ON UNIFORM CONTINUITY OF FUNCTIONS

KEISUKE IKEDA（首都大学東京，大学院生，澤野研）

We introduce expansions that are generated from factorials by using the lemma below. For all $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!} = \frac{1}{(k-1)!}$.

The sum converges since $(n+2)! \geq 2^n$ for all $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

For all $a \in [0,1]$, there exists a sequence $\{a_n\}_{n \geq 2}$ of non-negative integers such that $a_n \leq n-1$, and that

$$a = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.$$

To begin with, we give two kinds of rules below.

Let $a \in [0,1]$. Suppose that a has an expression:

$$0 \leq a_n \leq n-1 \quad (n = 2, 3, \ldots), \quad a = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{n!}.$$

Define the sequence $\{a_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ in the following manner:

Rule 1 If there is not any number n such that $1 \leq a_n \leq n-2$, that is, if $a_n = 0$ or $a_n = n-1$ define $a_n^* = \dfrac{1}{n-1} a_n$. ($a^*$ assumes only the value 0 or 1.)

Rule 2 If there is a number n such that $1 \leq a_n \leq n-2$. Define n_0 as the minimum of such numbers. When $n < n_0$, define $a_n^* = \dfrac{1}{n-1} a_n$. When $n = n_0$, define $a_{n_0}^* = 1$. When $n > n_0$, define $a_n^* = 0$. (Again $a_n^* = \dfrac{1}{n-1} a_n \in \{0,1\}$)

For $a_2^*, a_3^*, \ldots$ which is determined in this way, define a^* as

$$a^* = \frac{a_2^*}{2^2} + \frac{a_3^*}{2^3} + \cdots + \frac{a_n^*}{2^n} + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n^*}{2^n}.$$

Define $f(a) = a^*$, $a \in [0,1]$. Then f is an increasing function.

Here, we attempt to approximate these Cantor functions.

A piecewise linear function f on $[0,1]$ is a continuous function, if there exists a partition $\{t_j\}_{j=0}^{N}$ of $[0,1]$ such that f is affine on each $[t_{j-1}, t_j]$. In this case, $(t_j, f(t_j))$, $0 \leq j \leq N$ is called a vertex.

Let L be a natural number. The approximate function of $t \mapsto t^*$ of order L is a piecewise linear function whose vertices are the points of the form (t, t^*), where $0 \leq t \leq 1$ and $L!t$ is an integer.

Here, we explain the method of drawing the approximate function of the fifth order.

(1) Calculate a_2, a_3, a_4, a_5 in the expansion of $t = \dfrac{a}{120} = \dfrac{a_2}{2!} + \dfrac{a_3}{3!} + \dfrac{a_4}{4!} + \dfrac{a_5}{5!}$ for $a = 0, 1, 2, \ldots, 119$. Define

$$a_2 = \left[\frac{a}{60}\right] \tag{0.1}$$

$$a_3 = \left[\frac{a}{20} - 3a_2\right] \tag{0.2}$$

$$a_4 = \left[\frac{a}{5} - 12a_2 - 4a_3\right] \tag{0.3}$$

$$a_5 = 120\left(\frac{a}{120} - \frac{a_2}{2!} - \frac{a_3}{3!} - \frac{a_4}{4!}\right). \tag{0.4}$$

(2) We then calculate $t^* = \left(\dfrac{a}{120}\right)^* = \dfrac{a_2^*}{2^2} + \dfrac{a_3^*}{2^3} + \dfrac{a_4^*}{2^4} + \dfrac{a_5^*}{2^5}$ for $a = 0, 1, 2, \ldots, 119$.

(3) Complementing $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$, we create an affine function using the data $\left(\dfrac{a}{120}, \left(\dfrac{a}{120}\right)^*\right)$, $(a = 0, 1, 2, \ldots, 120)$.

We consider the union K_n of the intervals of the form:

$$I_{a_2,a_3,\ldots,a_n} = \left[\frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \cdots + \frac{a_n}{n!}, \frac{a_2}{2!} + \frac{a_3}{3!} + \cdots + \frac{a_n+1}{n!}\right],$$

where $a_2, a_3, \ldots, a_n$ run through all integers $a_2 = 0, 1, a_3 = 0, 2, \ldots, a_n = 0, n-1$. Example,l et $n = 3$. Here we list endpoints of intervals that constitute K_3 and the values of f on the endpoints of the intervals.

a_2, a_3	endpoint of I_{a_2,a_3}	$\min_{x \in I_{a_2,a_3}} f(x)$	$\max_{x \in I_{a_2,a_3}} f(x)$
$(0,0)$	$0, 1/6$	0	$1/8$
$(0,2)$	$1/3, 1/2$	$1/8$	$1/4$
$(1,0)$	$1/2, 2/3$	$1/4$	$3/8$
$(1,2)$	$5/6, 1$	$3/8$	$1/2$

Thus, $K_3 = \left[0, \dfrac{1}{6}\right] \cup \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right] \cup \left[\dfrac{5}{6}, 1\right]$.

