(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)e^{-ipx}dx$$

と表す

(説明)　$f \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ であれば, $\boldsymbol{R}^n$ の任意のコンパクト集合上において f は L^1 関数である．したがって, ルベーグ積分によって, 任意の $R > 0$ に対し, 関数

$$\varphi_R(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|x| \leq R} f(x) e^{-ipx} dx$$

は定義されて, $\varphi_R(p)$ は $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ の関数である.

このとき, L^2 収束の意味で, 平均収束極限

$$\underset{R \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}}\, \varphi_R(p)$$

が存在して, $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ の関数になる.

この関数を $(\mathcal{F}f)(p)$ であると定義するのである．この L^2 関数 $(\mathcal{F}f)(p)$ を f のフーリエ変換であると定義するのである.

同様にして, 逆フーリエ変換を次のように定義する.

定義 1.2(逆フーリエ変換)　$g(p) \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に対し, g の逆フーリエ変換 $(\mathcal{F}^{-1}g)(x)$ を関係式

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \underset{R \to \infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|p| \leq R} g(p) e^{ipx} dp$$

によって定義する．このとき, $(\mathcal{F}^{-1}g)(x) \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ である.

このとき, $(\mathcal{F}^{-1}g)(x)$ を

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} g(p) e^{ipx} dp$$

と表す.

定理 1.1　$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ は自然数の n 組とし, $f \in L^2,\ D^\alpha f \in L^2$ であるとする．このとき, 次の (1), (2) が成り立つ:

(1)　$D_p^\alpha (\mathcal{F}f)(p) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f)$.

(2)　$(ip)^\alpha (\mathcal{F}f)(p) = \mathcal{F}(D_x^\alpha f)$.

ここで, 偏導関数は L^2 偏導関数であるとし, 次の記号を用いる:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},\ p^\alpha = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n},$$

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$D_p^\alpha f(p) = \frac{\partial^{|\alpha|} f(p)}{\partial p_1^{\alpha_1} \partial p_2^{\alpha_2} \cdots \partial p_n^{\alpha_n}},$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

定理 1.2(プランシュレルの定理)　$L^2(\boldsymbol{R}^n)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}$ と逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^{-1}$ に関して次の (1), (2) が成り立つ:

(1)　$\mathcal{F} : f \to \mathcal{F}f$ は $L^2(\boldsymbol{R}^n)$ 上のユニタリ変換である. すなわち, 次の等式

$$\|\mathcal{F}f\| = \|f\|$$

が成り立つ.

(2)　任意の $f, g \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に対して, 関係式

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f,\ \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g = g$$

が成り立つ. すなわち, $\mathcal{F}^{-1}$ は $\mathcal{F}$ の逆変換である.

定理 1.2 の (2), 第 1 の関係式 $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$ より, 次の反転公式が得られる.

定理 1.3(反転公式)　$f \in L^2$ に対し, 次の**反転公式**

$$\begin{aligned} f(x) &= \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|p|\le R} (\mathcal{F}f)(p) e^{ipx} dp \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{ipx} dp \int_{\boldsymbol{R}^n} f(y) e^{-ipy} dy \end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち,

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = f$$

が成り立つ.

また, 定理 1.2 の (2), 第 2 の関係式 $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g = g$ より次の反転公式が得られる.

定理 1.4((反転公式)　$g \in L^2$ に対し, 反転公式

$$\begin{aligned} g(p) &= \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}, \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|x|\le R} (\mathcal{F}^{-1}g)(x) e^{-ipx} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ipx} dx \int_{\boldsymbol{R}^n} g(q) e^{iqx} dq \end{aligned}$$

が成り立つ. すなわち, 等式

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g = g$$

が成り立つ.

さらに, 次のパーセヴァルの等式が得られる.

定理 1.5(パーセヴァルの等式)　任意の $f, g \in L^2(\boldsymbol{R}^n)$ に対し, 等式

$$(\mathcal{F}f, \mathcal{F}g) = (f, g)$$

が成り立つ. すなわち, 等式

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \overline{(\mathcal{F}f)(p)} (\mathcal{F}g)(p) dp = \int_{\boldsymbol{R}^n} \overline{f(x)} g(x) dx$$

が成り立つ.

系 1.1　$f, g \in L^2$ とすると, 次の (1)∼(3) が成り立つ:

(1) $\displaystyle\int f(x)g(x)dx = \int (\mathcal{F}f)(p)g(\mathcal{F}g)(-p)dp.$

(2) $\displaystyle\int f(x-y)g(y)dy = \int (\mathcal{F}f)(p)(\mathcal{F}g)(p)e^{ipx}dp.$

(3) $\displaystyle\int f(x)g(x)e^{-ipx}dx = \int (\mathcal{F}f)(p-q)(\mathcal{F}g)(q)dq.$

いま, $\mathcal{F}$ の m 乗 $\mathcal{F}^m$ を関係式

$$\mathcal{F}^m f = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{(m-1)}f),\ (m \geq 1)$$

によって帰納的に定義する. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 1.6 $f \in L^2$ に対し, 等式

$$\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x),\ \mathcal{F}^4 f(x) = f(x)$$

が成り立つ.

2 L^2_{loc} 関数のフーリエ変換

本節においては L^2_{loc} 関数のフーリエ変換の定義とその基本性質について考察する. これは, L^2_{loc} 関数のフーリエ変換についての新しい結果である. 本節の結果については, 伊東 [8] を参照してもらいたい.

$\boldsymbol{R}^n$ は n 次元ユークリッド空間であるとする. ただし, $n \geq 1$ とする. また, $L^2_{\mathrm{loc}} = L^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ とする. 1 節と同様の記号を用いる.

定義 2.1 $f \in L^2_{\mathrm{loc}}$ のフーリエ変換 $(\mathcal{F}f)(p)$ を関係式

$$(\mathcal{F}f)(p) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|x|\leq R} f(x)e^{-ipx}dx$$

によって定義する.

ここで, 極限は L^2_{loc} 収束の意味の極限を表す. このとき, $\mathcal{F}f(p)$ を

$$(\mathcal{F}f)(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} f(x)e^{-ipx}dx$$

と表す.

いま, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}$ であるとすると, コンパクト台の L^2 関数の列 $\{f_m\}$ が存在して, L^2_{loc} の位相の意味で $f_m \to f$ が成り立つ. このとき, $\mathcal{F}f_m \in L^2 \subset L^2_{\mathrm{loc}}$, $(m \geq 1)$ で,

$$\|\mathcal{F}f_m\| = \|f_m\|,\ (m \geq 1)$$

が成り立つ.

