A note on the fractional integral operators on weighted Morrey spaces

Takeshi Iida (福島工業高等専門学校)

I_α を通常の分数冪積分作用素とする。Morrey 空間 $\mathcal{M}^{p_0}_p(\mathbb{R}^n)$ を定義する。

Definition 1. $0 < p \le p_0 < \infty$ とする。$\mathcal{M}^{p_0}_p(\mathbb{R}^n)$ はノルムを

$$\|f\|_{\mathcal{M}^{p_0}_p} := \sup_{\substack{Q\subset\mathbb{R}^n \\ Q:cube}} |Q|^{\frac{1}{p_0}} \left(\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

と定める。このとき，$f \in \mathcal{M}^{p_0}_p(\mathbb{R}^n)$ は $\|f\|_{\mathcal{M}^{p_0}_p} < \infty$ によって定義する。

このとき，Adams の不等式 [1] が成り立つことが知られている。

Theorem A. $0 < \alpha < n,\ 1 < p \le p_0 < \infty,\ 0 < q \le q_0 < \infty$ とする。このとき，

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$$

とすると

$$\|I_\alpha f\|_{\mathcal{M}^{q_0}_q} \le C\,\|f\|_{\mathcal{M}^{p_0}_p}.$$

一方，Olsen の不等式 [4] が成り立つことも知られている。

Theorem B. $0 < \alpha < n,\ 1 < p \le p_0 < \frac{n}{\alpha},\ 1 < q \le q_0 < \infty,\ 1 < r \le r_0 < \infty,\ r_0 \ge \frac{n}{\alpha}$ とする。このとき，

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$$

とする。さらに $\|g\|_{\mathcal{M}^{r_0}_q} < \infty$ と仮定すると，次が成り立つ：

$$\|g(I_\alpha f)\|_{\mathcal{M}^{q_0}_q} \le \|g\|_{\mathcal{M}^{r_0}_q}\,\|f\|_{\mathcal{M}^{p_0}_p}.$$

また，Muckenhoupt-Wheeden [3] は次の定理を示した:

Theorem C. $0 < \alpha < n,\ 1 < p < \frac{n}{\alpha},\ \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$ とする。

$$\|(I_\alpha f)w\|_{L^q} \le C\,\|fw\|_{L^p}.$$

が成り立つことと，

$$[w]_{A_{p,q}} := \sup_{\substack{Q\subset\mathbb{R}^n, \\ Q:cube}} \left(⨍_Q w(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(⨍_Q w(x)^{-p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

が成り立つことは必要十分条件である。

[2] では，これら 3 つの定理を系とする定理が示された：

Theorem D. $0 < \alpha < n,\ 1 < p \le p_0 < \frac{n}{\alpha},\ 1 < q \le q_0 < \infty,$

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{q}{q_0} = \frac{p}{p_0}$$

とする。更に $v^q \in A_\infty(\mathbb{R}^n),\ w^{-p'} \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とし，$a > 1$ に対して

$$[v, w] = \sup_{Q \subset Q'} \left(\frac{|Q|}{|Q'|}\right)^{\frac{1}{aq_0}} |Q'|^{\frac{1}{r_0}} \left(⨍_Q v(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(⨍_{Q'} w(x)^{-p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

が成り立つと仮定する。このとき，次の不等式が成り立つ。

$$\|(I_\alpha f) v\|_{\mathcal{M}^{q_0}_q} \le C[v, w] \cdot \|f w\|_{\mathcal{M}^{p_0}_p}.$$

この一連の不等式に現れる指数の関係式

$$\frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} - \frac{\alpha}{n}, \quad \frac{1}{q_0} = \frac{1}{p_0} + \frac{1}{r_0} - \frac{\alpha}{n}$$

は，重みの条件に取り込むことができることが判明した。，そのため，今までより簡潔な不等式を得る：

Theorem 1. $0 < \alpha < n,\ 1 < p \le p_0 < \infty,\ 1 < q \le q_0 < \infty,\ p_0 \le q_0,\ a > 1,\ \frac{p_0}{q_0} = \frac{p}{q},\ v^q \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$ $w^{-p'} \in A_\infty(\mathbb{R}^n)$ とする。さらに

$$[v, w] := \sup_{Q \subset Q'} \left(\frac{|Q|}{|Q'|}\right)^{\frac{1}{aq_0}} |Q'|^{\frac{1}{q_0} - \frac{1}{p_0} + \frac{\alpha}{n}} \left(⨍_Q v(x)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(⨍_{Q'} w(x)^{-p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} < \infty.$$

を仮定する。このとき，

$$\|(I_\alpha f)\, v\|_{\mathcal{M}^{q_0}_q} \le C[v, w]\, \|f w\|_{\mathcal{M}^{p_0}_p}.$$

が成り立つ。

References

[1] D. Adams, *A note on Riesz potentials*, Duke Math. J., 42 (1975), 765-778.

[2] T. Iida, E. Sato, Y. Sawano and H. Tanaka, *Weighted norm inequalities for multilinear fractional operators on Morrey spaces*, Studia Math., 205 (2011), 139-170.

[3] B. Muckenhoupt and R. Wheeden, *Weighted norm inequalities for fractional integrals*, Trans. Amer. Math. Soc., 192, (1974), 261-274.

[4] P. Olsen, *Fractional integration, Morrey spaces and Schrödinger equation*, Comm. Partial Differential Equations, 20, (1995), 2005-2055.

Takeshi Iida
Department of General Education,
Fukushima National College of Technology,
Fukushima, 970-8034, Japan
E-mail address: tiida@fukushima-nct.ac.jp

空間・時間・物質
物理現象の新しい理解に向けて

伊東由文著

序

どのようにして物理現象を理解できるか．物理現象を理解するということは何を意味するのか．何が問題かということを哲学の視点に立って自然哲学の新しい理論を確立したいと考える．研究のはじまりは, 何が解決すべき問題であるかを知ることである．何が解決すべき問題かを見つけるために本を読み, 論文を読むのである．解決すべき問題が見つかったとき, その問題を研究し, 解決するために必要となる知識や技能を身に付けるために学習するのである．物理現象の理解のために, このような学習と研究は限りなく続けなければならないのである．

私の研究の目的は数学と物理学の理論を自然に合理的に理解することである．数学や物理学の研究の間違い探しをすることが私の研究の本当の目的ではない．

ニュートン力学, 電磁気学と自然統計物理学の研究の対象となる物理現象は, 3 次元空間において, 質量と電荷と磁気を持った物体の重力相互作用や電磁相互作用の下における運動の結果として現象している．

このとき, このような物理現象を理論モデルとしての数理モデルを用いて研究する．このとき, 物理現象と数理モデルの関係について考察したい．さらに, 物理現象が現象する物理空間とはどのような空間であるかということについて考察したい．

さらに, 物理空間の次元は何次元であるかということについても考察する．

物理現象は物理空間において時間の進行に従って現象する．その時間とは何かについて考察したい．時間の逆転とは何か．本当に時間の逆転は起こり得るか どうかについて考察する．

「電子は粒子でありかつ波である」といわれている．物質存在とは何か．電子は如何なる物質存在であるのかということについて考察したい．

「物」とは如何なる物理的存在か．

「量子場」とは如何なる物理的存在か．

物理理論は現象の観測によって実証するということが肝要であるが, 現象は本当に見えているか．自然存在と自然現象の様相の実相は見えているか．

このような問題を明らかにすることによって, ニュートン力学, 電磁気学や自然統計物理学において研究する物理現象の様相の実相が明らかになる．

場の量子論において量子場の概念は物質的根拠が明らかではない．物質的根拠がはっきりしない概念を用いて物質存在とその現象を本当に理解できるのであろうか．何か根本的な問題があるように考えられる．

本論文は主として拙著「自然哲学原論」第 15 章の内容に基づいている．

1 現象世界と理論世界

自然現象の理論モデルは多くの場合に数理モデルとして定式化される．自然現象の理論モデルとして連続モデルを用いるのがよいのか, 離散モデルを用いるのがよいのか, どちらがよいかを決めるには, 自然現象の観測値と理論モデルの理論値が一致しているとみなせるかどうかが問題である．自然存在を連続的存在と考えるか, あるいは離散的存在と考えるかのいずれにしても, 理論モデルはあくまで自然現象の近似モデルである．連続モデルも離散モデルも近似モデルとして近似の範囲において自然現象の様相を合理的に理解し, 説明できるかという視点が大切である．自然現象の理論モデルを考えるとき, 実在の自然現象が見えているかどうかということが最も大切なことである．

