測度、積分を考える

米田　薫　（大阪府立大学・名誉教授）

(2014.8.16)

「大学での数学の出会いがいきなり $\varepsilon \cdot \delta$ 法だったのです・・・」、これはある知人の思い出である。１９７０年代に大学に入学した彼は、高校では数学が得意であったので、大学での専攻は数学にした。しかし、この最初の授業でのいきなりこの $\varepsilon \cdot \delta$ 法にぶつかったのである。それは大きな衝撃だったという。そして、それ以降の講義についていけなくなってしまった。その後、悩んだ末、専攻を変えて、哲学者になった。彼は語る、「もし、あの時、もう少し数学との出会いが違っておれば、今は数学の研究者になっていたかもしれない。今でも数学には憧れがあるから・・・」と。当時は、理工系でない新入生にもいきなり抽象数学から講義を始めるような先生がまだ居られた。これが大学の講義だという人がいた時代でもあった。故に、彼の例は例外ではなかった。学生、特に新入生に数学をどのように語り始めるかは、教える側としては慎重の上にも慎重であらねばならないという教訓がここにある。学生はなぜ戸惑うのか、解らなくなるのか。それらには”理由”があるはずである。教える側からみると、案外その戸惑いの中に宝の山が隠れている可能性があるのだが・・・。

今回は少し新入生の気持ちになって積分や測度について考えてみたい。前述のような「いきなり定義」や「いきなり抽象」でなく、新入生の持っている知識（いわゆる常識）から考えを紡いでみたい。故に、対象の世界はできるだけ実数空間を中心にして、定義に至る前から考え始めたい。具体的には実数空間での測度や積分について考える。

ライプニッツ（G.W.Leibniz: 1646-1716）は積分を $\int f(x)dx$ と書き、フーリエ（F.M.G.Fourier: 1772-1837）更に $\int_a^b f(x)dx$ と改良した。ライプニッツが積分を、このように表現したのにはどのような理由があったのだろうか。そこには何か積分の持つ本質的な意味が隠れているかもしれない。さらにその考えからどのような問題がでてくるのだろうか。ルベーグ積分や測度論を授業で取り上げる前に、少しはこの辺りについて学生には話してもいいのではないだろうか。

あるコード系に関するデジタル和問題への 測度論の応用

神谷 諭一 (大東文化大学)　　岡田 達也 (福島県立医科大学)
関口 健 (東北学院大学)　　塩田 安信 (東北学院大学)

1. Introduction Let $q \geq 2$ be an integer. Here, the notation $\mathbf{N}$ means the set of positive integers. We denote the q-adic expansion of $n \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ by $n = \sum_{i \geq 0} n_i q^i$, where $n_i \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, and define the sum of digits function S_q by $S_q(n) = \sum_{i \geq 0} n_i$. Investigating the various properties of $S_q(n)$ is called the digital sum problem. The typical examples are to find explicit formulas of the sums

$$\sum_{n=0}^{N-1} (S_q(n))^k \quad \text{(power sum)}, \quad \sum_{n=0}^{N-1} e^{\xi S_q(n)} \text{ (exponential sum)},$$

where $N, k \in \mathbf{N}$ and $\xi \in \mathbf{R}$. In the 1990s, Okada, Sekiguchi, and Shiota [4], [5] studied the digital sum problem from a viewpoint of the measure theory and found the close relation between $S_q(n)$ and the multinomial measure on the unit interval.

The digital sum problem for another code (or number) systems has been also considered by several authors. The typical code system is the reflected binary code (RBC), which is also called the Gray code. Kamiya and Murata [2] investigated the digital sum problem for RBC and found an interesting relation between RBC and the regular paperfolding sequence. In Kamiya and Murata [3], noticing this relation, they introduced a new code system related to generalized paperfolding sequences. Furthermore, for this code system, they obtained an explicit formula of the power sum in the case of $k = 1$.

In this paper, we first introduce a code system, which includes many known code systems as a particular case, and give explicit formulas of the exponential sum and the power sum for this code system by the measure theoretic method.

2. New code system Let $q \geq 2$ be an integer and σ the permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & q-1 \\ \sigma(0) & \sigma(1) & \cdots & \sigma(q-1) \end{pmatrix}$$

such that $\sigma^q = \mathrm{id}$. For a non-negative integer n, there exist unique integers j, l with $n = qj + l$, $0 \leq l \leq q-1$. Then the code $\mathcal{C}_\sigma$ is defined by

$$\mathcal{C}_\sigma(n) = \begin{cases} n, & 0 \leq n \leq q-1, \\ \mathcal{C}_\sigma(j) \cdot \sigma^j(l), & n \geq q. \end{cases}$$

If $q = 2$ and $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, then $\mathcal{C}_\sigma$ is the reflected binary code.