From the above examples, we learn:

Let $f(x) = x^*$, $x \in [0,1]$. For all $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, $f'(x)$ does not exist as a finite value.

Let us recall the definition of the box dimension.

Suppose that E is subset on the number line $[0,1]$.

(1) Write $N_r(E)$ for the smallest number of intervals of length r to cover E.

(2) The box dimension $\dim_B E$ of the set E is defined to be $\dim_B E = \lim_{r \to 0} \dfrac{\log N_r(E)}{-\log r}$.

Let K be the nondifferentiability set of the Cantor function with respect to the expansion generated by the factorial.Then the box dimension of the set K is 0.

References

[1] R. Darst, The Hausdorff dimension of the nondifferentiability set of the Cantor function is $[\ln(2)/\ln(3)]^2$, Proc. Amer. Math. Soc. **119** (1993), no. 1, 105–108.

[2] R. Darst, Hausdorff dimension of sets of non-differentiability points of Cantor functions, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **117** (1995), no. 1, 185–191.

[3] K. J. Falconer, The geometry of fractal sets, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1985.

192-0397 八王子市南大沢１－１ 首都大学東京理工学研究科 数理情報科学専攻 池田圭祐

KOMLOS の補題とその MORREY 空間の前双対への応用

澤野嘉宏

Komlos の補題とは次の補題である．

Proposition 0.1. $\{X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots\}$ を確率空間の可測関数の L^1-有界である点列とする．このとき，$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ から部分列 $X_{n_1}, X_{n_2}, \ldots, X_{n_k}, \ldots$ を取り出して，

$$\frac{X_{n_1} + X_{n_2} + \cdots + X_{n_k}}{k}$$

が概収束するようにできる．

一方で，$1 < q \le p < \infty$ に対して，$\mathcal{H}^{p'}_{q'}$ でブロック空間を表す．つまり，$\mathbb{R}^n$ 上の L^p 関数 a がブロックであるとは，

$$\|a\|_{L^p} \le |Q|^{1/p-1/q}$$

をみたす立方体 Q が存在することである．

$$\mathcal{H}^{p'}_{q'} = \left\{ f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \,:\, \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| < \infty \text{ 各 } a_j \text{ はブロック} \right\}$$

と定義する．ノルムは

$$\|f\|_{\mathcal{H}^{p'}_{q'}} = \inf \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|$$

で与えられる．これの双対空間は Morrey 空間であるが，ここでは必要としないので，Morrey 空間の定義は与えない．

$$(\mathcal{H}^{p'}_{q'})_1 = \left\{ f = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j a_j \,:\, \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \le 1 \text{ 各 } a_j \text{ はブロック} \right\}$$

和泉，佐藤，薮田によって次の定理が示された．

Theorem 0.2. $0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots \le f_j \le \cdots$ を満たしている可測関数列につき，$f_j \in (\mathcal{H}^{p'}_{q'})_1$ が成り立つならば，$f = \lim_{j\to\infty} f_j \in \mathcal{H}^{p'}_{q'}$ が得られる．

この定理の証明の問題点は f に相当する関数の分解を与えることが困難であったことである．和泉，佐藤，薮田の三氏はこの問題点を対角線論法で解決した．

この講演では，この定理の別証明を和泉，佐藤，薮田の手法とは全く違う，Komlos の定理を用いた方法で説明したい．

References

[1] Remarks on a Subspace of Morrey Spaces, Tokyo J. Math., **37**, No. 1, 2014, 185–197.
[2] J. Komlos, On the determinant of random matrices, Studia Sci. Math. Hungar. **3** 1968, 387–399.

192-0397　八王子市南大沢１－１　首都大学東京理工学研究科　数理情報科学専攻　澤野嘉宏

スペクトル測度とスペクトル積分

伊東由文　(徳島大学名誉教授)

本論文においては, 直交測度と直交測度による積分の理論を用いてスペクトル測度とスペクトル積分の理論を再構成し, この理論を改良することが目的である. その結果を用いて, ノイマンのスペクトル分解定理と一般展開定理を証明する. このようにして, 自己共役作用素のスペクトル分解の理論が改良され, 見通しよく構成されることを示す.