自然現象とその観測は現象世界あるいは物質世界の事象である．理論モデルとその理論的解析は理論世界あるいは観念世界の事象である．それらは互いに別の世界に属する事象ではあるけれど, 自然現象とその理論モデルは自然に対応していて, 自然現象の観測値と理論モデルの理論値を比較して, その対応が自然で合理的なものであるかどうかを決めることができる．これによって, 人は理論モデルを解析することによって自然現象を理解し, 説明できると考えている．このとき, 人はときどきこの別世界に属するはずの自然現象と理論モデルがまったく同じものであるかのように考えてしまうことがある．それによって, 理論モデルの解析をしていることが, そのまま自然現象であるかのように考えてしまうことがあって, 自然現象の理解が困難になってしまうことがあるように思われる．

現象世界は実在の世界である．現象世界の物質存在と現象は人間の五感による認識の対象である．人間の五感によってしか現象世界の存在と現象を観ることはできない．そのような存在と現象の認識の事実に基づいて, 理論世界において存在と現象の理論モデルを用いて現象の様相の実相を理解する．これは思索によって実行される観念世界の行為である．

理論世界において概念化された観念は現象世界の実在と現象そのものではない．しばしばこれらの区別を忘れて, 現象世界の実在と現象を理論世界の観念と混同してしまうことがある．

理論世界において理論モデルとしての数理モデルによって得られた結果がそのまま現象世界において現象しているかのような議論をしばしば見受ける．特に, 現在の数理物理学の研究にはこのような傾向が強く見られることは心配である．

数理モデルを用いて物理現象を研究するとき, 自分がいつも使っている数学の方法を用いて解析できる物理現象を選んで, そのような物理現象だけを研究する仕方と, 面白い物理現象を見つけて, それを解析するために必要な数学的方法を集めてその物理現象を解析し, 理解する仕方がある．面白い物理現象を見つけて研究するということはどちらかというと物理学の視点での研究である．前者のように, 自分の持っている数学的方法を用いて解析するという方は数学の視点からの研究である．このとき, これらの物理現象は数学的研究の例題となるものである．どちらの研究方法を用いるかはそれぞれの研究者の好みの問題である．

数理モデルを正しく用いれば自然現象の理解にとって決定的に有効である．数理モデルを正しく用いることが肝要である．

数学の理論が役に立つかどうかはその用い方の問題である．数学の理論も万能薬ではない．用い方によって役に立つこともあれば, 役に立たないこともある．

数学が役に立たないという人は数学が本当に役立つように数学を使って仕事をしたことのない人である．ことばの意味を正しく理解することが肝要である．

2　物理空間とその次元

空間というのは位置を表す点の集合である．これらの点はある広がりをもって存在している．特に, 物理空間ではこれらの点の間の距離が定まっている．この距離はユークリッドの距離であることがわかっている．

このとき, 宇宙というのはこの物理空間の中に様々な物体がそれぞれの位置に配置されたものである．宇宙に存在する物体はすべて正の質量 m と電荷 q, $(-\infty < q < \infty)$ をもっている．これによって様々な物体の間に重力相互作用とクーロン力による相互作用すなわち電磁相互作用が働く．これによって, すべての物体は常に運動して静止することがない．これによって天体の運動から原子や分子までのすべての物理現象が現象することを理解し, 説明できることになる．

このとき, 重力相互作用とクーロン相互作用はそれぞれニュートンポテンシャルとクーロンポテンシャルによって引き起こされる．このニュートンポテンシャルとクーロンポテンシャルは 3 次元空間において定義されたスカラー関数によって表される．

それ故に, 現実の物理現象は 3 次元空間において現象し, その現象は 3 次元空間において観測される．

現在までに実験や観測によって見ることのできる自然現象はすべて 3 次元空間において時間の経過に依存して生起していることがわかっている．それ以外の自然現象が観測されたという事実はまだない．

それ故に, 現実の物理空間は 3 次元空間であることが実証されていると結論できるのである．それと時間が 1 次元空間において変動していると実証されていることが結論できるのである．

原子核や素粒子のレベルの物理現象についてはこれとは異なる理解や説明が必要かもしれない．これについては, 私の見る限り, まだ完全な理解はできていないように見える．このとき, 宇宙の枠組みである物理空間がどのような構造をもっているかということも完全な理解はできていないようである．

今分かっていることは, この物理空間が 3 次元ユークリッド空間であるということである．それに時間軸として 1 次元ユークリッド空間を加えればよい．

宇宙空間にある天体の位置を測るために光年という単位が使われる．1 光年は光が 1 年間に進む距離である．1 光年は約 9 兆 4600 億キロメートルである．このことは, 宇宙空間においては距離はユークリッドの距離を用いて測っていることを意味する．したがって, このような距離を用いて天体の観測が行われていることから考えると, この宇宙空間は 3 次元ユークリッド空間であると考えてよいということである．

(9+1) 次元空間から (3+1) 次元空間の存在が導かれることによって, 物理空間が (3+1) 次元であることが証明されたという．このとき, (9+1) 次元空間の実在することが実証されていなければこのような証明は無意味である．物理空間の次元が (3+1) 次元であることは証明すべき問題ではなく, 実証すべき問題である．このことはすでに実証されている．

3 次元調和振動子の系のモデルを用いて比熱に関するデュロン・プティの法則などが説明できる．このことから実際の物理空間が 3 次元であることが理解できる．このことと物理現象を理解し, 説明するための数理モデルの表現とその解析に必要な独立変数の個数を表す自由度という意味での次元数は異なることである．物理学者はしばしば物理空間の次元数と独立変数の個数を表す自由度とを混同することがある．

3 次元空間において, 中心力の作用の下に運動する質点の軌道は一つの平面内の楕円軌道である．このことは, この質点の運動が 3 次元空間の中での 2 次元の運動であるということである．

また, 等速直線運動している質点は 3 次元空間の中で 1 次元的運動をしているということである．

このように, 与えられた条件によっては, 3 次元空間の中で 1 次元的運動や 2 次元的運動をすることがあることがわかる．

以上の考察から, 原子核や素粒子, 原子や分子の物理現象から, 天体の運動や宇宙の構造までを含めて, すべての物理現象を３次元空間の枠組みにおいて研究する試みがあってもよいと考えられる. .

3　物理空間と時間

時間の概念の発見は, 惑星の周期的運動や振り子の周期的運動などから, 一定の時間の経過を定量的に表すことを考え付いた事によって行われた. その時間の経過の単位量を決めて, その上で時間の経過を無限の過去から無限の未来まで外挿することによって時間という概念に到達できた. それによって時間を時間軸という１次元空間の中に数値として位置付けた. これが時間の概念の発見である. この時間軸における時間変数の変動に伴って３次元空間における自然現象の変動を記述することができるようになった. これが３次元空間と１次元の時間軸である.

振り子の周期は振り子のひもの長さと重力の大きさに依存して定められる. 同様に原子時計の基準として用いられているセシウムのスペクトル分布にしてもその原子の固有振動は周囲から受ける力の作用に依存して決められる. 日常生活における時間の単位を決めること, あるいは地上における時間の単位と宇宙空間における時間の単位を原子時計を用いて調整するときなど, その用いる目的に応じて時間の単位をきめるための精度の要求は異なるであろう. それに対応して, 原子時計のスペクトル分布を計算するときに周囲から受ける力の影響を無視したり, 無視しなかったり, その近似計算の精度を決めることになるであろう. 実際に, 地上と宇宙空間の無重力状態との二つの環境でセシウムのスペクトル分布の違いを精密に測定することによって, ここで考えている原子時計に対する環境条件の影響を実証できる可能性がある.

時間軸の原点はあらかじめ定められた固定点ではない. 質点の運動を考えるとき, 運動を考え始める時点, あるいは運動が始まる時点を時間軸の原点として, それ以後の未来に向って, 時間の経過にしたがって質点の運動を考える. したがって, 時間変数は常に正の値をとると考えることが出来る. また, 過去に始まった質点の運動を考える場合には, 時間軸の原点を平行移動して, その運動を考え始める時点あるいは過去に運動が始まった時点を原点として, それ以後, 時間の経過に従って質点の運動を考える. したがって, 質点の運動を考えるとき, 時間変数は常に正の値をとると考えることが出来る. このことは, 質点の運動を考えるとき, ニュートンの運動方程式に対するコーシー問題の初期条件を与える時点を時間軸の原点になるように時間軸の原点を定めるということである.

チコ・ブラーエによる天体の観測データを解析することによって, ニュートンは天体の運動法則を明らかにした. このとき, ニュートンはチコ・ブラーエが観測した時点まで時計を逆回転したのではなく, チコ・ブラーエが観測した時点を時間の原点あるいは出発点としてその後の時間の進行に従って天体の運動を解析したのである. 時間の逆行はあり得ない.

ニュートンの運動方程式に対するコーシー問題の初期値を与える時点を時間軸の原点であると考えるといっても, このような時間軸の原点は一定不変の固定点であるというわけではなく, 考える現象の様相に従って自由に定めることが出来る.