$\widehat{f}_m = \mathcal{F}f_m$ と表すとき, $\widehat{f}_m$ の閉球 $|p| \leq T$ への制限を $\widehat{f}_{m,T}$ と表す. このとき,

$$\|\widehat{f}_{m,T}\| \leq \|\mathcal{F}f_m\| = \|f_m\|$$

が成り立つ．ゆえに, $0 < T < \infty$ に対し,

$$\|\widehat{f}_{m,T} - \widehat{f}_{n,T}\| \leq \|\mathcal{F}f_m - \mathcal{F}f_n\| = \|f_m - f_n\| \to 0, \, (m, n \to \infty)$$

となるから, 各閉球 $|p| \leq T$ 上, $\{\widehat{f}_{m,T}\}$ は $L^2(|p| \leq T)$ においてコーシー列になる．したがって, $0 < T < \infty$ に対し,

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{f}_{m,T}(p) = g_T(p), (|p| \leq T)$$

が存在して, $g_T \in L^2$ となる．このとき, $0 < T < T' < \infty$ に対し, $|p| \leq T$ 上において $g_T(p) = g_{T'}(p)$ が成り立つ．ゆえに, $g \in L^2_{\rm loc}$ が存在して,

$$g(p) = g_T(p), (|p| \leq T)$$

が成り立つ．したがって, 列 $\{\mathcal{F}f_m\}$ は $L^2_{\rm loc}$ の収束の意味において収束する．この極限は $\mathcal{F}f = g \in L^2_{\rm loc}$ に等しい．すなわち, $L^2_{\rm loc}$ 収束の意味において, 等式

$$\lim_{m\to\infty} (\mathcal{F}f_m)(p) = (\mathcal{F}f)(p)$$

が成り立つ．

特に, 閉球 $|x| \leq R$ の定義関数を $\chi_R(x)$ とするとき, $f \in L^2_{\rm loc}$ に対し,

$$f_R(x) = f(x)\chi_R(x)$$

とおくと, $f_R(x) \in L^2$ で, $L^2_{\rm loc}$ 収束の意味で

$$\lim_{R\to\infty} f_R(x) = f(x)$$

が成り立つ．したがって, $L^2_{\rm loc}$ 収束の意味において

$$\lim_{R\to\infty} (\mathcal{F}f_R)(p) = \mathcal{F}f(p)$$

が成り立つ．これが $f \in L^2_{\rm loc}$ のフーリエ変換の定義式である．このとき, $\mathcal{F}f \in L^2_{\rm loc}$ が成り立つ．

同様にして, 逆フーリエ変換を次のように定義する．

定義 2.2(逆フーリエ変換)　$g(p) \in L^2_{\rm loc}$ の逆フーリエ変換 $(\mathcal{F}^{-1}g)(x)$ を, 関係式

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|p|\leq R} g(p)e^{ipx}dp$$

によって定義する．ここで, 極限は $L^2_{\rm loc}$ 収束の意味の極限を表す．

このとき, $(\mathcal{F}^{-1}g)(x)$ を

$$(\mathcal{F}^{-1}g)(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} g(p)e^{ipx}dp$$

と表す．

定理 2.1　$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ は自然の n 組とし, $f(x) \in L^2_{\rm loc}, D^\alpha f(x) \in L^2_{\rm loc}$ であるとすると, 次の (1), (2) が成り立つ:

(1)　$D^\alpha(\mathcal{F}f)(p) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha f)$.

(2)　$(ip)^\alpha(\mathcal{F}f)(p) = \mathcal{F}(D^\alpha f)$.

ここで, x^α, D^α などの記号は定理 1.1.1 と同様である. ただし, 偏導関数は L^2_{loc} 偏導関数であるとする.

いま, $f(x) \in L^2_{\mathrm{loc}}$ であるとすると,

$$f_R(x) \in L^2,\ (\mathcal{F} f_R)(p) \in L^2, (0 < R < \infty)$$

であるから,

$$\|\mathcal{F} f_R\| = \|f_R\|,\ \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f_R(x) = f_R(x),\ (0 < R < \infty)$$

が成り立つ.

このとき, L^2_{loc} 収束の意味で,

$$f_R(x) \to f(x),\ (R \to \infty)$$

であるから, 関係式

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f = f$$

が成り立つ. したがって, 次の反転公式を得る.

定理 2.2(反転公式) $f(x) \in L^2_{\mathrm{loc}}$ に対し, 次の反転公式

$$f(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|p|\le T} (\mathcal{F} f)(p) e^{ipx} dp$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ipx} dp \int f(y) e^{-ipy} dy$$

が成り立つ. ここで, 積分の収束は L^2_{loc} 収束の意味で考える. すなわち, 等式

$$\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F} f = f$$

が成り立つ.

同様に, $g(p) \in L^2_{\mathrm{loc}}$ に対し, 閉球 $|p| \le T$ への g の制限を g_T と表す. このとき,

$$\|\mathcal{F}^{-1} g_T\| = \|g_T\|,\ \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} g_T(p) = g_T(p),\ (0 < T < \infty)$$

が成り立つ.

このとき, L^2_{loc} 収束の意味で,

$$g_T(p) \to g(p),\ (T \to \infty)$$

であるから, 関係式

$$g(p) = \mathcal{F}\mathcal{F}^{-1} g(p)$$

が成り立つ. したがって, 次の反転公式を得る.

定理 2.3(反転公式) $g \in L^2_{\mathrm{loc}}$ に対し, 次の反転公式

$$g(p) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} (\mathcal{F}^{-1} g)(x) e^{-ipx} dx$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\boldsymbol{R}^n} e^{-ipx} dx \int_{\boldsymbol{R}^n} g(q) e^{iqx} dq$$

が成り立つ. ここで, 積分の収束は L^2_{loc} 収束の意味で考える. すなわち, 等式

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}g = g$$

が成り立つ.

自然数 $m \geq 1$ に対し, $\mathcal{F}^m$ を帰納的に定義するとき, 次の定理が成り立つ.

定理 2.4 $f \in L^2_{\mathrm{loc}}$ に対し, 等式

$$\mathcal{F}^2 f(x) = f(-x),\ \mathcal{F}^4 f(x) = f(x)$$

が成り立つ.

3 ソボレフ空間 $H^s(\boldsymbol{R}^n), H^s_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$

本節において, 重みつきの L^2 空間を考える. これを用いて, フーリエ変換の方法によるソボレフ空間 $H^s(\boldsymbol{R}^n)$ と局所ソボレフ空間 $H^s_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ の特徴付けを行う. 特に, 局所ソボレフ空間に対しては新しい結果が得られている. 本節の結果については, 伊東 [8] を参照してもらいたい.

s は実数であるとする. $\boldsymbol{R}^n$ 上の複素数値可測関数 f で, 条件

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} (1+|x|^2)^s |f(x)|^2 dx < \infty$$

を満たすもの全体のつくるベクトル空間を $L^{2,s} = L^{2,s}(\boldsymbol{R}^n)$ と表す. $L^{2,s}$ のノルム $||f||_{L^{2,s}}$ を関係式

$$||f||_{L^{2,s}} = \left\{ \int_{\boldsymbol{R}^n} (1+|x|^2)^s |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2}$$

によって定義する. このとき, $L^{2,s}$ はノルム空間になる.

$L^{2,s}$ の内積を関係式

$$(f,g) = \int_{\boldsymbol{R}^n} (1+|x|^2)^s \overline{f(x)} g(x) dx$$

によって定義するとき, $L^{2,s}$ はヒルベルト空間になる. このとき, 次の包含関係

$$C_0^\infty \subset L^{2,s} \subset L^{2,0} = L^2 \subset L^{2,-s} \subset L^2_{\mathrm{loc}},\ (s > 0)$$

が成り立つ.