Definition 1. *Let n be a non-negative integer. $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$ is defined to be the sum of digits of the word $\mathcal{C}_\sigma(n)$, and, for an integer l with $1 \leq l \leq q-1$, $S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, l)$ is defined to be the number of l's in the word $\mathcal{C}_\sigma(n)$. We denote the vector $(S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, 1), \ldots, S_{\mathcal{C}_\sigma}(n, q-1))$ by $\boldsymbol{S}_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$.*

3. A probability measure involving σ Let $I = I_0(0) = [0, 1]$ and for each positive integer k, let

$$I_k(n) = \Big[\frac{n}{q^k}, \frac{n+1}{q^k}\Big) \ (n = 0, 1, \ldots, q^k - 2), \quad I_k(q^k - 1) = \Big[\frac{q^k - 1}{q^k}, 1\Big].$$

We denote the σ-field $\sigma\{I_k(n); 0 \le n \le q^k - 1\}$ by $\mathcal{F}_k$ and the σ-field $\vee_{k=0}^{\infty}\mathcal{F}_k$ by $\mathcal{F}$. Let $\boldsymbol{d} = (d_0, \ldots, d_{q-2})$ be a vector such that $0 < d_j < 1$ for $0 \le j \le q-2$ and $0 < d_{q-1} = 1 - \sum_{j=0}^{q-2} d_j < 1$. And let $\boldsymbol{r} = (r_0, \ldots, r_{q-2})$ be a vector whose components satisfy the same conditions as those of $\boldsymbol{d}$.

Definition 2. *The probability measure $\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}$ on $(I, \mathcal{F})$ is defined as follows:*
(i) $\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(I_1(n)) = d_n, \quad n = 0, 1, \ldots, q-1,$
(ii) *for $k \ge 2$,* $\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(I_k(n)) = r_{\sigma^j(l)}\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(I_{k-1}(j)), \quad n = 0, 1, \ldots, q^k - 1,$
where j, l are unique integers with $n = qj + l$, $0 \le l \le q-1$.
We denote the distribution function of $\mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}$ by $L_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}$, that is, $L_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}(x) = \mu_{\boldsymbol{d},\boldsymbol{r}}([0, x]), \quad x \in I$.
For simplicity, we use the abbreviation $\mu_{\boldsymbol{r}}$ and $L_{\boldsymbol{r}}$ for $\mu_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}}$ and $L_{\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}}$, respectively.

4. Results

Theorem 1. *Let $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_{q-1})$ be a vector with $\xi_j \in \mathbf{R}$ for $1 \le j \le q-1$, and $\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{S}_{\mathcal{C}_\sigma}(n)\rangle$ denotes the inner product of $\boldsymbol{\xi}$ and $\boldsymbol{S}_{\mathcal{C}_\sigma}(n)$. Let $r_0 = \frac{1}{1+e^{\xi_1}+\cdots+e^{\xi_{q-1}}}$, $r_l = \frac{e^{\xi_l}}{1+e^{\xi_1}+\cdots+e^{\xi_{q-1}}}$ $(1 \le l \le q-1)$.*
Then we have

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{S}_{\mathcal{C}_\sigma}(n)\rangle} = \frac{1}{r_0^{[t]+1}} L_{\boldsymbol{r}}\Big(\frac{1}{q^{1-\{t\}}}\Big), \tag{1}$$

where $t = \log N / \log q$ and its integer and decimal parts are denoted by $[t]$ and $\{t\}$, respectively.

Theorem 2. *$L_{\boldsymbol{r}}(x)$ is an analytic function of $(r_0, \ldots, r_{q-2})$ in $\{(r_0, \ldots, r_{q-2}) \in \mathbf{R}^{q-1}$:*
$0 < r_j < 1$ $(j = 0, \ldots, q-2)$, $0 < \sum_{j=0}^{q-2} r_j < 1\}$.