運動の進んで行く向きに時間は進んで行く. このことは運動方程式の数式計算だけから導くことは出来ない. 現象の観測データに基づいて運動状態の変動を運動方程式によって理解しょうとすれば, 時刻の進む向きがわかる. このことはチコ・ブラーエによる天体の運動の観測データについてのニュートンの研究の精神である. 現象のことは「現象から学ぶ」ということが大切である.

人類が空間や時間の概念を獲得するより前から天体は宇宙空間において運動し続けている. この事実をどのように考えるかということが大切な問題の一つである.

4　物理空間と物質存在

近代以前の文献に基づく考え方で,「自然」とか「法則」というとき, それは人間の五感で認識される限りの意味で使われていることを注意しなければならない. その限りでは全く正しい. しかし, 近代科学誕生以後では,「自然」は「原子」や「分子」からなっていて,「法則」は数理的定量的に表現されるものであるということが認識されている. それによって, 自然の力を原子や分子のレベルからコントロールして人間の使用目的に合うように自然を改変することができるようになっている.「自然」や「法則」の意味が質的に変わっているのである.

このことは「原子」の考えについても当てはまる. 古代の「原子」というのは思弁的に考えて, それ以上分割できないものという意味で使われる. それは「自然的存在」のみならず,「観念的存在」についても同様の意味で「原子」というものを考えている. 近代科学によって明らかにされたことは物質の最小単位としての「原子」の存在である. それは科学的に「実証」されたものである. 観念的存在ではなく,「自然的存在」, すなわち,「実在」としての「原子」が発見されているのである.

原子論はギリシャ時代からあるという. しかし, 原子の実在が実証されたとき以前と以後では原子論の意味が本質的に異なる. 以前では,「原子」という概念は単に想像のことである. 以後では, 原子の実在に基づいて原子論的科学理論が研究された. 実在の原子の物理的・化学的特性や運動に基づいて様々な自然現象が理論的に解明できるようになった.

「電子は粒子でありかつ波である」かという問題があった. 電子は粒子でありかつ波として存在しているが, 観測するときには, いつも電子は粒子として観測されるといって何の気にもかけない人々がいた. 現在では電子が粒子であることはすでに実証された事実である. なぜならば, 1911 年にミリカンが電子の電荷を測定し, 1897 年に J. J. トムソンが電子の質量を測定している. さらに, 1989 年に外村彰氏によって電子の粒子としての像が撮影されて, 電子が粒子として運動することが実証されている.

現在では, 電子, 原子や分子が粒子あるいは粒子系であるということはそれらが固有の質量と電荷を持っているという特性によって特徴付けられている.

場とは何であろうか. ある人々は場は空間の属性である何か深い意味をもった存在であるかのように考える. しかし, 物理学で扱っている具体的な場は, 電磁場や応力テンソルの場のように空間のある点に対応して決まる物理量の分布である. 非常に具体的な意味をもっている. 数学的には単にスカラー値やベクトル値の関数である. その関数の値がとくに物理量である場合に場ということばを用いるのがふつうである.

現在確かな存在として知られているものに重力場と電磁場がある. しかし, これらはそれ自体として存在することはできない. これらは質量, 電荷や磁荷をもった物質が存在することによってはじめて存在し得るものである.

物質の存在によって現れる重力場はその場の量がその物質の質量の関数として決定される. また, 電荷あるいは磁気の存在によって現れる電磁場の場の量は電気量あるいは磁気量の関数として決定される. このように, 重力場や電磁場が物質存在によって現れることがはっきりしている. これらは確かな物質的根拠がある.

それに対し, 場の量子論において考えられる量子場はまず数学的概念として導入されたもので, その物質的根拠がはっきりしない. このような量子場によって物質存在の現象を導くことは難しいと考えられる. 何か根本的な問題があるように考えられる. このように, 量子場は理論世界においてはじめに考え出されたもので, それに対応する現象世界における自然存在とその現象の実在性がみえない. 第二量子化というのは数学的な変換であって, 現象世界において第二量子化というのは如何なる自然現象であるか, その実在性が見えないのである.

電磁波は電子, 原子や分子のような物質存在ではない. 電磁波は発信器なしにそれ自体として存在し得ないからである. 光が電磁波の一種であるとすれば, 光も電子, 原子や分子のような物質存在ではあり得ない. それ故に, アインシュタインの光量子仮説は意味がないことがわかる. 光子という量子は存在し得ない.

「光子」という粒子は存在しない. なぜならば, 光は電磁波である. その電磁波は発信器なしにそれ自体としては発生しない. それ故に, 光は電子, 原子や分子のようなそれ自体として存在する物質粒子ではあり得ないということである.

自然存在の中には安定な構造を持っているものもある. しかし, それが観念的存在のように自ら変化しないというのではない. 内部エネルギーまで含めて考えると, すべての自然存在は絶対零度にならない限り, 自然に運動してとどまることがないのである. 事実, 実在の自然存在で, 絶対零度というのは実現できない.

物理 (ぶつり) を「モノのリ」と読んで, 物理現象を物体の運動によって理解することであるというと, 物理現象の理解には, 「唯物論」的な考え方が有効であるかのようにいう人がいる. 物理現象のような自然現象を理解することは, 「観念論」か「唯物論」かというような観念的な思考の問題ではないのである. 眼の前で起こっている自然現象を, 因果の糸をたどって, 原理や法則によって合理的に理解し, 説明することが大切な問題なのである. 現に, 旧量子論における量子現象の「唯物論」的研究は大間違いであった. 「観念論」か「唯物論」かという「イデオロギー」的議論はほとんど無意味なことであるように思われる. もっと積極的に表現すれば, 現実の現象の理解には有害であるといっても差し支えない. 現実に, それによって, 生涯にわたる研究を失ってしまった人が何人も居ることを見れば明らかである.

自然界とそこにおける自然現象は, ファンタジーの世界やその中での出来事ではあり得ない. ファンタジーは, あくまで想像力によって描かれた文学作品にすぎない. 実在の世界と想像の世界を混同してしまうと, 奇妙な科学理論が生まれてしまう. 古い物理学の本を読んでいると, 「自然現象を分かる」, あるいは, 「物理現象を分かる」ということはどういうことであろうか, という疑問を感じてしまうことがある. 自然統計物理学 (「新量子論」の改題) においては, 原子や分子の集団の自然統計的現象が, 物理学の基本原理に基づいて, 自然に, 合理的に理解できるようになった. これこそ, 科学的精神の現れそのものではないかと思われる.

自然現象の中には, 太陽が東から昇り, 西に沈むことや月の満ち欠けなどのように, 一定の周期によって繰り返される現象がある. これは, 一見, 規則的で, 法則的に見えるが, 見かけの現象であることは今は誰でも知っている. 人々が日常生活をするためには, そのような知識だけで十分なことも多い. 実際の太陽や月の運動は重力相互作用によって引き起される運動で, ニュートンの運動法則に従って運動している. 太陽や月に関する自然現象は, この事実に基づいて理解されなければならない. これが, 自然現象を物理現象として理解する仕方である. 何が問題かということは次の例によって理解される. たとえば, 人工衛星を打ち上げて地球の周りを回る軌道にのせようとすると, 見かけの現象の理解では役に立たなくて, ニュートンの運動法則が必要になるということである. そのように, 知識の用い方によって役に立ったり立たなかったりする.

「太陽はまた昇る」についての議論がある. 地球は太陽の周りを公転運動をし, それ自身自転運動をしている. それはニュートンの運動法則に従っている. そのことによって「太陽はまた昇る」のである. したがって, この運動状態を変えるような力の変化がない限り「太陽はまた昇る」ということである. それ故, 「太陽はまた昇る」かどうかは予測不可能な程偶然的に変化するような現象ではないことがわかる.

4.1　原子と分子

現在の自然科学においては, 自然界に存在する物質はすべて原子や分子によって構成されているという原子論的自然観に基づいて自然現象の研究が行われている. 以下において, 現在分かっている原子と分子の基本的知見をまとめておく.

原子は物質を構成する微粒子であって, 各元素の特性を失わない範囲で到達し得る最小の微粒子である. 大きさはほぼ 1 億分の 1 センチメートルである. それぞれの原子は一つの原子核と電子によって構成される. それぞれの原子は固有の質量を持つ.

原子価は元素の 1 原子が直接または間接に水素原子何個と化合し得るかを表す数である.

原子核は原子の中核をなす粒子である. 大きさは原子に比べてはるかに小さいが, 原子の質量の大部分が原子核に集中しており, 陽電気を帯びる. 原子核は陽子と中性子より構成されていて, 陽子の数が原子番号に等しく, 陽子と中性子の総数が質量数に等しい.

原子が放射または吸収する光のスペクトルを原子スペクトルという. 原子はそれぞれに固有の線スペクトルを持つ.