さらに, ノルムの関係式

$$||f||_{L^{2,s_1}} \leq ||f||_{L^{2,s_2}},\ (s_1 \leq s_2)$$

が成り立つから, 包含関係

$$L^{2,s_1} \supset L^{2,s_2},\ (s_1 \leq s_2)$$

が成り立つ.

いま, $\mathcal{F}$ を L^2 におけるフーリエ変換であるとする. すなわち, $f \in L^2$ に対し, フーリエ変換 $(\mathcal{F}f)(p)$ は関係式

$$(\mathcal{F}f)(p) = \underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^n} \int_{|x|\leq R} f(x) e^{-ipx} dx,$$

$$x = {}^t(x_1, x_2, \cdots, x_n), p = {}^t(p_1, p_2, \cdots, p_n),$$

$$px = p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_nx_n$$

によって定義する.

ここで, l.i.m. は L^2 における平均収束を表す.

このとき, 実数 s に対し, **ソボレフ空間** $H^s = H^s(\boldsymbol{R}^n)$ を次のように定義する:

$$H^s(\boldsymbol{R}^n) = \{f \in L^2(\boldsymbol{R}^n); \mathcal{F}f \in L^{2,s}(\boldsymbol{R}^n)\}.$$

$H^s(\boldsymbol{R}^n)$ において, 内積を関係式

$$\begin{aligned}(f,g)_{H^s} &= (\mathcal{F}f, \mathcal{F}g)_{L^{2,s}} \\ &= \int_{\boldsymbol{R}^n} (1+|p|^2)^s \overline{((\mathcal{F}f)(p))}(\mathcal{F}g)(p)dp\end{aligned}$$

によって定義する. このとき, H^s は $(f,g)_{H^s}$ を内積としてヒルベルト空間になる.

m が非負整数のとき, 上に定義したソボレフ空間 $H^m = H^m(\boldsymbol{R}^n)$ は

$$W^{m,2}(\boldsymbol{R}^n) = \{f \in L^2(\boldsymbol{R}^n); D^\alpha f \in L^2(\boldsymbol{R}^n), |\alpha| \le m\}$$

と一致する. ここで, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ は多重指数であるとし,

$$D^\alpha f = (\frac{\partial}{\partial x_1})^{\alpha_1}(\frac{\partial}{\partial x_2})^{\alpha_2}\cdots(\frac{\partial}{\partial x_n})^{\alpha_n} f$$

は L^2 収束の意味での L^2 遍導関数であるとする. このとき, $H^m = H^m(\boldsymbol{R}^n)$ の内積 $(f,g)_{H^m}$ から定まるノルムは $W^{m,2}(\boldsymbol{R}^n)$ のノルム

$$||f||_m = (\sum_{|\alpha|\le m} ||D^\alpha f||_{L^2}^2)^{1/2}$$

と同値である.

次に, 局所ソボレフ空間の定義とその基本性質について考察する.

s は実数であるとする. $\boldsymbol{R}^n$ 上の複素数値可測関数 $f(x)$ が

$$H^s_{\mathrm{loc}} = H^s_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$$

に属するとは, $\boldsymbol{R}^n$ の任意のコンパクト集合 K に対して, $f_K(x) = f(x)\chi_K(x)$ が H^s に属することであるとする. ここで $\chi_K(x)$ は集合 K の特性関数を表す. 空間 H^s_{loc} は**局所ソボレフ空間**であるという.

いま, 任意の実数 s に対し, $L^{2,s}_{\mathrm{loc}} = L^{2,s}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ は $\boldsymbol{R}^n$ 上の複素数値可測関数で, $\boldsymbol{R}^n$ の任意のコンパクト集合 K に対し, 条件

$$\int_K (1+|x|^2)^s |f(x)|^2 dx < \infty$$

を満たすもの全体のつくるベクトル空間であると定義する. このとき, 関係式

$$L^{2,s}_{\mathrm{loc}} = L^{2,s}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n) = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}};\ \sqrt{(1+|x|^2)^s} f(x) \in L^2_{\mathrm{loc}}\}$$

が成り立つ. $L^{2,s}_{\mathrm{loc}}$ のセミノルム $\|f\|_{2,s,K}$ を, 関係式

$$\|f\|_{2,s,K} = \Big\{ \int_K (1+|x|^2)^s |f(x)|^2 dx \Big\}^{1/2}$$

によって定義する. ただし, K は $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合を表す.

このとき, $L^{2,s}_{\mathrm{loc}}$ の位相はセミノルムの系 $\{\|\cdot\|_{2,s,K};\ K$ は$\boldsymbol{R}^n$のコンパクト集合$\}$ によって定義される. これによって, $L^{2,s}_{\mathrm{loc}}$ はフレッシュ空間になる.

このとき, 任意の実数 s に対し,

$$H^s_{\mathrm{loc}} = H^s_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n) = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n);\ \mathcal{F}f \in L^{2,s}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)\}$$

が成り立つ. ただし, $\mathcal{F}f$ は f のフーリエ変換を表す.

特に, m が自然数のとき, 上に定義した局所ソレボフ空間 $H^m_{\mathrm{loc}} = H^m_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ は局所ソレボフ空間

$$W^{m,2}_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n) = \{f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n);\ D^\alpha f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n),\ |\alpha| \le m\}$$

と一致する. ここで, 多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ に対し, $D^\alpha f$ は, L^2 空間の場合と同様の記号であって, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\boldsymbol{R}^n)$ に対する L^2_{loc} 偏導関数を表す.

このとき, H^m_{loc} の位相を次のように定義する.

いま, $f \in L^2_{\mathrm{loc}}$ と $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合 K に対し, L^2_{loc} のセミノルム $\|f\|_K$ を関係式

$$\|f\|_K = (\int_K |f(x)|^2 dx)^{1/2}$$

によって定義する.

このとき, $f \in H^m_{\mathrm{loc}}$ と $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト集合 K に対し, H^m_{loc} のセミノルム $\|f\|_{m,K}$ を関係式

$$\|f\|_{m,K} = (\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha f\|^2_K)^{1/2}$$

によって定義する. これによって H^m_{loc} の位相はセミノルムの系 $\{\|f\|_{m,K};\ K$ は $\boldsymbol{R}^n$ のコンパクト部分集合$\}$ によって定義される. これによって, H^m_{loc} はフレッシュ空間になる.

4 自由粒子系

自然統計的現象の研究において, 物理系の状態を決めるシュレーディンガー方程式に現れるシュレーディンガー作用素が連続スペクトルをもつ場合には, 定常状態における物理系の状態を決めるシュレーディンガー方程式の解は L^2_{loc} 密度でなければならないことが知られている.

本節においては, シュレーディンガー作用素が連続スペクトルをもつ場合の例として 1 次元自由粒子系のシュレーディンガー方程式の解法を考える.

1 次元空間において自由運動をしている粒子を**自由粒子**であるという.

ここで考える物理系は 1 次元空間における自由粒子からなる集合 Ω であるとする.

物理系 $\Omega = \Omega(\mathcal{B}, P)$ は確率空間であるとする. その根元事象 ρ がこのような 1 個の自由粒子である. ρ の位置変数を $x = x(\rho)$ と表し, 運動量変数を $p = p(\rho)$ と表す.