これは拙著 [1], 第 5 章において得られた結果を論文に表現したものである.

これは, 吉田 [2] のスペクトル分解と一般展開定理についての結果の改良である.

まず, **直交測度**の定義を与える.

定義 1　$\mathcal{H}$ はヒルベルト空間であるとする. $(\boldsymbol{R}, \mathcal{M}, \mu)$ は $\boldsymbol{R}$ 上のルベーグ測度空間であるとする. このとき, $\mathcal{H}$ に値をもつ $\mathcal{M}$ 上の完全加法的集合関数 $\xi:\ \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ が $(\boldsymbol{R}, \mathcal{M}, \mu)$ 上の**直交測度**であるということは, $\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{M}$ に対し, $(\xi(\Lambda_1), \xi(\Lambda_2)) = \mu(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$ が成り立つことであると定義する.

いま, ルベーグ測度空間 $(\boldsymbol{R}, \mathcal{M}, \mu)$ 上の直交測度 $\xi; \mathcal{M} \to \mathcal{H}$ が与えられているとするとき, $f \in L^2 = L^2(\boldsymbol{R})$ に対し, 直交測度 ξ に関する f の積分

$$J(f) = \int f(\lambda) d\xi(\lambda)$$

が定義できる.

次に, **スペクトル測度**と**スペクトル積分**の定義とその基本性質について考察する.

定義 2　$\mathcal{H}$ はヒルベルト空間であるとし, $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の空間を $P(\mathcal{H})$ とし, $(\boldsymbol{R}, \mathcal{M})$ は $\boldsymbol{R}$ 上の可測空間であるとする. $\boldsymbol{R}$ の集合の σ 代数 $\mathcal{M}$ は $\boldsymbol{R}$ のボル集合族 $\boldsymbol{B}$ を含むとする. このとき, $\mathcal{H}$ 上の射影作用素に値をとる $\mathcal{M}$ 上の集合関数 $E:\ \mathcal{M} \to P(\mathcal{H})$ が与えられているとする. このとき, $\mathcal{H}$ の射影作用素の系 $\{E(\Lambda);\ \Lambda \in \mathcal{M}\}$ が**スペクトル測度**であるとは, 次の条件 (i)~(iii) が成り立つことであると定義する:

(i)　$\Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathcal{M}$ に対し,

$$E(\Lambda_1)E(\Lambda_2) = E(\Lambda_2)E(\Lambda_1) = E(\Lambda_1 \cap \Lambda_2)$$

が成り立つ.

(ii)　$\mathcal{M}$ の集合の可算列 $\Lambda_1, \Lambda_2, \cdots$ がどの二つも互いに素であるとき,

$$\Lambda = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Lambda_j = \sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j$$

に対し,

$$E(\Lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} E(\Lambda_j)$$

が成り立つ. ここで, 右辺の級数は強収束の意味で収束するとする.

(iii) $E(\boldsymbol{R})=I, E(\phi)=0$ が成り立つ.

定理 1 $\mathcal{H}$ はヒルベルト空間であるとし, $\boldsymbol{R}$ 上の可測空間 $(\boldsymbol{R},\mathcal{M})$ 上のスペクトル測度 E が与えられているとする. $\mathcal{H}$ の任意の元 x を一つとって固定する. このとき, $\mathcal{H}$ に値をもつ $\mathcal{M}$ 上の集合関数 $\xi_x:\ \mathcal{M}\to\mathcal{H}$ を, 関係式

$$\xi_x(\Lambda)=E(\Lambda)x,\ (\Lambda\in\mathcal{M})$$

によって定義する.

いま,

$$\mu_x(\Lambda)=\|E(\Lambda)x\|^2,\ (\Lambda\in\mathcal{M})$$

とおくとき, $(\boldsymbol{R},\mathcal{M},\mu_x)$ は完全加法的正値測度空間になる.

このとき, ξ_x は $(\boldsymbol{R},\mathcal{M},\mu_x)$ 上の直交測度であって, 条件 $\xi_x(\boldsymbol{R})=E(\boldsymbol{R})x=x,\ \xi_x(\phi)=E(\phi)x=0.$ を満たす.