Theorem 3. *Let $(k_1, \ldots, k_{q-1})$ be a vector with non-negative integer components k_j for $1 \le j \le q-1$. We have*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_1}(n, 1) \cdots S_{\mathcal{C}_\sigma}^{k_{q-1}}(n, q-1) = \sum_{i=0}^{|\boldsymbol{k}|} \Big(\frac{t}{q}\Big)^i H_{\boldsymbol{k},i}(t),$$

where $H_{\boldsymbol{k},i}(t)$ is defined inductively continuous function of t with period 1.

参考文献

[1] J. P. Allouche and J. Shallit, Automatic Sequences: Theory, Applications, Generalizations. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.

[2] Y. Kamiya and L. Murata, Relations among arithmetical functions, automatic sequences, and sum of digits functions. J. Théor. Nombres Bordeaux, 24 (2012), 307–337.

[3] Y. Kamiya and L. Murata, Certain codes related with generalized paperfolding sequences. to appear in J. Théor. Nombres Bordeaux.

[4] T. Okada, T. Sekiguchi and Y. Shiota, Applications of binomial measures to power sums of digital sums. J. Number Theory, 52 (1995), 256–266.

[5] T. Okada, T. Sekiguchi and Y. Shiota, An explicit formula of the exponential sums of digital sums. Japan J. Indust. Appl. Math., 12 (1995), 425–438.

[6] T. Sekiguchi and Y. Shiota, A generalization of Hata-Yamaguti's results of the Takagi function. Japan J. App. Math., 8 (1991), 203–219.

ステュルム・リウヴィルの固有値問題

伊東由文　(徳島大学名誉教授)

本論文においては, ステュルム・リウヴィルの固有値問題の特別な場合として, 定常状態における 1 次元のシュレーディンガー方程式の固有関数系を用いて $L^2(-\infty,\ \infty)$ の関数をフーリエ式級数に展開することに関する一般展開定理について考察することが問題である.

シュレーディンガー作用素が離散固有値をもつ場合の固有関数展開と連続スペクトルをもつ場合の一般化固有関数展開を統一的に研究することが問題である.

本論文は伊東 [1] において得られた結果に対応する論文である.

本論文における考察は, 吉田 [2], [3] の結果の改良である.

本論文においては, 定常状態における 1 次元シュレーディンガー方程式

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}+q(x)\psi=\lambda\psi,\ (-\infty<x<\infty,\ \lambda\in\boldsymbol{C})$$

に対する固有値問題について考察する. ここで, $q(x)$ は $(-\infty,\ \infty)$ において連続な実数値のポテンシャルであるとする. このとき, $\psi\in L^2=L^2(-\infty,\ \infty)$, あるいは $\psi\in L^2_{\mathrm{loc}}=L^2_{\mathrm{loc}}(-\infty,\infty)$ であるとする. ここで考えるシュレーディンガー方程式に対する固有値問題の固有値がすべて実数である.

したがって, 固有関数あるいは一般化固有関数の存在の問題は, シュレーディンガー方程式の解 $y(x,\lambda)$ が L^2 に属するか L^2_{loc} に属するかという問題である. シュレーディンガー方程式

$$-\frac{d^2y}{dx^2}+q(x)y=\lambda y,\ (-\infty<x<\infty)$$

の特異境界点 $x=\infty$ と $x=-\infty$ のそれぞれが極限円の場合と極限点の場合に分類できることがわかっている. これは, 考えているシュレーディンガー方程式の固有関数解が L^2 であるかあるいは L^2_{loc} であるかについての特徴付けを与えるために用いられる.

定理 1　次の (1), (2) が成り立つ:

(1)　特異境界点 $x=\infty$ が極限円の場合であることと, 条件 $\mathrm{Im}(\lambda_0)=v_0\neq 0$ を満たすある λ_0 に対し, 解 $y(x,\lambda_0)$ が $L^2(0,\infty)$ に属することは同値である.

(2)　特異境界点 $x=\infty$ が極限点の場合であることと, 任意の $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対し, $L^2(0,\infty)$ の元ではない $L^2_{\mathrm{loc}}(0,\infty)$ に属する解 $y(x,\lambda)$ を少なくとも一つもつことは同値である.

定理 2　次の (1), (2) が成り立つ:

(1)　特異境界点 $x=-\infty$ が極限円の場合であるための必要十分条件は, $\mathrm{Im}(\lambda_0)=v_0\neq 0$ を満たすある λ_0 に対し, 解 $y(x,\lambda_0)$ が $L^2(-\infty,0)$ に属することである.