このとき, 位置変数 x は 1 次元空間 $\boldsymbol{R}^1$ において変動し, 運動量変数 p は双対空間 $\boldsymbol{R}^1$ において変動する. このとき, $\boldsymbol{R}^1$ は自己双対であるから, $\boldsymbol{R}_1$ と $\boldsymbol{R}^1$ は同型である. したがって両者を同一視し, $\boldsymbol{R}^1 = \boldsymbol{R}_1$ を単に $\boldsymbol{R}$ と表す.

各自由粒子の質量は $m > 0$ であるとする. このとき, 各自由粒子はニュートンの運動方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

に従って運動している. したがって, 各自由粒子 ρ の全エネルギーは

$$E(\rho)=\frac{1}{2m}p(\rho)^2$$

に等しい.

この場合, 自由粒子系のシュレーディンガー作用素は連続スペクトルをもつことが後で証明される. したがって, 定常状態は一般自然確率分布状態であって, $x(\rho)$ の自然確率分布法則は L^2_{loc} 密度 $\psi(x)$ によって決定され, $p(\rho)$ の自然確率分布法則はそのフーリエ変換 $\hat{\psi}(p)$ によって決定される. L^2_{loc} 関数 $\psi(x)$ のフーリエ変換 $\hat{\psi}(p)$ は 2 節において定義されたものである。

すなわち, 自然統計物理学の用法に合わせて,

$$\hat{\psi}(p)=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-R}^{R}f(x)e^{-ipx/\hbar}dx$$

によって定義する. ただし, $\hbar=\dfrac{h}{2\pi}$ であるとし, h はプランクの定数を表す. ここで, 極限は L^2_{loc} 収束の意味の収束である. これは $\boldsymbol{R}$ の任意の閉区間 $S_R=[-R,R],(R>0)$ に対し, $\psi(x)$ の S_R への制限を $\psi_R(x)$ と表し, そのフーリエ変換を $\hat{\psi}_R(p)$ と表すとき, これは関係式

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_R(p)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_R(x)e^{-ipx/\hbar}dx\\&=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-R}^{R}\psi(x)e^{-ipx/\hbar}dx\end{aligned}$$

によって定義されていて, 等式

$$\hat{\psi}(p)=\lim_{R\to\infty}\hat{\psi}_R(p)$$

が成り立つ. ここで, 極限は L^2_{loc} 収束の意味の収束である.

このとき, 任意の $R>0$ と, $\boldsymbol{R}$ の任意の可測集合 A,B に対して, 基本統計公式

$$P(\{\rho\in\Omega;\ x(\rho)\in A\cap S_R\})=\frac{\displaystyle\int_{A\cap[-R,R]}|\psi_R(x)|^2dx}{\displaystyle\int_{-R}^{R}|\psi_R(x)|^2dx},$$

$$P(\{\rho\in\Omega;\ x(\rho)\in[-R,R],p(\rho)\in B\})=\frac{\displaystyle\int_{B}|\hat{\psi}_R(p)|^2dp}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}_R(p)|^2dp}$$

が成り立つ.

このとき, 局所エネルギー期待値 $\overline{E}_R$ は

$$\overline{E}_R=E_R[\frac{1}{2m}p(\rho)^2]=\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2m}p^2|\hat{\psi}_R(p)|^2dp}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\hat{\psi}_R(p)|^2dp}=\frac{\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{\hbar^2}{2m}\left|\frac{d\psi_R(x)}{dx}\right|^2dx}{\displaystyle\int_{-R}^{R}|\psi_R(x)|^2dx}$$

によって与えられる. さらに, $\psi_R(x)$ の導関数は L^2 導関数, あるいは L^2_{loc} 導関数であるとする.

このとき, この局所エネルギー期待値を

$$J_R(\psi_R)=\frac{\displaystyle\int_{-R}^{R}\frac{\hbar^2}{2m}\left|\frac{d\psi_R(x)}{dx}\right|^2dx}{\displaystyle\int_{-R}^{R}|\psi_R(x)|^2dx}$$

と表して, これを**局所エネルギー汎関数**であるという.

ここで, 次の局所変分原理を考える.

局所変分原理　物理系のシュレーディンガー作用素が連続スペクトルをもつ場合に, 定常状態は $\psi \in L^2_{\rm loc}$ 密度であって, 各 $R > 0$ に対し, $\psi_R(x)$ が局所エネルギー汎関数 $J_R(\psi_R)$ の停留関数であるような状態として実現される.

この局所変分原理を用いて, この物理系に対して許容し得 $L^2_{\rm loc}$ 密度の中から物理的に実際に実現される $L^2_{\rm loc}$ 密度を選び出す. そこで, 次の局所変分問題を考える.

局所変分問題　$\{R_j\}$ は正の実数の単調増大列で, $\displaystyle\lim_{j\to\infty} R_j = \infty$ であるとする.

このとき, 任意の非負実数 $\mathcal{E} \geq 0$ に対し, 局所 2 乗可積分関数 $\psi^{(\mathcal{E})}(x)(\neq 0)$ を, 次の条件 (1)~(3) を満たすように決定せよ;

(1)　$\psi^{(\mathcal{E})}|_{[-R_j,R_j]} = \psi_j,\ (j = 1, 2, \cdots).$

(2)　$\psi_{j+1}|_{[-R_j,R_j]} = \psi_j,\ (j = 1, 2, \cdots).$

(3)　$j \geq 1$ に対し, 汎関数

$$J_j[\psi_j] = \frac{\displaystyle\int_{-R_j}^{R_j} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \left| \frac{d\psi_j(x)}{dx} \right|^2 \right) dx}{\displaystyle\int_{-R_j}^{R_j} \left| \psi_j(x) \right|^2 dx}$$

は停留値である.

この局所変分問題を解くことによって, 実際に実現される $L^2_{\rm loc}$ 密度 $\psi^{(\mathcal{E})}(x) \in L^2_{\rm loc}$ はシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi^{(\mathcal{E})}(x)}{dx^2} = \mathcal{E}\psi^{(\mathcal{E})}(x),\ (-\infty < x < \infty)$$

の解であることがわかる.

各 $\mathcal{E} \geq 0$ に対し, 二つの独立な一般固有化関数が存在する. それ故に, 各スペクトル $\mathcal{E} \geq 0$ は縮退している. 特に, $\mathcal{E} = 0$ のときには, 重複度が 2 である.

いま, パラメーターを変換して, $\mathcal{E} \geq 0$ に対し,

$$k^2 = \frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2},\ (-\infty < k < \infty)$$

とおくと, 規格化された一般化固有関数

$$\psi^{(k)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx},\ (-\infty < x < \infty)$$

を得る. すなわち, これは次のシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi^{(k)}(x)}{dx^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\psi^{(k)}(x),\ (-\infty < x < \infty)$$

の解である.

さらに, パラメーターの変換 $p=\hbar k$ を行って,

$$\psi^{(p)}(x)=\frac{1}{\sqrt{\hbar}}\psi^{(k)}(x),\ (p=\hbar k)$$

と表すと,

$$\psi^{(p)}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}e^{ipx/\hbar},\ (\mathcal{E}=\frac{p^2}{2m})$$

が成り立つ. これはシュレーディンガー方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi^{(p)}(x)}{dx^2}=\frac{p^2}{2m}\psi^{(p)}(x),\ (-\infty<x<\infty)$$

を満たし, 一般化固有関数になっている. $\psi^{(p)}(x)$ は実際に局所変分問題の解になっている.
これに対し, 次の規格化条件と完全性条件が成り立っている.