原子番号は各原子の原子核をつくる陽子の数を表す. これは原子の核外電子の数に等しい. 元素の化学的性質は核外電子の数で定まるので, 原子番号はその元素の化学的性質を定めることになる. もともとは, 元素の周期律表における元素の配列順位を表す番号として名づけられたものである.

元素は化学元素のことをいう. 化学元素は化学的手段すなわち化学反応によってそれ以上分解し得ない物質をいう. 厳密には, 同一原子番号の原子だけからなる物質をいう.

分子は原子の結合体で, 物質がその化学的性質を保って存在し得る最小の構成単位とみなされるものをいう. 高分子のように数千から数万の原子から構成されるものもある.

気体分子が放射または吸収する光のスペクトルを分子スペクトルという. 気体分子はそれぞれ固有の帯 (たい) スペクトルをもつ.

4.2　物質と質量

質量持つ自然存在を物質という. 特に自然存在の幾何学的形状に注目するとき, これを物体という. それ故, 自然存在としては物質も物体も同じものを表現している.

すべての物質は正の質量を持っている. それによって複数の物質は重力相互作用をし, 互いに引力を及ぼす. その結果すべての物質は運動している.

物質の運動を物体の運動ということもある.

4.3　物質の電荷と電気量

すべての物質は正あるいは負の電荷を持っているか, あるいは電荷が 0 で電気的に中性であるかいずれかである. 物質の持つ電荷の量を電気量という. 正あるいは負の電荷をもった複数の物質はクーロン相互作用をし, 互いに力を及ぼす. 正の電荷を持った物質同士は互いに反発力を及ぼし, 正の電荷を持った物質と負の電荷を持った物質は互いに引力を及ぼす. これによって電荷を持った物質は常に運動している.

4.4　物質の磁気量と磁気

物質によっては磁気を持った磁石といわれるものがある．磁石には必ず北極と南極の二つの極がある．北極を N 極といい, 南極を S 極という．磁極の強さを磁気量という．

点磁極の間に働く磁気力は両方の磁気量の積に比例し, 互いの距離の 2 乗に反比例する．すなわち, クーロン相互作用の法則が成り立つ．N 極の磁気量を正とし, S 極の磁気量を負とすると, 反発力が働くか, 引力が働くかは電気量の場合と同様である．

4.5　質点の運動と自然統計的現象

物体の運動や物質粒子の運動を考えるとき, ニュートンはそれらを抽象化して質点の軌道運動として表現した．ここで, この質点の概念について新しい視点から考察したい．

自然界に存在するすべての物質粒子は正の質量 m と電荷 q, $(-\infty < q < \infty)$ を持っている．今, 物質粒子の全質量がその重心の位置にあると考えて，近似的に, この物質粒子は全質量が重心の位置にある質点であると考えることがある．この質点はこの物質粒子の抽象化されたモデルである．しかし，電荷が物質粒子と無関係に抽象的に存在するものではないから，力学における質量と電荷をもった物質粒子の正しいモデルは, その物質粒子の全質量と全電荷が重心の位置にある点と考えた時の質点であると考えられる．それ故, その質点は，正の質量 m と電荷 q, $(-\infty < q < \infty)$ をもった点と考えていることになる．このとき，質量による重力相互作用と電荷によるクーロン相互作用によって質点の運動が生起すると考える．したがって, 質量や電荷の大きさによって，近似的に，どちらの力の相互作用を主に用いるかという選択の余地がある．

一つの物体の持つエネルギーは力として他の物体に作用を及ぼし, それによってエネルギーが伝達される．これが物体の力の相互作用である．

ニュートン力学によって考えられる物体の運動は質点と考えられた物体の軌道運動である．自然統計物理学で考える自然統計的現象は物質粒子の集団の示す自然統計的現象である．その集団を構成する 1 個 1 個の物質粒子はニュートン力学に従って軌道運動しているのであるが, その物質粒子の集団の示す自然統計的現象というのは 1 個の物体の軌道運動だけを考えるのとは考える現象の様相が異なっていることが肝要の点である.. 現象の様相の実相をよく見極めることが大切である．

4.6　運動法則

物理量の時間発展の仕方を規定する運動法則は，その物理量を表す変数の時間的変動と空間的変動を結びつける関係式である微分方程式の形で表されるのが普通である．また, 時間的変動は, その物理量の変化の速度や加速度を表す．それに対し，空間的変動は，その物理量の変動要因であったり，変動様式であったりする．

物理量とは何か．ニュートンの運動方程式に従って運動している質点の物理量の場合には, ニュートンの運動方程式に従って定められる位置変数と運動量変数の関数として表される量を物理量というのである．質点の位置変数と運動量変数は運動法則であるニュートンの運動方程式に従って定まっている．それ故に, 質点の物理量も質点の運動法則によって定まっている．物理現象を運動法則によって理解するということはこのようなことである．

On the generalized λ-CMO spaces and the generalized fractional integrals

Katsuo Matsuoka

College of Economics, Nihon University

November 3, 2013

Real Analysis Symposium 2013

November 2nd-4th, 2013

Okayama University

For $r > 0$, let $Q_r = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| < r\}$ or $Q_r = \{y = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1\le i\le n} |y_i| < r\}$, and for $x \in \mathbb{R}^n$, let $Q(x,r) = x + Q_r = \{x + y : y \in Q_r\}$. For a measurable set $G \subset \mathbb{R}^n$, we denote the Lebesgue measure of G by $|G|$ and the characteristic function of G by χ_G. Further, for a function $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ and a measurable set $G \subset \mathbb{R}^n$ with $|G| > 0$, let $f_G = \fint_G f(y)\,dy = \frac{1}{|G|}\int_G f(y)\,dy$ and let $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

First, we recall the definitions of the non-homogeneous central Morrey space $B^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ and the λ-central mean oscillation (λ-CMO) space $\mathrm{CMO}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$.

Definition 1. *For $1 \le p < \infty$ and $-n/p \le \lambda < \infty$,*

$$B^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{B^{p,\lambda}} = \sup_{r\ge1} \frac{1}{r^\lambda} \left(\fint_{Q_r} |f(y)|^p\,dy \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

and

$$\mathrm{CMO}^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{\mathrm{CMO}^{p,\lambda}} = \sup_{r\ge1} \frac{1}{r^\lambda} \left(\fint_{Q_r} |f(y) - f_{Q_r}|^p\,dy \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

On the other hand, we introduce the "new" function space, i.e., the generalized λ-CMO space $\Lambda^{(d)}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ (see García-Cuerva and Herrero (1994), Komori-Furuya, M., Nakai and Sawano (2013); cf. Nakai and Sawano (2012)).

Definition 2. *For $1 \le p < \infty$, $d \in \mathbb{N}_0$ and $-n/p \le \lambda < d+1$, the function $f \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$ will be said to belong to the generalized λ-CMO space $\Lambda^{(d)}_{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$ if and only if for every $r \ge 1$, there is a polynomial $P^d_r f$ of degree at most d such that*

$$\|f\|_{\Lambda^{(d)}_{p,\lambda}} = \sup_{r\ge1} \frac{1}{r^\lambda} \left(\fint_{Q_r} |f(y) - P^d_r f(y)|^p\,dy \right)^{1/p} < \infty.$$

Next we recall the definitions of fractional integral I_α and modified fractional integral $\tilde{I}_\alpha$.

Definition 3. *For* $0 < \alpha < n$,

$$I_\alpha f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}}\, dy$$

and

$$\tilde{I}_\alpha\, f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left(\frac{1}{|x-y|^{n-\alpha}} - \frac{1-\chi_{Q_1}(y)}{|y|^{n-\alpha}} \right) dy.$$

Recently, in M. and Nakai (2011) (cf. Komori-Furuya, M., Nakai and Sawano (2013)), from the B_σ-Morrey-Campanato estimate for $\tilde{I}_\alpha$ we obtained the following as the corollary.

Theorem 1 (cf. Komori-Furuya and M. (2010))**.** *Let* $0 < \alpha < n$, $1 < p < \infty$ *and* $-n/p \le \lambda < -\alpha + 1$. *If* $1 \le q \le pn/(n-p\alpha)$ *and* $\lambda + \alpha = \mu$, *then*

$$\tilde{I}_\alpha : B^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \to \mathrm{CMO}^{q,\mu}(\mathbb{R}^n).$$

Now we introduce the following definition of generalized fractional integral $\tilde{I}_{\alpha,d}$.