いま, 定理 1 のような完全加法的正値測度空間 $(\boldsymbol{R},\mathcal{M},\mu_x)$ 上の直交測度 $\xi_x:\ \mathcal{M}\to\mathcal{H}$ が与えられているとする. このとき, $f\in L^2_{\mu_x}=L^2(\boldsymbol{R},\mu_x)$ に対し, 直交測度 ξ_x に関する f の積分

$$\int f(\lambda)d\xi_x(\lambda)$$

が定義できる. これを

$$S(f)x=\int f(\lambda)dE(\lambda)x=\int f(\lambda)d\xi_x(\lambda)$$

と表し, f の E による**スペクトル積分**であると定義する.

これを用いて, 自己共役作用素のスペクトル分解の問題を解決できる.

すなわち, $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 H に対し, ただ一つのスペクトル測度 $\{E(\Lambda);\ \Lambda\in\mathcal{M}\}$ が存在して, H のスペクトル分解

$$H=\int\lambda dE(\lambda)$$

が成り立つ.

最後に, **一般展開定理**の証明を与える.

定理 2(一般展開定理) $\mathcal{H}$ はヒルベルト空間であるとし, H は $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素であるとする. $\sigma(H)$ は H のスペクトルであるとするとき, H のレゾルベントを

$$R(\alpha;\ H)=(\alpha I-H)^{-1},\ (\alpha\notin\sigma(H))$$

と表す. このとき, $x\in\mathcal{H}$ に対して, 強収束の意味で等式

$$x=\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}}\Big\{\lim_{v\to+0}\frac{1}{2\pi i}\Big[\int_\alpha^\beta R(u-iv;\ H)xdu-\int_\alpha^\beta R(u+iv;\ H)xdu\Big]\Big\}$$

が成り立つ.

参考文献

[1] 伊東由文, 自然統計物理学の数学的基礎, プレプリント, 2013.

[2] 吉田耕作, 復刊ヒルベルト空間論, 共立出版, 1953, 初版; 2002, 復刊.

CRITERIA FOR THE $\tilde{C}$-INTEGRAL

TOSHIHARU KAWASAKI

The C-integral was introduced by B. Bongiorno as a minimal constructive integration process of Riemann type which contains the Lebesgue integral and the Newton integral. Moreover B. Bongiorno, Di Piazza and Preiss gave some criteria for the C-integral. The $\tilde{C}$-integral was introduced by D. Bongiorno as a minimal constructive integration process of Riemann type which contains the Lebesgue integral and the improper Newton integral. Moreover she gave some criteria for the $\tilde{C}$-integral. On the other hand, Nakanishi gave some criteria for the restricted Denjoy integral. Moreover the author gave new criteria for the C-integral in the style of Nakanishi. In this talk we will give new criteria for the $\tilde{C}$-integral in the style of Nakanishi.

References

[1] B. Bongiorno, *Un nuovo integrale per il problema della primitive*, Le Matematiche **51** (1996), 299–313.

[2] ———, *On the C-integral*, AMS Special Session on Nonabsolute Integration (University of Toronto, Toronto, September, 2000).

[3] B. Bongiorno, L. Di Piazza, and D. Preiss, *A constructive minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, J. London Math. Soc. **62** (2000), 117–126.

[4] D. Bongiorno, *On the problem of nearly derivatives*, Scientiae Mathematicae Japonicae **e-2004** (2004), 275–287.

[5] A. M. Bruckner, R. J. Freissner, and J. Foran, *The minimal integral which includes Lebesgue integrable functions and derivatives*, Coll. Math. **50** (1986), 289–293.

[6] R. A. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[7] R. Henstock, *The general theory of integration*, Clarendon Press, Oxford, 1991.

[8] T. Kawasaki and I. Suzuki, *Criteria for the C-integral*, Scientiae Mathematicae Japonicae, to appear.

[9] S. Nakanishi (formerly S. Enomoto), *Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, I*, Osaka Math. J. **7** (1955), 59–102.

[10] ———, *Sur une totalisation dans les espaces de plusieurs dimensions, II*, Osaka Math. J. **7** (1955), 157–178.

[11] S. Nakanishi, *The Denjoy integrals defined as the completion of simple functions*, Math. Japon. **37** (1992), 89–101.

[12] ———, *A new definition of the Denjoy's special integral by the method of successive approximation*, Math. Japon. **41** (1995), 217–230.

[13] W. F. Pfeffer, *The Riemann approach to integration*, Cambridge University Press, Oxford, 1993.

[14] S. Saks, *Theory of the integral*, Warsaw, 1937.