定理 4.1 上の記号を用いると, 次の (1), (2) が成り立つ:

(1) (規格化条件) 次の等式が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\psi^{(p')}}\psi^{(p)}(x)dx=\delta(p'-p),\ (-\infty<p,p'<\infty).$$

(2) (完全性条件) 次の等式が成り立つ:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\psi^{(p)}(x')}\psi^{(p)}(x)dp=\delta(x'-x),\ (-\infty<x,x'<\infty).$$

さらに, フーリエ変換の理論によって次の一般展開定理が成り立つ.

定理 4.2 任意の $\psi(x)\in L^2$ に対して, $c(p)\in L^2$ が存在して,

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}c(p)e^{ipx/\hbar}dp,$$

$$c(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ipx/\hbar}dx$$

が成り立つ. ただし,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2dx=1$$

であるとする.

このとき, 物理系 Ω のエネルギー期待値は

$$\overline{E}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p^2}{2m}|\hat{\psi}(p)|^2dp=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p^2}{2m}|c(p)|^2dp$$

によって与えられる.
ここで,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|c(p)|^2dp=1$$

が成り立っている.

このとき, 変数分離の方法の逆をたどって, 時間発展のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2},\ (-\infty<x<\infty)$$

を得る. このとき, 時間 t に依存する L^2 関数

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(p)\psi^{(p)}(x,t)dp,$$

$$\psi^{(p)}(x,t)=\psi^{(p)}(x)\exp[-i\frac{p^2}{2m}t]$$

は次のシュレーディンガー方程式に対するコーシー問題の解である.

定理 4.3 上の記号を用いる. 任意の L^2 密度 $\psi(x)$ に対し, 次のコーシー問題

$$i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2},$$

$$\psi(x,0)=\psi(x),\ (-\infty<x<\infty,0<t<\infty)$$

の解 $\psi(x,t)$ が存在する. $\psi(x,t)$ は時間 t に依存する L^2 密度で, 関係式

$$\psi(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}c(p)\psi^{(p)}(x,t)dp,$$

$$\psi^{(p)}(x,t)=\psi^{(p)}(x)\exp[-i\frac{p^2}{2m}t],$$

$$c(p)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)e^{-ipx/\hbar}dx$$

によって定義される.

自由粒子系のモデルを用いて, 単原子分子からなる理想気体の比熱についての自然統計物理学的考察を行うことができる.

これによって, このような理想気体の定積比熱 C_V とモル比熱 C_M が

$$C_V=\frac{3}{2}Nk_B,\ C_M=\frac{3}{2}N_Ak_B=\frac{3}{2}R$$

に等しいことが証明される. ここで, N は体積 V の領域に存在する分子数を表し, N_A はアボガドロ数を表し, k_B はボルツマン定数を表し、R は気体定数を表す.

いま, $N=nN_A$ とおくと, 関係式

$$C_V=nC_M$$

を得る. この等式は理想気体の比熱に対してすでに知られているものであるが, 原子論的自然哲学に基づいてこの等式の真の意味がここで解明されたということである.

本節の結果についての詳細に関しては, 伊東 [3] と Ito-Uddin[9] を参照してもらいたい.

参考文献

[1] 伊藤清三, ルベーグ積分入門, 裳華房, 1963.

[2] 伊東由文, 量子力学の数学的原理, 新理論, サイエンスハウス, 2000.

[3] ——, 新量子論, I, サイエンスハウス, 2006.

[4] ——, 新量子論, II, サイエンスハウス, 2007.

[5] ——, 自然統計物理学の基本原理, サイエンスハウス, 2009.

[6] ——, 自然統計物理学, プレプリント, 2009.

[7] ——, 自然哲学原論, プレプリント, 2009.

[8] ——, 自然統計物理学の数学的基礎, プレプリント, 2013.

[9] Y. Ito and Md Sharif Uddin, *New Quantum Theory and New Meaning of Specific Heat of an Ideal Gas*, J. Math. Univ. Tokushima, **38**(2004), 29-40.

[10] 黒田成俊, 関数解析, 共立出版株式会社, 1980.

伊東由文 (徳島大学名誉教授, 理学博士)
770-8073　徳島市八万町上福万 209-15
e-mail address : yoshifumi@md.pikara.ne.jp
URL : http://wwwa.pikara.ne.jp/yoshifumi

EXISTENCE AND MEAN APPROXIMATION OF FIXED POINTS OF GENERALIZED HYBRID NON-SELF MAPPINGS IN HILBERT SPACES

TOSHIHARU KAWASAKI

College of Engineering, Nihon University
toshiharu.kawasaki@nifty.ne.jp

In this talk, we show a fixed point theorem for widely more generalized hybrid non-self mappings in Hilbert spaces. Furthermore, we show mean convergence theorems of Baillon's type for widely more generalized hybrid non-self mappings in a Hilbert space.

References

[1] M. Hojo, W. Takahashi, and J.-C. Yao, *Weak and strong mean convergence theorems for super hybrid mappings in Hilbert spaces*, Fixed Point Theory **12** (2011), 113–126.
[2] T. Kawasaki and W. Takahashi, *Existence and mean approximation of fixed points of generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **14** (2013), 71–87.
[3] T. Kawasaki and T. Kobayashi, *Existence and mean approximation of fixed points of generalized hybrid non-self mappings in Hilbert spaces*, Scientiae Mathematicae Japonicae, to appear.
[4] P. Kocourek, W. Takahashi, and J.-C. Yao, *Fixed point theorems and weak convergence theorems for generalized hybrid mappings in Hilbert spaces*, Taiwanese Journal of Mathematics **14** (2010), 2497–2511.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H10.
Key words and phrases. Fixed point theorem, mean convergence theorem, Hilbert space, non-self mapping, generalied hybrid mapping, widely generalized mapping, widely more generalized mapping.

素朴にフーリエ解析の入り口へ

米田　薫　（大阪府立大学・名誉教授）

2013 年 9 月 1 日

落語には「まくら」と呼ばれる出だしの部分がある。本筋に入る前に、演者がさりげなく準備などをするところである。準備運動のような感じもする部分である。落語家はこの「まくら」に工夫をこめる。本筋への入り口であり、客をぐいっと話に引き込んでいく重要な役割を担っている。

さて、学生を前にして授業を始めるに、どのように始めればいいのか。これは、学生にこれから話すテーマに関心を抱かせようと思っている教師なら、いつも考えていることではないだろうか。