Definition 4. *For* $0 < \alpha < n$ *and* $d \in \mathbb{N}_0$, *we define the generalized fractional integral (of order* α*), i.e.,* $\tilde{I}_{\alpha,d}$, *as follows: For* $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$,

$$\tilde{I}_{\alpha,d}\, f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left\{ K_\alpha(x-y) - \left(\sum_{\{l:|l|\le d\}} \frac{x^l}{l!} (D^l K_\alpha)(-y) \right) (1-\chi_{Q_1}(y)) \right\} dy,$$

where

$$K_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{n-\alpha}}$$

and D^l *is the partial derivative of order* $l = (l_1, l_2, \cdots, l_n)$, *i.e.,*

$$D^l = (\partial/\partial x_1)^{l_1} (\partial/\partial x_2)^{l_2} \cdots (\partial/\partial x_n)^{l_n}.$$

Then as one of the results for a generalized fractional integral $\tilde{I}_{\alpha,d}$ we can get the following strong estimate on $B^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n)$, which extends Theorem 1.

Theorem 2 ([M])**.** *Let* $0 < \alpha < n$, $1 < p < n/\alpha$, $d \in \mathbb{N}_0$, $-n/p + \alpha \le \lambda + \alpha = \mu < d+1$ *and* $q = pn/(n-p\alpha)$, *i.e.,* $1/q = 1/p - \alpha/n$. *Then*

$$\tilde{I}_{\alpha,d} : B^{p,\lambda}(\mathbb{R}^n) \to \Lambda^{(d)}_{q,\mu}(\mathbb{R}^n).$$

References

[M] K. Matsuoka, Generalized fractional integrals on central Morrey spaces and generalized λ-CMO spaces, in Function Spaces X, Banach Center Publ., Inst. Math., Polish Acad. Sci., Warsawa, to appear.

非加法的測度の正則性について

渡辺　俊一　(新潟大自然科学研究科博士研究員・日本大学非常勤講師)

Li, 安田, Song は [3] において 完備距離空間上の零加法的なファジイ Borel 測度の場合にラドン（強正則）性が成り立つことを示した．[1] において河邊は Riesz 空間が多重 Egoroff 性を持つ場合に完備ないし局所コンパクト距離空間上の零加法的な Riesz 空間に値を取る Fuzzy 測度がラドン性（強正則性）をもつことを示した．他方 [2] において, Li と mesir により非加法的測度が Egoroff の定理と psuedmetric generating property を満たす場合に測度の正則性が得られることが示された.

本講演では，非加法的測度において, 測度が Egoroff の定理と psuedmetric generating property を満たす場合, 完備または局所コンパクトである可分な距離空間上でラドン（強正則）性が得られることを報告する．主に実数値の場合での結果を述べるが, 半順序線形位相空間に値を取る場合についても言及したい.

以下, 自然数全体を N, 実数全体を R, $(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする.

定義 1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to R$ は
(i) $\mu(\emptyset) = 0$, (ii) A, $B \in \mathcal{F}$ で $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ を満たすとき, 非加法的測度 *(non-additive measure)* という．以下 μ は非加法的測度とする.

定義 2. (1) 集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \downarrow A$ ならば $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ を満たすとき, μ は上から連続 *(continuous from above)* という.
(2) 集合列 $\{A_n\} \subset \mathcal{F}$ と $A \in \mathcal{F}$ が $A_n \uparrow A$ ならば $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ を満たすとき, μ は下から連続 *(continuous from below)* という.
(3) μ が上から連続かつ下から連続である場合, ファジイ測度であるという.
(4) 集合 μ が弱零加法的であるとは $A, B \in \mathcal{F}$ が $\mu(A) = \mu(B) = 0$ であるとき $\mu(A \cup B) = 0$ となることをいう.
(5) 集合 μ が *pseudometric generating property* を満たすとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, $\delta > 0$ が存在し, 任意の $A, B \in \mathcal{F}$ について $\mu(A) \vee \mu(B) < \delta$ ならば $\mu(A \cup B) < \varepsilon$ となることである.

定義 3. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度とする.

(1) *2* 重集合列 $\{A_{m,n}\} \subset \mathcal{F}$ は

  (D1) $m, n, n' \in \mathrm{N}$ で $n \leq n'$ ならば $A_{m,n} \supset A_{m,n'}$
  (D2) $\mu(\cup_{m=1}^{\infty} \cap_{n=1}^{\infty} A_{m,n}) = 0$

  を満たすとき, $\mathcal{F}$ において μ*-regulator* であるという.

(2) μ が *Egoroff* 条件を満たすとは任意の μ*-regulator* $\{A_{m,n}\}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し, 正の整数列 $\{n_m\}$ が存在し $\mu(\cup_{m=1}^{\infty} A_{m,n_m}) < \varepsilon$ となることである.

以下の定理が成立している [4].

定理 1. 集合関数 $\mu : \mathcal{F} \to E$ は非加法的測度とする．このとき次の条件は同値である:

(i) Egoroff の定理が μ に対して成立する.
(ii) μ は Egoroff 条件を満たす.

定義 4. $\mu : \mathcal{B}(X) \to E$ を X 上の非加法的 *Borel* 測度. μ が正則であるとは任意の $\varepsilon > 0$ と $A \in \mathcal{B}(X)$ に対し, 閉集合 F_ε と開集合 G_ε が存在し $F_\varepsilon \subset A \subset G_\varepsilon$ と $\mu(G_\varepsilon \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$ を満たす.

X を Hausdorff 空間. $\mathcal{B}(X)$ により X の Borel 部分集合からなる σ 体, すなわちの開集合からなる σ 体. $\mathcal{B}(X)$ 上で定義される非加法的測度を X 上の非加法的 Borel 測度という. このとき以下の が成立する.

Li と Mesiar [2] により以下の結果が得られる.

定理 2. X を距離空間とし, $\mu : \mathcal{B}(X) \to R$ を X 上の *Egoroff* 条件と *psuedmetric generating property* を満たす 非加法的 *Borel* 測度とする. このとき μ は正則.

定義 5. $\mu : \mathcal{B}(X) \to R$ を X 上の非加法的 *Borel* 測度とする.
(1) μ がラドン (強正則) 性をもつとは各 $A \in \mathcal{B}(X)$ に対し, コンパクト集合の列 $\{K_n\}_{n\in N}$ と開集合の列 $\{G_n\}_{n\in N}$ が存在しすべての $n \in N$ について $K_n \subset A \subset G_n$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mu(G_n \setminus K_n) = 0$ が成り立つ.
(2) μ が *tight* であるとはコンパクト集合の列 $\{K_n\}_{n\in N}$ が $\lim_{n\to\infty} \mu(S \setminus K_n) = 0$ を満たすことである.

Li, 安田, Song [3] と 河邊 [1] のファジイ測度における結果から, 非加法的測度が Egoroff 条件と psuedmetric generating property を満たす場合にもラドン（強正則）性の成立が予期されるが実際, 以下の 2 つの主張が成り立つ.

定理 3. X を完備可分な距離空間とし, $\mu : \mathcal{B}(X) \to R$ を X 上の非加法的 *Borel* 測度とする. μ が弱零加法的で *Egoroff* 条件を満たすならば μ は *tight.* さらに μ が *pseudmetric generating property* と *Egoroff* 条件を満たすならば μ はラドン性をもつ.

定理 4. X を局所コンパクトで可分な距離空間とし, $\mu : \mathcal{B}(X) \to R$ を X 上の非加法的 *Borel* 測度とする. μ が *pseudmetric generating property* と *Egoroff* 条件を満たすならば μ はラドン性をもつ.

参考文献

[1] J. Kawabe, The Alexandroff theorem for Riesz space-valued non-additive mesures. *Fuzzy sets and Systems* **158**(2007) 2413–2421.

[2] J. Li and R. Mesiar, *Lusin's theorem on monotone measure spaces,* Fuzzy Sets and Systems **175** (2011), 75–86.

[3] J. Li, M. Yasuda and J. Song, Regularity properties of null-additive fuzzy measure on metric spaces, in: Torra, V., Narukawa, Y., Miyamoto, S. (Eds.), *Lecture Notes in Artificial Intelligence,* Vol. 3558, Springer, Berlin, 2005 59–66.

[4] T. Murofushi, K. Uchino and S. Asahina, *Conditions for Egoroff's theorem in non-additive measure theory,* Fuzzy Sets and Systems **146** (2004), 135-146.

非加法的測度の弱収束とその距離付け可能性

河邊　淳 (信州大学工学部)

Weak convergence of measures on a topological space not only plays a very important role in probability theory and statistics, but is also interesting from a topological measure theoretic view, since it gives a convergence closely related to the topology of the space on which the measures are defined. Thus, it is possible to study weak convergence of measures on a topological space in association with some topological properties of the space, such as the metrizability, separability and compactness.

Nonadditive measures, which are set functions that are monotonic and vanish at the empty set, have been extensively studied; see Wang and Klir [3]. They are closely related to nonadditive probability theory and the theory of capacities and random capacities. Nonadditive measures have been used in expected utility theory, game theory, and some economic topics under Knightian uncertainty.