College of Engineering, Nihon University
E-mail address: `toshiharu.kawasaki@nifty.ne.jp`

2010 *Mathematics Subject Classification.* Primary: 26A36; Secondary: 26A39.

Key words and phrases. $\tilde{C}$-integral, C-integral, Denjoy integral, Lebesgue integral, improper Newton integral, Newton integral.

増大条件を満たす半線形楕円型方程式の解に対する除去可能定理

平田 賢太郎（広島大学理学研究科）

本原稿において，次元は $N \geq 3$ とし，Ω は $\mathbb{R}^N$ 内の有界領域，E は Ω 内の相対的閉集合とする．$\Omega \setminus E$ 上で或る方程式を満たす解が Ω 全体に方程式の解として拡張できるための E や解自身に対する条件を考察する．拡張可能であるとき，E はその方程式の解に対して**除去可能**であるという．証明の中で使うかもしれないので少し歴史的背景を述べておく．1926 年に Bouligand は Newton 容量 0 の集合 E は有界調和関数に対して除去可能であることを示した．Newton 容量 0 の集合の Hausdorff 次元は高々$N-2$ であるため，後に次元の小さい集合に対して関数の有界性よりも弱い条件下で除去可能性が研究された．Carleson による $\mathscr{L}^q$-条件を満たす調和関数に対する除去可能定理もあるが，1970 年に Harvey & Polking は滑らかな係数をもつ m 階線形偏微分方程式の超関数解 $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ に対して増大条件と除外集合 E の関係を調べている．その特別な場合として，或る増大条件を満たす調和関数に対する除去可能定理が得られる．2000 年に Riihentaus は彼らの方法を改良して劣調和関数に対する除去可能定理を与えた．劣調和関数に関する結果は吸収項を伴う方程式 $\Delta u = u^p$ の非負値解にも適用できる．その事を述べるために記号を導入する．$\mathbb{R}^N$ 上の Lebesgue 測度を $\mathfrak{m}$ で表す．$d(x,E)$ は点 x から E までの Euclid 距離を表し，E の r-近傍を $E(r) := \{x \in \mathbb{R}^N : d(x,E) < r\}$ で表す．このとき，E の α **次元上 Minkowski 容量**は

$$\mathcal{M}^\alpha(E) := \limsup_{r \to 0+} \frac{\mathfrak{m}(E(r))}{r^{N-\alpha}}$$

で定義される．α 次元 Hausdorff 測度 $\mathcal{H}^\alpha$ との関係は $\mathcal{H}^\alpha(E) \leq C\mathcal{M}^\alpha(E)$ である．ただし，C は α と N のみに依存する正定数である．逆向きは一般には成り立たない．

Riihentaus (2000). 或る $\alpha \in [0, N-2)$ に対して $\mathcal{M}^\alpha(E) < \infty$ とする．$\Omega \setminus E$ 上の劣調和関数 u が増大条件

$$u(x) = o(d(x,E)^{2-N+\alpha}) \quad (x \to y \in E) \tag{1}$$

を満たすならば，u は Ω 全体に劣調和拡張できる．

簡単のために

$$p_\alpha := \frac{N-\alpha}{N-\alpha-2}$$

と書く．方程式 $\Delta u = u^p$ の除去可能性は Véron (1981) や Baras & Pierre (1984) により研究されたが何れも $p \geq p_\alpha$ の場合のものである．$1 < p < p_\alpha$ の場合は α 次元滑らかなコンパクト多様体 E の近くで $u(x) \sim d(x,E)^{2-N+\alpha}$ または $u(x) \sim d(x,E)^{-2/(p-1)}$ を満たす非負値解の存在が Delanoë (1992), Finn & McOwen (1993), Grillot (1997) によって示されている．従って，除去可能定理を得るためには何らかの条件が必要である．Riihentaus の定理を適用すれば次の結果が直ちに従う．

定理 1 (除去可能定理)**.** $p \geq 1$ とし，或る $\alpha \in [0, N-2)$ に対して $\mathcal{M}^\alpha(E) < \infty$ とする．$\Omega \setminus E$ における $\Delta u = u^p$ の $\mathscr{C}^2$ 級非負値解 u が増大条件 (1) を満たすならば，u は Ω 全体に $\Delta u = u^p$ の $\mathscr{C}^2$ 級解として拡張できる．

証明. $\overline{D} \subset \Omega$ なる有界開集合 D をとる．$\Delta u = u^p \geq 0$ より，u は $\Omega \setminus E$ で劣調和である．Riihentaus の定理より，u は Ω 全体に劣調和拡張できる．上半連続性より $u \in \mathscr{L}^\infty(D \setminus E)$ である．$D \setminus E$ で