今、フーリエ解析を学生に教えることになったとする。このとき何から話し始めればいいのだろうか。ちなみに図書館や本屋で数学関係の棚を見ると、フーリエ解析の入門書は結構揃っている。手にとって中身を見る。書き出しがフーリエ級数、フーリエ変換の定義があって、これを使って微分方程式、特に熱伝導方程式についての解説があって、それを解いてみせていたりする。多くの学生は、この辺りをフーリエ解析の出発点としていると思われる。しかし、フーリエ解析が、学生が学んできた微積や線形数学とどのようにつながっているか、そこからどのように発展したものかについての解説はほとんど見受けない。学生は「これこれ」をフーリエ級数という、「これこれ」をフーリエ変換という、「これこれ」の定義は「これ」、といったところからフーリエ解析を学び始めているのではないか。そして、フーリエ解析の応用計算をたっぷり学ぶのが工学系の学生であり、それが実用としての道具となっているフーリエ解析の姿のなのだろう。なぜフーリエ解析がこんなに有効なのかにつての解説がぬけてはいないか。学生はフーリエ解析の本筋にいきなり飛び込まされているのではないか。ここにフーリエ解析の「まくら」が要ると思われるのだが・・・。

線形数学ではベクトルの直交分解を学ぶ。そこでのフーリエ係数は内積で定義されている。定義域が $(-\infty, \infty)$ である関数を無限次元のベクトルとみれば、内積はふたつの

$L^2(-\infty,\infty)$ の関数で定義されると考えるのは自然であろう。すると、フーリエ変換

$$\hat{f}(y) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-iyx}dx$$

では　$f(x)$ や e^{-iyx} が $L^2(-\infty,\infty)$ 関数であると思い込むのも自然ではないか。しかし、これは当然なりたたない。ここを見ても線形数学をフーリエ解析につなぐのは簡単ではない。

　このシンポジウムでは有限次元のフーリエ解析から、いわゆるフーリエ級数やフーリエ変換への橋渡しについて考える。そのつなぎの部分が、意外に含蓄のあるところだということが見えてくるように、わたしには感じられるのである。

　2009 年に九州工業大学でフーリエ解析についてお話をした。そのときは上記のような思いがあった。その後、この思いをさらに明確な形にまとめなければならないと考えていた。今回のシンポジウムで現在までのまとめを述べる。

A note on BLO martingales

Eiichi Nakai (Ibaraki University)
Gaku Sadasue(Osaka Kyoiku University)

In [2], Coifman and Rochberg gave a characterization of BMO functions on $\mathbb{R}^n$. They showed that a locally integrable function f is in BMO if and only if there exist non-negative constants α, β, non-negative locally integrable functions g, h and a bounded function b such that $f = \alpha \log Mg - \beta \log Mh + b$ where M stands for the Hardy-Littlewood maximal operator.

To prove this characterization theorem, they introduced the notion of BLO functions, and showed the following two facts. The first is that any BMO function f is represented as a difference of BLO functions, modulo bounded functions. They showed it by using Carleson's representation of BMO functions. The second is that f is in BLO if and only if $f = \alpha \log Mg + b$ where α, g, b are the same as above. They showed it by the use of the relation between BLO functions and A_1 weights.

In martingale theory, Varopoulos ([7], [8]) defined the class BLO for continuous martingales. He introduced the notion of γ-graded sequences of stopping times, and gave a representation theorem of BLO martingales in terms of γ-graded martingales. He also showed that BMO martingales are represented as a difference of γ-graded martingales, modulo bounded martingales.

Later, Shiota ([5], [6]) introduced the notion of BLO martingales for more general continuous parameter martingales including some discontinuous martingales. He extended Varopoulos' results to this general martingales. He also gave Coifman-Rochberg type characterization of BMO martingales.

For discrete parameter martingales, the notion of BLO martingales was introduced by Long [3]. He showed several basic properties of BLO martingales.

We recall Long's definition of BLO martingales.

Let $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ be a probability space, and $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ a nondecreasing sequence of sub-σ-algebras of $\mathcal{F}$ such that $\mathcal{F} = \sigma(\bigcup_n \mathcal{F}_n)$. The conditional expectation operator relative to $\mathcal{F}_n$ is denoted by E_n.

A sequence of integrable random variables $f = (f_n)_{n\geq 0}$ is called a martingale relative to $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$ if, for every n, f_n is $\mathcal{F}_n$ measurable and satisfies

$$E_n[f_m] = f_n \quad (n \leq m).$$

For a martingale $f = (f_n)_{n\geq 0}$ relative to $\{\mathcal{F}_n\}_{n\geq 0}$, denote its martingale difference by $d_n f = f_n - f_{n-1}$.

Definition 1. Let $f = (f_n)_{n \geq 0}$ be a real valued uniformly integrable martingale relative to $\{\mathcal{F}_n\}_{n \geq 0}$. We say f is in BLO if there exists $C > 0$ such that

$$f_n \leq f + C, \tag{1}$$

$$|d_n f| \leq C \tag{2}$$

for all n.

We note that, when each $\mathcal{F}_n$ is generated by countable atoms, (1) means

$$\sup_{B \in A(\mathcal{F})} (f_B - \operatorname*{ess\,inf}_B f) \leq C,$$

where $A(\mathcal{F})$ denotes the set of all $\mathcal{F}_n$ atoms and $f_B = \int_B f \, dP/P(B)$.

In this talk, we will give some properties of BMO and BLO martingales.

References.

[1] L. Carleson, Two remarks on H^1 and BMO, Advances in Math. 22 (1976), no. 3, 269–277.

[2] R. R. Coifman, R. Rochberg, Another characterization of BMO, Proc. Amer. Math. Soc. 79 (1980), no. 2, 249–254.

[3] R. L. Long, Martingale spaces and inequalities, Peking University Press, Beijing, 1993, ISBN: 7-301-02069-4

[4] E. Nakai, G. Sadasue, Pointwise multipliers on martingale Campanato spaces, preprint. http://arxiv.org/abs/1304.5736

[5] Y. Shiota, On a decomposition of BMO-martingales. Tohoku Math. J. (2) 33 (1981), no. 4, 515–520.

[6] Y. Shiota, Certain decompositions of BMO-martingales. Tohoku Math. J. (2) 33 (1981), no. 4, 561–565.

[7] N. Th. Varopoulos, A probabilistic proof of the Garnett-Jones theorem on BMO. Pacific J. Math. 90 (1980), no. 1, 201–221.

[8] N. Th. Varopoulos, The Helson-Szegö theorem and A_p-functions for Brownian motion and several variables. J. Funct. Anal. 39 (1980), no. 1, 85–121.

[9] F. Weisz, Martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis, Lecture Notes in Mathematics, 1568, Springer-Verlag, Berlin, 1994.