The notion of weak convergence of nonadditive measures was formulated by Girotto and Holzer in a fairly abstract setting [1]. Some of their fundamental results for weak convergence, such as the portmanteau theorem and the direct and converse Prokhorov theorems, have been extended to the nonadditive case. In particular, the portmanteau theorem allows us to show that the weak topology, which is the topology generated by weak convergence, coincides with the Lévy topology, which is the topology generated by convergence of measures on a special class of sets.

In this talk, we will present successful nonadditive analogs of the theory of weak convergence of measures with a particular focus on metrizability and we will also supply weak convergence methods to related fields; see [2,3].

[1] B. Girotto, S. Holzer, *Weak convergence of bounded, monotone set functions in an abstract setting*, Real Analysis Exchange 26:157-176, (2000/2001).

[2] J. Kawabe, *Metrizability of the Lévy topology on the space of nonadditive measures on metric spaces*, Fuzzy Sets Syst. 204:93-105, (2012).

[3] J. Kawabe, *Weak convergence of nonadditive measures defined by Choquet and Sugeno integrals*, to appear.

[4] Z. Wang, G.J. Klir, *Generalized Measure Theory*, Springer, Berlin Heidelberg, New York, 2009.

オーリッチ空間の階位空間としての収束について

鈴木一郎

北先生、米田先生 [1] はオーリッチ空間 L_φ^* の Luxemburg-Nakano(L-N) ノルムによる Cauchy 列はオーリッチ空間を階位空間として取り扱うと r-収束し、かつ、r-収束するが L-N ノルムで Cauchy 列でないものが存在する事を示しました。又、北先生 [2] はオーリッチ空間の L-N ノルムによる位相は少し強いのではないか、という問題を提起され、それについての一つの答えとして、階位空間の構造をオーリッチ空間に入れて収束問題を考えられました。

ここではまず、オーリッチ空間の L-N ノルムによる Cauchy 列は階位空間としては r-収束し、かつ r-収束するが L-N ノルムで Cauchy 列でないものが存在する事の別証明を与えます。階位空間の収束概念は、L_φ^* の元 f_n の preneighborhood $U_n(f_n;\alpha_n,\varepsilon_n)$ の fundamental sequence と呼ばれる減少集合列、$\{U_n(f_n;\alpha_n,\varepsilon_n)\}$, $U_n \supset U_m$ when $n < m$、によって与えられます。fundamental sequence は２種類考えられ、① f_n が常に同じもの。$f_n = f$ for all $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ と② $f_n \neq f_m$ for $n \neq m$ であるものです。点列 $\{f_n\}$ について、①のタイプの fundamental sequence$\{U_n(f;\alpha_n,\varepsilon_n)\}$ が存在して任意の n に対して n_0 が存在して任意の $m \geq n_0$ について $f_m \in U_n(f;\alpha_n,\varepsilon_n)$ の時 $\{f_n\}$ は f に r-収束すると言います。つまり L-N ノルムによる Cauchy 列 $\{f_n\}$ について上の事を満たす fundamental sequence$\{U_n(f;\alpha_n,\varepsilon_n)\}$, $f \in L_\varphi^*$ が存在する事を示します。この時 $U_n(f;\alpha_n,\varepsilon_n) \supset U_m(f;\alpha_m,\varepsilon_m)$ ならば $\alpha_n \leq \alpha_m$ である事が重要な役割を占めます。

次にオーリッチ空間の②のタイプの fundamental sequence$\{U_n(f_n;\alpha_n,\varepsilon_n)\}$ についても $U_n(f_n;\alpha_n,\varepsilon_n) \supset U_m(f_m;\alpha_m,\varepsilon_m)$ ならば $\alpha_n \leq \alpha_m$ であることを示します。このことによりオーリッチ空間での fundamental sequence $\{U_n(f_n;\alpha_n,\varepsilon_n)\}$ に対して fundamental sequence$\{V_n(f;\alpha_n/2,\varepsilon_n)\}$, $f \in L_\varphi^*$, $U_n \subset V_n$ が存在する事を示せ②のタイプでも $\{f_n\}$ が f に r-収束する事が言えます。

参考文献

[1] H. Kita and K. Yoneda, *A treatment of Orlicz spaces as a ranked space*, Math. Japonica **37**, (1992), 775-802.

[2] H. Kita, オーリッチ空間とその応用 岩波書店　285-291.

[3] K. Kunugi, *Sur les espaces complets et régulièrement comlets*, I , Proc. Japan Acad., **30**, (1954), 553-556.

[4] S. Nakanishi, *On ranked union spaces*, Math. Japonica **23**, (1978), 249-257.

[5] S. Nakanishi, *The method of Ranked spaces proposed by Professor Kinjiro Kunugi*, Math. Japonica **23**, (1978), 291-323.

[6] S. Nakanishi, *The Denjoy integrals defined as the completion of simple functions*, Math. Japonica **37**, (1992), 86-101.

[7] H. Nakano, *Modulared Semi-ordered Linear Spaces*, Maruzen, Tokyo, 1950.

[8] I.Suzuki, *ON CONVERGENCE IN THE ORLICZ SPACE AS A RANKED SPACE*, Math. Japonica (2013),

Shepp空間 $\Lambda_2(f)$ の線形性と doubling dimension

本田あおい (九工大)　岡崎悦明 (九工大)　佐藤坦 (九大・名誉教授)

$f(\neq 0) \in L_p(\mathbb{R}, dx),\ 1 \leq p < +\infty$ に対して, $\Lambda_p(f)$ は次で定義される:

$$\Lambda_p(f) \ := \ \left\{ \boldsymbol{a} = \{a_k\} \in \mathbb{R}^\infty \ \middle| \ d_p^f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{0}) < +\infty \right\},$$

$$d_p^f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \ := \ \left(\sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x - a_k) - f(x - b_k)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^\infty.$$

この種の空間が最初に現れたのは Shepp [7] である. $dQ = \rho(x)dx$ を $I\!R$ 上の確率測度で $\rho(x) > 0$ (a.e. dx) とすると Q のは $I\!R^\infty$ 上の無限直積確率測度 $\mu := Q^\infty$ を定める. $\boldsymbol{a} = \{a_k\} \in I\!R^\infty$ に対して, 平行移動 $\mu_{\boldsymbol{a}}$ を

$$\mu_{\boldsymbol{a}}(A) = \mu(A - \boldsymbol{a})$$

と定め,

$$E(\mu) := \{\boldsymbol{a} \in I\!R^\infty \mid \mu \sim \mu_{\boldsymbol{a}} \ (\text{互いに絶対連続})\}$$

と定義する. Shepp は Kakutani の定理 [5] を適用することによって $E(\mu) = \Lambda_2(\sqrt{\rho})$ となることを示し, さらに $E(\mu) \subset \ell_2$ が成り立つこと, また $E(\mu) = \ell_2$ となるための必要十分条件を与えた.

我々は Shepp の結果に着想を得て新しい数列空間 $\Lambda_p(f), 1 \leq p < +\infty$ を定義し, 数年にわたり構造を調べてきた. そこで今春逝去した Shepp を記念して $\Lambda_p(f)$ を「Shepp 空間」と名付けることにした.

Shepp 空間 $(\Lambda_p(f), d_p^f)$ は ℓ_p の部分集合であり, 数々の興味ある数列空間を例として含んでいる [2, 3]. $\Lambda_p(f)$ は平行移動不変距離 $d_p^f(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ により位相加群となるが, 一般には線形空間ではなく [1, 6], また数列空間としての具体的な表現も明確ではない. そこで $\Lambda_p(f)$ が線形空間になるための条件, あるいは $\Lambda_p(f)$ の数列による具体的な表現や距離の評価などが問題となる.