Rieszの分解定理を適用して，

$$u(x) = h(x) - \int_{D\setminus E} G_D(x,y)u(y)^p\,d\mathfrak{m}(y) \quad (x \in D \setminus E)$$

と書ける．ただし，h は $D\setminus E$ における u の最小調和優関数である．従って，$h \in \mathscr{L}^\infty(D\setminus E)$ である．Bouligandの定理より，h は D 全体に調和拡張できる．それを $\overline{h}$ とし，

$$\overline{u}(x) := \overline{h}(x) - \int_{D\setminus E} G_D(x,y)u(y)^p\,d\mathfrak{m}(y)$$

と定義する．このとき，$D\setminus E$ 上で $\overline{u} = u$ である．また，Greenポテンシャルの正則性定理より $\overline{u} \in \mathscr{C}^2(D)$ であり，D 上で $\Delta\overline{u} = \overline{u}^p$ を満たすことがわかる． □

注意 1. (1) $p \geq p_\alpha$ のときは，Véronの比較議論により増大条件は常に満たされる．

(2) $\Delta u = u^p$ の場合は，劣調和拡張の副産物として $u \in \mathscr{L}^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ が従い，分布関数 u^p のGreenポテンシャルの滑らかさが保証された．しかし，$-\Delta u = u^p$ の場合は，局所有界性は直ちに従わず更なる議論が必要である．

次に $-\Delta u = u^p$ に対する結果を述べる．除外集合 E にはMinkowski容量有限よりも少し強い条件を課す．

定義 1. E が α **次元 Lipschitz 集合**であるとは，定数 $r_0 > 0$ と $C > 1$ が存在して任意の $x \in E$ と $0 < r, R < r_0$ に対して

$$\frac{1}{C}R^\alpha \leq \mathcal{H}^\alpha(E \cap B(x,R)) \leq CR^\alpha, \tag{2}$$

$$\mathfrak{m}(E(r) \cap B(x,R)) \leq Cr^{N-\alpha}R^\alpha \tag{3}$$

が成り立つときをいう．条件 (3) のみを満たすときは α **次元 Minkowski 集合**とよぶ．

α 次元Lipschitz多様体（任意の $x \in E$ に対して，その近傍 $U \subset \mathbb{R}^N$ と双Lipschitz写像 $\phi : U \to \phi(U) \subset \mathbb{R}^N$ が存在して $\phi(U\cap E) = \phi(U) \cap (\mathbb{R}^\alpha \times \{0\}^{N-\alpha})$ を満たす）やCantor集合，Sierpinski三角形，Koch曲線などの自己相似集合は適当な次元のLipschitz集合である．

定理 2 (除去可能定理)**.** $0 \leq \alpha < N-2$ とし，$0 < p < p_\alpha$ とする．E は Ω 内の相対的閉な α 次元Minkowski集合とする．$\Omega \setminus E$ における $-\Delta u = u^p$ の $\mathscr{C}^2$ 級正値解が増大条件 (1) を満たすならば，u は Ω 全体に $-\Delta u = u^p$ の $\mathscr{C}^2$ 級解として拡張できる．

次の定理が示すように増大条件は必要かつ最良である．また，条件 $p < p_\alpha$ も必要である．

定理 3 (特異解の存在定理)**.** $0 \leq \alpha < N-2$ とし，$0 < p < p_\alpha$ $(p \neq 1)$ とする．$\partial\Omega$ は $\mathscr{C}^{1,1}$ 級とし，E は Ω 内のコンパクトな α 次元Lipschitz集合とする．このとき，

$$\begin{cases} -\Delta u = u^p & \text{in } \Omega \setminus E, \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

の正値解 $u \in \mathscr{C}^2(\Omega \setminus E)$ で

$$\frac{1}{C}d(x,\partial\Omega)d(x,E)^{2-N+\alpha} \leq u(x) \leq Cd(x,\partial\Omega)d(x,E)^{2-N+\alpha}$$

を満たすものが存在する．

$p_\alpha \leq p < (N-\alpha+2)/(N-\alpha-2)$ の場合は $u(x) \sim d(x,E)^{-2/(p-1)}$ なる正値解の存在がMazzeo & Pacard (1996) 等により示されている．定理3の証明および Δu や u の符号が無制限の場合の除去可能定理についてはHirata & Ono, *Nonlinear Anal.* **105** (2014), 10–23 をご覧頂きたい．