作用素の証明に何が必要かの考察

Yoshihiro Sawano (Tokyo Metropolitan University)
joint work with Mitsuo Izuki (Tokyo Denki University)

$\mathbb{R}^n$ 上の Morrey 空間，Orlicz 空間などの量を記述する関数空間が与えられた時に，そこの関数空間での作用素の有界性を示すことは調和解析の研究課題としては典型的である．作用素の有界性を何らかの形で定式化して，証明をするというのが一般的な流れであるが，証明の本質は何かを考えたい．

この種の議論でよくあるのは次の条件である．

例 1. X をこれらの空間の一つとするとき，何らかの条件とハーディー・リトルウッドの極大作用素 M に関して，

$$\|Mf\|_X \leq C\|f\|_X$$

が成立するならば，特異積分作用素 T は有界である．

$X = L^\infty$ が示すように，無条件でこの命題が成り立つわけではない．Boyd index などを使って記述されることは昔から知られている．また，M の有界性を皮切りに種々の結果が得られることは経験的に分かっている．そのことから，M の有界性そのものを仮定した理論はある意味で，トートロジーと考えられる．

講演者の最終的な目的は一定の条件を満たしている関数空間に対する簡便な判定律もしくは必要十分条件を得ることである．もちろん，たとえば，ハーディー・リトルウッドの極大作用素の有界性，特異積分作用素の有界性など何が成立するかを決定しないとこの種の問題は必要十分条件を与えることは不可能であるが，とにかく，調和解析に現れる作用素の有界性や何らかの特徴づけなどをするに際して必要な条件は何かを考察する．

以上は非常に漠然とした内容であるが，本講演では

帯域制限関数のサンプリング定理が成立するための必要十分条件

をハーディー・リトルウッドの極大作用素の言葉を用いないで記述することを目標とする．

Mitsuo Izuki
Department of Mathematics
Tokyo Denki University
Adachi-ku, Tokyo 120-8551, Japan
e-mail: `izuki@mail.dendai.ac.jp`

Yoshihiro Sawano
Department of Mathematics and Information Science
Tokyo Metropolitan University
1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji, Tokyo 192-0397, Japan
e-mail: `ysawano@tmu.ac.jp`

Directional maximal operators and radial weights on the plane

Hiroki Saito (Tokyo Metropolitan University)*1
Hitoshi Tanaka (The University of Tokyo)*2

Introduction and Results

Fix $N \gg 1$. For a real number $a > 0$ let $\mathcal{B}_{a,N}$ be the family of all cylinders in the n-dimensional Euclidean space $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, which are congruent to the cylinders with height Na and width a, but with arbitrary directions and centers. For a locally integrable function f on $\mathbb{R}^n$ the " small" Kakeya maximal operator $\mathcal{K}_{a,N}$ is defined by

$$\mathcal{K}_{a,N}f(x) := \sup_{x \in R \in \mathcal{B}_{a,N}} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)|\, dy$$

and the Kakeya maximal operator $\mathcal{K}_N$ is defined by

$$\mathcal{K}_N f(x) := \sup_{a>0} \mathcal{K}_{a,N} f(x),$$

where $|R|$ denotes the Lebesgue measure of R. It is conjectured that $\mathcal{K}_N$ is bounded on $L^n(\mathbb{R}^n)$ with the norm which grows no faster than $O((\log N)^{\alpha_n})$ for some $\alpha_n > 0$ as $N \to \infty$. In the case $n = 2$, this conjecture was solved affirmatively by Córdoba [5] with the exponent $\alpha_2 = 2$. In the higher dimensional case, $n > 2$, these estimates were proved so far only for some restricted class of functions.

A more powerful but complicated maximal operator has been studied on the plane. Let Ω be a set of unit vectors in $\mathbb{R}^2$ with cardinality N. For a locally integrable function f on $\mathbb{R}^2$, the directional maximal operator M_Ω is defined by

$$M_\Omega f(x) := \sup_{r>0, \omega \in \Omega} \frac{1}{2r} \int_{-r}^{r} |f(x + t\omega)|\, dt.$$

Strömberg [14] showed that if Ω is an equidistributed set of directions with cardinality N then

$$\|M_\Omega f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \log N \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}. \tag{1}$$

Notice that (1) yields the sharp $L^2(\mathbb{R}^2)$ estimate of the Kakeya maximal operator $\mathcal{K}_N$, since we have

$$\mathcal{K}_N f(x) \leq C M_\Omega f(x).$$

Katz [8, 9] established that (1) holds without the condition that Ω is an equidistributed set of directions.

Alfonseca, Soria and Vargas [1, 2] proposed a new method to study this operator and they got a simple proof of the Katz result. In this talk we investigate the weighted

キーワード : almost-orthogonality principle; directional maximal operator; radial weight; strong-type estimate.
*1 e-mail: `j1107703@gmail.com`
*2 e-mail: `htanaka@ms.u-tokyo.ac.jp`

version of their method and we obtain a weighted version of the Katz result. In order to state our theorem, we first introduce some notation.

Let Ω be a subset of $[0, \pi/4)$ and w be a weight on $\mathbb{R}^2$. We define the weighted directional maximal operator $M_{\Omega,w}$, acting on locally integrable functions f on $\mathbb{R}^2$, by

$$M_{\Omega,w}f(x) := \sup_{x\in R\in\mathcal{B}_\Omega} \frac{1}{w(R)} \int_R |f(y)|w(y)\,dy,$$

where $\mathcal{B}_\Omega$ denotes the basis of all rectangles with longest side forming an angle θ with the x-axis for some $\theta \in \Omega$, and $w(R)$ denotes $\int_R w$. Let $\Omega_0 = \{\theta_1 > \theta_2 > \cdots > \theta_j > \cdots\}$ be an ordered subset of Ω. We take $\theta_0 = \pi/4$ and consider, for each $j \geq 1$, sets $\Omega_j = [\theta_j, \theta_{j-1}) \cap \Omega$, such that $\theta_j \in \Omega_0$ for all j. Assume also that $\Omega = \bigcup \Omega_j$. To each set Ω_j, $j = 0, 1, 2, \ldots$, we associated the corresponding basis $\mathcal{B}_j$. We define the weighted maximal operators associated to each basis for Ω_j by

$$M_{\Omega_j,w}f(x) := \sup_{x\in R\in\mathcal{B}_j} \frac{1}{w(R)} \int_R |f(y)|w(y)\,dy, \quad j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Throughout this talk we always assume that the weight w is a radial weight: $w(x) = w_0(\|x\|_{l^2}) = w_0(|x|)$ for some non-negative function w_0 on $\mathbb{R}_+$. We assume further that w_0 satisfies the following two conditions:
Doubling condition: For all $0 \leq r_1 \leq r_1' \leq r_2' \leq r_2 < \infty$ with $r_2 - r_1 = 2(r_2' - r_1')$,

$$\int_{r_1}^{r_2} w_0(r)\,dr \leq C \int_{r_1'}^{r_2'} w_0(r)\,dr; \tag{2}$$

Supremum condition: For all $0 < r_1 < r_2 < \infty$,

$$\sup_{r_1<r<r_2} w_0(r) \leq \frac{C}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} w_0(r)\,dr. \tag{3}$$

Notice that r^a with $a > 0$ satisfies these conditions.

The main result of this talk is the following:

Theorem 1 *Let w be a weight satisfying* (2) *and* (3). *Then there exists a constant C independent of Ω such that*

$$\|M_{\Omega,w}\|_{L^2(w)\to L^2(w)} \leq \sup_{j\geq 1} \|M_{\Omega_j,w}\|_{L^2(w)\to L^2(w)} + C\|M_{\Omega_0,w}\|_{L^2(w)\to L^2(w)},$$

where $\|T\|_{L^2(w)\to L^2(w)}$ denotes the operator norm $T : L^2(w) \to L^2(w)$.