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 46A45; Secondary 46A16, 46B20
Key words and phrases: 数列空間, $\Lambda_2^0(f), \Lambda_2(f), \Lambda_2^\varphi(f)$, doubling condition, doubling dimension, 線形性

$p=2$ の場合はフーリエ変換と doubling dimension の概念を導入することによってこれらの問題にアプローチできる．$f \in L_2$ のフーリエ変換を $\hat{f}(\alpha)$ とし, $\varphi_f(x) := \int_0^x \alpha^2 |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha$ と定義する．ここで φ_f を用いて二つの数列空間を導入する．$\Lambda_2(f)$ の内側近似空間:

$$\Lambda_2^0(f) := \left\{ \boldsymbol{a} \;\middle|\; \sum_k a_k^2 \varphi_f\left(\frac{1}{|a_k|}\right) + \sum_k \int_{\frac{1}{|a_k|}}^{+\infty} |\hat{f}(\alpha)|^2 d\alpha < +\infty \right\}$$

と, 外側近似空間:

$$\Lambda_2^{\varphi}(f) := \left\{ \boldsymbol{a} \;\middle|\; \sum_k a_k^2 \left(1 + \varphi_f\left(\frac{1}{|a_k|}\right)\right) < +\infty \right\}$$

である．これらの空間の間には包含関係 $\Lambda_2^0(f) \subset \Lambda_2(f) \subset \Lambda_2^{\varphi}(f) \subset \ell_2$ が成り立つ．$\Lambda_2^0(f)$ は $\Lambda_2(f)$ の最大の線形部分空間であり, 特に $\Lambda_2^0(f) = \Lambda_2^{\varphi}(f)$ (したがって $\Lambda_2^0(f) = \Lambda_2(f) = \Lambda_2^{\varphi}(f)$) のとき $\Lambda_2(f)$ は線形空間である．一方, doubling dimension は次のように定義される．

Definition 1. [3]　$[0, +\infty)$ 上の非負関数 $\varphi(x)$ が, ある実数 h に対して,

$$D(h;\varphi) := \limsup_{x \to +\infty, \varphi(x) \neq 0} \sup_{T \geq 1} \frac{\varphi(Tx)}{\varphi(x) T^h} < +\infty$$

となるとき φ は **doubling condition** を満たすと言う．

$$H(\varphi) := \inf \{ h \mid D(h;\varphi) < +\infty \}$$

を φ の **doubling dimension** と呼ぶ. ただし, $\inf \emptyset := +\infty$ とする．

この概念を適用することによって, $H(\varphi_f) < 2$ ならば $\Lambda_2^0(f) = \Lambda_2^{\varphi}(f)$ (したがってこのとき $\Lambda_2(f)$ は線形空間となる), が得られている [3]. この逆が成り立つか否かが未解決であった. このたび逆も成立することが証明できた. その報告が本講演の目的である．

Theorem 2. 任意の $f(\neq 0) \in L_2$ に対して次の条件は同値である．

(C.1)　$\Lambda_2^0(f) = \Lambda_2^{\varphi}(f) \big(= \Lambda_2(f)\big)$.

(C.3)　$H(\varphi_f) < 2$, すなわち, ある $\varepsilon > 0$ が存在して

$$\limsup_{X \to +\infty} \sup_{T \geq 1} \frac{\varphi_f(TX)}{\varphi_f(X) T^{2-\varepsilon}} < +\infty$$

が成り立つ．

証明には次の補題が重要な鍵となる．

Lemma 3. 集合 $\mathfrak{X}$ 上の非負関数 $\Phi(x), \Psi(x)$ について,

(1) $\Psi(x)$ は有界, かつ

(2) $\sum_n \Phi(a_n) < +\infty, a_n \in \mathfrak{X}$ から $\sum_n \Psi(a_n) < +\infty$ が導かれる

とする. このときある定数 $B > 0$ が存在して $\Psi(x) \leq B\Phi(x), x \in \mathfrak{X}$ となる.

しかし, $\Lambda_2^0(f) = \Lambda_2^\varphi(f)$ は $\Lambda_2(f)$ が線形空間になるための必要条件ではない. 実際, 次の反例が存在する.

Example 4. $\hat{f}(\alpha) := \dfrac{1}{\sqrt{a}\log\alpha}\mathbf{1}_{(-\infty,-e]\cup[e,+\infty)}$ とすると $H(\varphi_f) = 2$ である. このとき $\Lambda_2(f), \Lambda_2^\varphi(f)$ はともに線形空間であるが $\Lambda_2^0(f) = \Lambda_2(f) \subsetneq \Lambda_2^\varphi(f)$ である.

References

[1] S.D. Chatterji and V. Mandrekar, *Quasi-invariance of measures under translation.* Math. Z. **154** (1977), 19–29.

[2] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, *An L_p function determines ℓ_p*, Proc. Japan Acad., **84**(3), Ser. A (2008), 39–41.

[3] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, *Doubling condition and linearity of the sequence space $\Lambda_p(f)$*, Kyushu J. Math., **65**, (2), (2011), 335-347.

[4] A. Honda, Y. Okazaki and H. Sato, *Metrics on the sequence space $\Lambda_p(f)$*, Kyushu J. Math., *to appear.*

[5] S. Kakutani, *On equivalence of infinite product measures*, Kyushu J. Math., **66**, (2), (2012), 365-374.

[6] G. Nakamura and K. Hashimoto, *On the linearity of some sets of sequences defined by L_p-functions and L_1-functions determining ℓ_1*, Proc. Japan Acad., **87**(5), Ser. A (2011), 77–82.

[7] L.A. Shepp, *Distinguishing a sequence of random variables from a translate of itself*, Ann. Math. Statist. **36**, (1965) 1107–1112.

本田 あおい: aoi@ces.kyutech.ac.jp
岡崎 悦明 : okazaki@ces.kyutech.ac.jp
九州工業大学情報工学研究院システム創成情報工学系
820-8502 福岡県飯塚市川津 680-4

佐藤 坦 : satohrs@etude.ocn.ne.jp
九州大学名誉教授 (数理学研究院)
814-0104 福岡市城南区別府 2-20-46-803

Semiclassical limit of the Schrödinger kernels on the h-Heisenberg group

Toshinao Kagawa
Tokyo University of Science, Department of Mathematics,

We consider the h-Heisenberg group defined by inserting a parameter $h > 0$ in the group law of the Heisenberg group,

$$(\alpha, z) \cdot_h (\beta, w) = \left(\alpha + \beta, z + w + \frac{h}{2}[\alpha, \beta]\right), \qquad (\alpha, z), (\beta, w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{R} \cong \mathcal{H}^h_{2n+1},$$

where the anti-symmetric bilinear form $[\alpha, \beta]$ of $\alpha = (x_1 + iy_1, \cdots, x_n + iy_n)$ and $\beta = (u_1 + iv_1, \cdots, u_n + iv_n)$ is defined by

$$[\alpha, \beta] = \text{Im } \langle \alpha, \beta \rangle = \sum_{i=1}^{n} (y_i u_i - x_i v_i),$$

and $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the Hermitian inner product. h-Heisenberg group tends to Euclidean space when we take the limit as h tends to 0.

The left invariant vector fields X_j, Y_j and Z on h-Heisenberg group are defined as

$$X_j = \frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{h}{2} y_j \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_j = \frac{\partial}{\partial y_j} - \frac{h}{2} x_j \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{and} \quad Z = \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{for} \quad j = 1, \ldots, n.$$

The sub-Laplacian $\mathcal{L}_h$ on $\mathcal{H}^h_{2n+1}$ is defined by

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_h &= -\sum_{j=1}^{n} \left(X_j^2 + Y_j^2\right) \\ &= -\triangle - \frac{h^2}{4} \sum_{j=1}^{n} (x_j^2 + y_j^2) \frac{\partial^2}{\partial z^2} + h \sum_{j=1}^{n} \left(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right) \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

where

$$\triangle = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}\right).$$

The h-Heisenberg group $\mathcal{H}^h_3$ and the sub-Laplacian $\mathcal{L}_h$ can be seen in [2]. The heat kernels of the sub-Laplacian on h-Heisenberg group are constructed by scaling Fourier Wigner transform, and the limit of the heat kernels is considered when h tends to 0.

We define the convolution on $\mathcal{H}^h_{2n+1}$ by

$$(f *_{\mathcal{H}} g)(\alpha, z) = \int_{\mathcal{H}^h_{2n+1}} f((\beta, w)^{-1} \cdot_h (\alpha, z)) g(\beta, w) d\beta dw, \qquad (\alpha, z) \in \mathcal{H}^h_{2n+1}.$$

Then the solution of the Schrödinger equation

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}_h\right)U_t(\alpha,z)=0,$$

with the initial condition $U_0(\alpha,z)=f$, is given by

$$U_t(\alpha,z)=S_t^{\mathcal{L}_h}*_{\mathcal{H}}f,$$

with the fundamental solution $S_t^{\mathcal{L}_h}$ since the sub-Laplacian is left invariant. We call $S_t^{\mathcal{L}_h}$ the Schrödinger kernels.

We construct the Schrödinger kernel $S_t^{\mathcal{L}_h}$ of the sub-Laplacian $\mathcal{L}_h$ on the h-Heisenberg group based on the Mehler's formula, explicitly. We show that the Schrödinger kernel can be seen in tempered distribution $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n+1})$, and there exists the limit of the Schrödinger kernels when h tends to 0. We call this semiclassical limits.

The following lemma gives that Schrödiner kernel can be seen in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n+1})$.

LEMMA 1. *For all* $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{\sin^n x}$ *is in* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

THEOREM 2. *The Schrödinger kernel* $S_t^{\mathcal{L}_h}$ *of* $\mathcal{L}_h$ *is given by*

$$S_t^{\mathcal{L}_h}(\alpha,z)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\tau z}\frac{1}{(4\pi i)^n}\frac{(h\tau)^n}{\sin^n(h\tau t)}e^{i\frac{h\tau}{4}|\alpha|^2\cot(h\tau t)}d\tau,\qquad (\alpha,z)\in\mathcal{H}^h_{2n+1},t\in\mathbb{R}.\tag{1}$$

where the integral is the partial Fourier transform in the sense of tempered distribution.

THEOREM 3. *For all* (α,z) *in* $\mathbb{R}^{2n+1}$,

$$\lim_{h\to 0}S_t^{\mathcal{L}_h}(\alpha,z)=(2\pi)^{-1/2}\frac{1}{(4\pi ti)^n}e^{i\frac{|\alpha|^2}{4t}}\delta(z),$$

where $S_t^{\mathcal{L}_h}$ *is given by* (1).

References

[1] A. DASGUPTA and M. W. WONG : *Weyl transforms and the Heat Equation for the Sub-Laplacian on the Heisenberg Group,* in *New Developments in Pseudo-Differential Operators,* Operator Theory: Advances and Applications **189**, Birkhäuser, 2009, 33-42.

[2] T. KAGAWA and M. W. WONG : *Semiclassical Limits of Heat kernels of Laplacians on the h-Heisenberg Group,* Math. Model. Nat. Phenom, **8**, (2013), 132-142.

[3] S. THANGAVELU : *Harmonic Analysis on the Heisenberg Group,* Birkhäuser, 1998.

[4] M. W. WONG : *Weyl transforms, the heat kernel and Green function of degenerate elliptic operator,* Ann. Glob. Anal. Geom. **28**, pp.271-283(2005)

Triebel-Lizorkin spaces on the Heisenberg group

Guorong HU (University of Tokyo)

This talk is based on [4]. We are aiming at generalizing the theory of Triebel-Lizorkin spaces from Euclidean space to the Heisenberg group. Recall that the Heisenberg $\mathbb{H}^n$ is the Lie group whose underlying manifold is $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ and whose multiplication is given by

$$(z_1, \cdots, z_n, t) \cdot (z_1', \cdots, z_n', t') := \Big(z_1 + z_1', \cdots, z_n + z_n', t + t' + 2\mathrm{Im}\big(\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j'}\big)\Big).$$

A natural basis for the Lie algebra of left-invariant vector fields on $\mathbb{H}^n$ is given by

$$T := \frac{\partial}{\partial t}, \quad X_j := \frac{\partial}{\partial x_j} - 2y_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad Y_j := \frac{\partial}{\partial y_j} + 2x_j \frac{\partial}{\partial t}, \quad j = 1, \cdots, n.$$

The only nontrivial commutation relations among those are $[X_j, Y_j] = T$, $j = 1, \cdots, n$. Due to these relations, the non-elliptic *sub-Laplacian*

$$\mathcal{L} := \sum_{j=1}^{n} (X_j^2 + Y_j^2),$$

on $\mathbb{H}^n$ is still hypoelliptic. The sub-Laplacian takes over in many respects of analysis on $\mathbb{H}^n$ the role which the Laplacian plays on Euclidian space.

We introduce Triebel-Lizorkin spaces on $\mathbb{H}^n$ in terms of Littlewood-Paley type decomposition related to $\mathcal{L}$. Let $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ denote the space of restrictions to $\mathbb{R}_+ := [0, \infty)$ of functions in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, and let $\varphi_0, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ such that

$$\varphi_0^{(2k+1)}(0) = 0 \quad \text{for all } k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1}$$

$$\operatorname{supp} \varphi_0 \subset [0, 2] \quad \text{and} \quad |\varphi_0(\lambda)| \geq c > 0 \quad \text{if} \quad \lambda \in [0, 5/3] \tag{2}$$

$$\operatorname{supp} \varphi \subset [1/2, 2] \quad \text{and} \quad |\varphi(\lambda)| \geq c > 0 \quad \text{if} \quad \lambda \in [3/5, 5/3]. \tag{3}$$

Definition 1 ([4]) *For $-\infty < s < \infty$, $0 < p < \infty$ and $0 < q \leq \infty$, the Treibel-Lizorkin space $F^s_{p,q}(\mathbb{H}^n; \varphi_0, \varphi)$ is defined as the collection of those $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{H}^n)$ for which*

$$\|f\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{H}^n;\varphi_0,\varphi)} := \left\| \Big(\sum_{j=0}^{\infty} \big|\varphi_j\big(\sqrt{-\mathcal{L}}\big) f\big|^q \Big)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{H}^n)} < \infty.$$

Here and in what follows, $\varphi_j := \varphi(2^{-j} \cdot)$ for $j \geq 1$.

It is not clear from the definition whether the finiteness of the quasinorms $\|\cdot\|_{F^s_{p,q}(\mathbb{H}^n;\varphi_0,\varphi)}$ depend on the choice of φ_0, φ. In order to show that a different choice of φ_0, φ yields equivalent quasinorms, the following Peetre type maximal function is useful: If $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{H}^n)$, $\varphi_0, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$, and $a > 0$, define

$$(\varphi_j f)^*_a(u) := \sup_{v \in \mathbb{H}^n} \frac{|\varphi_j(\sqrt{-\mathcal{L}})f(v)|}{(1 + 2^j\|v^{-1} \cdot u\|)^a}, \quad u \in \mathbb{H}^n, \quad j \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

where $\|\cdot\|$ denotes the Korányi-Folland gauge on $\mathbb{H}^n$.

Proposition 1 ([4]) *Suppose that $-\infty < s < \infty$, $0 < p < \infty$, $0 < q \le \infty$, $a > (2n+1)/\min(p,q)$, and that (φ_0, φ) and $(\widetilde{\varphi}_0, \widetilde{\varphi})$ are any two couples of functions in $\mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$ satisfying (1)–(3). Then there exists a constant $C > 0$ such that for any $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{H}^n)$*

$$\left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| (\widetilde{\varphi}_j f)^*_a \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{H}^n)} \le C \left\| \left(\sum_{j=0}^{\infty} \left| \varphi_j(\sqrt{-\mathcal{L}}) f \right|^q \right)^{1/q} \right\|_{L^p(\mathbb{H}^n)}.$$

It follows from Proposition 1 that $F^s_{p,q}(\mathbb{H}^n;\varphi_0,\varphi)$ are independent of the choice of φ_0 and φ, as long as φ_0 and φ satisfy (1)–(3). Hence we may omit φ_0 and φ in the notation $F^s_{p,q}(\mathbb{H}^n;\varphi_0,\varphi)$ and write $F^s_{p,q}(\mathbb{H}^n)$ instead. It turns out that $F^s_{p,q}(\mathbb{H}^n)$ unifies several formerly studied function spaces on $\mathbb{H}^n$ such as Lebesgue spaces, (the local version of) Hardy spaces ([3]) and fractral Sobolev spaces ([1], [2]). We investigate further properties of $F^s_{p,q}(\mathbb{H}^n)$ including the following:

1. Real and complex interpolations.

2. Embedding and dual.

3. Atomic decomposition.

We also consider homogeneous version function spaces $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{H}^n)$, and obtains the $\dot{F}^s_{p,q}(\mathbb{H}^n)$-boundedness of a class of convolution singular integral operators, which includes the Riesz transforms $X_j(-\mathcal{L})^{-1/2}$, $Y_j(-\mathcal{L})^{-1/2}$, $j = 1, \cdots, n$.

We remark that all our results hold on general stratified Lie groups as well.

References

[1] G. B. Folland, Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups, Ark. Mat. **13** (1975), 161–207.

[2] G. B. Folland and E. M. Stein, Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complex and analysis on the Heisenberg group, Comm. Pure Appl. Math. **27** (1974), 429–522.

[3] G. B. Folland and E. M. Stein, Hardy Spaces on Homogeneous Groups. Mathematical Notes, Vol 28, Princeton University Press, Princeton, NJ, USA, 1982.

[4] G. Hu, Homogeneous Triebel-Lizorkin spaces on stratified Lie groups, J. Funct. Spaces Appl. **2013** (2013), Article ID 475103, 16 pages.

Unimodular fourier multipliers on Wiener Amalgam Spaces

Jayson Cunanan

Graduate School of Mathematics, Nagoya University
jsonm11@gmail.com

ABSTRACT

We study the boundedness of unimodular Fourier multipliers on Wiener amalgam spaces. For a real-valued homogeneous function μ on $\mathbb{R}^n$ of degree $\alpha \geq 2$, we show the boundedness of the operator $e^{i\mu(D)}$ between the weighted Wiener amalgam space $W_s^{p,q}$ and $W^{p,q}$ for all $1 \leq p, q \leq \infty$ and $s > n(\alpha - 2)|1/p - 1/2| + n|1/p - 1/q|$. This threshold is shown to be optimal for regions $\max(1/q, 1/2) \leq 1/p$ and $\min(1/q, 1/2) \geq 1/p$. Moreover, we give sufficient conditions for the boundedness of $e^{i\mu(D)}$ on $W^{p,q}$ for $\alpha \in (0, 2)$.