Corollary 2 *Let Ω be a set of unit vectors on $\mathbb{R}^2$ with cardinality $N \gg 1$ and $w(x) = |x|^a$, $a > 0$. Then there exists a constant C depending on only a such that*

$$\|M_{\Omega,w}\|_{L^2(w)\to L^2(w)} \leq C \log N.$$

参考文献

[1] A. Alfonseca, F. Soria, and A. Vargas, *A remark on maximal operators along directions in* $\mathbb{R}^2$, Math. Res. Lett. **10** (2003), no. 1, 41-49

[2] A. Alfonseca, F. Soria, and A. Vargas, *An almost-orthogonality principle in* L^2 *for directional maximal functions*, Harmonic analysis at Mount Holyoke(South Hadley, MA, 2001), 1-7, Contemp.Math.,**320**, Amer.Math.Soc,. Providence, RI, 2003.

[3] A. Carbery, E. Hernández and F. Soria, *Estimates for the Kakeya maximal operator on radial functions in* $\mathbb{R}^n$, in Harmonic Analysis(S. Igari, ed.), ICM-90 Satellite Conference Proceedings, Springer-Verlag, Tokyo, 1991, 41-50.

[4] A. Carbery, *Covering Lemmas Revisited*. Proc. Edinburgh Math. Soc. (2) **31** (1988), no. 1, 145-150.

[5] A. Córdoba, *The Kakeya maximal function and the spherical summation multiplier*, Amer. J. math., **99** (1977), no. 1, 1-22.

[6] J. Duoandikoetxea and V. Naibo, *The universal maximal operator on special classes of functions*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), no. 5, 1351-1369.

[7] J. García-Cuerva and J.L. Rubio de Francia,, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland, Amsterdam, 1985.

[8] N.H. Katz, *Maximal operators over arbitrary sets of directions*, Duke Math.J. **97** (1999), no. 1, 67-79.

[9] N.H. Katz, *Remarks on maximal operators over arbitrary sets of directions*, Bull. London Math. Soc., **31** (1999), no. 6, 700-710.

[10] D.S. Kurtz, *Littlewood-Paley and multiplier theorems on weighted* L^p *spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **259** (1980), no. 1, 235-254 .

[11] S. Igari, *On Kakeya's maximal function*, Proc. Japan Acad. Ser. A, **62** (1986), no. 8, 292-293.

[12] H. Tanaka, *An elementary proof of an estimate for the Kakeya maximal operator on functions of product type*, Tohoku Math. J. (2), **48** (1996), no. 3, 429-435.

[13] H. Tanaka, *An estimate for the Kakeya maximal operator on functions of square radial type*, Tokyo J. Math., **22** (1999), no. 2, 391-398.

[14] J.-O. Strömberg, *Maximal functions associated to rectangles with uniformly distributed directions*, Ann. Math. (2), **107** (1978), no. 2, 399-402.

2 次元実ノルム空間上の Tingley 問題について

田中亮太朗 (新潟大)

二つのノルム空間の間の全射等距離写像は affine であるという事実は, Mazur-Ulam の定理としてよく知られている. Mankiewicz [7] は, 二つの連結開集合もしくは凸体の間の全射等距離写像が affine 拡張可能であることを示すことでこれを一般化した. これらはいずれも, 写像の距離に関する性質がその代数的な構造を決定するという結果であるが, Mankiewicz の結果から, 写像が affine であることを結論するためには, 空間全体でなく例えば単位球上などで等距離性を仮定すれば十分であることがわかる. この考察のもとに, Tingley [10] は 1987 年に次の問題を提起した.

Problem. *X, Y をノルム空間とし, S_X, S_Y をそれぞれ単位球面とする. そのとき, S_X から S_Y への全射等距離写像は, 線形拡張可能か?*

この問題は, 線形拡張問題 (isometric extension problem) としても知られており, 現在までに様々な手法で研究が行われてきた (e.g. [1, 3, 4, 5, 6]). しかし, 問題の肯否も含めてわかっていないことは多く, 2 次元空間上においてさえも解決には至っていない.

Tingley 問題に取り組む際には,

$$Tx = \begin{cases} \|x\| T_0 \dfrac{x}{\|x\|} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

によって定められる $T_0 : S_X \to S_Y$ の自然な拡張が線形であることを示すのが一般的である. Wang [11] はこの方法を用いて 2 次元狭義凸ノルム空間上の Tingley 問題を研究し, それが肯定的に解決されるためのいくつかの十分条件を得ている.

本講演では, 一般化された直交性の概念である isosceles orthogonality を用いることで, 自然な拡張の概念を用いない 2 次元空間上の Tingley 問題に対する新しいアプローチを提案するとともに, それを基にして, $\mathbb{R}^2$ 上の symmetric absolute normalized norms における Tingley 問題を考える. ここで, $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは, すべての $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|(x, y)\| = \|(|x|, |y|)\|$ が成立することをいい, $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$ のとき normalized という. また, symmetric であるとは, すべての $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|(x, y)\| = \|(y, x)\|$ が成立することをいう. $AN_2 = \{\|\cdot\| : \text{absolute normalized norm on } \mathbb{R}^2\}$, $AN_2^S = \{\|\cdot\| : \text{symmetric absolute normalized norm on } \mathbb{R}^2\}$ とする. このとき,

$$\Psi_2 = \{\psi : \text{convex function on } [0,1] \text{ satisfying } \max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1\},$$
$$\Psi_2^S = \{\psi \in \Psi_2 : \psi(t) = \psi(1-t) \text{ for all } t \in [0,1]\}$$

とすると, AN_2 と Ψ_2 および AN_2^S と Ψ_2^S はそれぞれ $\psi(t) = \|(1-t, t)\|_\psi$ という等式の下で 1 対 1 に対応することが知られている (cf. [2, 8]). ここで, $\psi \in \Psi_2$ に対応するノルム

$\|\cdot\|_\psi \in AN_2$ は

$$\|(x,y)\|_\psi = \begin{cases} (|x|+|y|)\psi\left(\dfrac{|y|}{|x|+|y|}\right) & \text{if } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{if } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

によって与えられる.

参考文献

[1] G. An, *Isometries on unit sphere of* (l^{β_n}), J. Math. Anal. Appl., **301** (2005), 249–254.

[2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[3] L. Cheng and Y. Dong, *On a generalized Mazur-Ulam question: Extension of isometries between unit spheres of Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **377** (2011), 464–470.

[4] G. G. Ding, *The isometric extension problem in the unit spheres of* $l^p(\Gamma)$ $(p > 1)$ *type spaces*, Sci. China Ser. A, **46** (2003), 333–338.

[5] G. G. Ding and J. Z. Li, *Sharp corner points and isometric extension problem in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **405** (2013), 297–309.

[6] V. Kadets and M. Martín, *Extension of isometries between unit spheres of finite-dimensional polyhedral Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl., **396** (2012), 441–447.

[7] P. Mankiewicz, *On extension of isometries in normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **20** (1972), 367–371.

[8] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *Von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on* $\mathbb{C}^2$, J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515–532.

[9] R. Tanaka, *Tingley's problem on symmetric absolute normalized norms on* $\mathbb{R}^2$, submitted.

[10] D. Tingley, *Isometries of the unit sphere*, Geom. Dedicata, **22** (1987), 371–378.

[11] R. D. Wang, *Linear extension of isometries between the unit spheres of two-dimensional strictly convex normed spaces*, Acta. Math. Sinica (Chin. Ser.), **51** (2008), 847–852.