(2)　特異境界点 $x=-\infty$ が極限点の場合であるための必要十分条件は, 任意の $\lambda\in\boldsymbol{C}$ に対し, $L^2(-\infty,0)$ の元ではない $L^2_{\mathrm{loc}}(-\infty,0)$ に属する解 $y(x,\lambda)$ を少なくとも一つもつことである.

次に, 固有関数系あるいは一般化固有関数系の完全性関係が証明できる.

定理 3(完全性関係) $f(x), g(x)$ が $L^2(-\infty,\infty)$ の元ならば, 等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} g(x) dx = \lim_{\substack{a' \to -\infty \\ b' \to \infty}} \int_{a'}^{b'} \overline{f(x)} g(x) dx$$

$$= \lim_{\substack{a' \to -\infty \\ b' \to \infty}} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2} \Big(\int_{a'}^{b'} \overline{f(s)} y_j(s,u) ds \Big)$$

$$\cdot d\rho_{j,k}(u) \ \Big(\int_{a'}^{b'} g(x) \overline{y_k(x,u)} dx \ \Big)$$

が成り立つ. ここで, 密度関数 ρ_{jk}, $(j,k=1,2)$ はシュレーディンガー方程式に固有の量によって定められている.

最後に, ワイル・ストーン・ティッチュマルシュ・小平の一般展開定理について考察する.

$(-\infty,\infty)$ においてボレル可測な複素数値関数 $f_1(u)$ と $f_2(u)$ の対 $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)$ で, 条件

$$\|\boldsymbol{f}\| = \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2} \overline{f_j(u)} d\rho_{jk}(u) f_k(u) \ \Big)^{1/2} < \infty$$

を満たすもの全体のつくるヒルベルト空間を $L^2(\rho)$ と表す.

このとき, ワイル・ストーン・ティッチュマルシュ・小平の一般展開定理を得る.

定理 4(ワイル・ストーン・ティッチュマルシュ・小平の一般展開定理) 任意の $f(x) \in L^2(-\infty,\infty)$ に対して, $L^2(\rho)$ の元

$$\boldsymbol{f}^{(a,b)}(u) = (f_1^{(a,b)}(u), f_2^{(a,b)}(u)),$$

$$f_j^{(a,b)}(u) = \int_a^b f(s) \overline{y_j(s,u)} ds$$

をつくると, $L^2(\rho)$ の強収束の意味において,

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to \infty}} \boldsymbol{f}^{(a,b)}(u) = \boldsymbol{f}(u) = (f_1(u), f_2(u))$$

が存在する. この $\boldsymbol{f}(u)$ に対して $L^2(-\infty,\infty)$ の元

$$f_{u_1,u_2}(x) = \int_{u_1}^{u_2} \sum_{j,k=1}^{2} \overline{y_j(x,u)} d\rho_{jk}(u) f_k(u)$$

をつくると, $L^2(-\infty,\infty)$ の強収束の意味において,

$$f(x) = \lim_{\substack{u_1 \to -\infty \\ u_2 \to \infty}} f_{u_1,u_2}(x)$$

が成り立つ.

参考文献

[1] 伊東由文, 自然統計物理学の数学的基礎, プレプリント, 2013.

[2] 吉田耕作, 積分方程式論, 第 2 版, 岩波書店, 1978.

[3] ——, 復刊ヒルベルト空間論, 共立出版, 1953, 初版; 2002, 復刊.

非線形汎関数に対する有界収束定理

河邊　淳 (信州大学工学部)

1.　発表概要

非加法的測度による積算概念である非線形積分に対しては，その具体的な応用と結びついた様々な定式化が提案されている．その中で，Choquet 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分は，理論的な取り扱いが比較的容易で応用範囲も広いこともあり，評価問題，不完全な情報のもとでの意思決定問題，データマイニングなどで利用されている．これら積分概念を実用化し，他分野への応用を目指すには，関数列の極限操作と積分演算の順序交換を可能にする積分収束定理の確立が必須である．本発表では，これら非線形積分が定める積分汎関数が共通してもつ摂動条件を明らかにし，室伏ら [Fuzzy Sets Systems, 92 (1997), 197–203] が定式化した Choque 積分に対する有界収束定理を，一般の摂動的な非線形積分汎関数に拡張する．応用として，Lebesgue 積分，有限加法的測度に対する D-積分や S-積分，さらには，Choquet 積分，Sugeno 積分，Shilkret 積分などの非線形積分に対する有界収束定理を確立する．

2.　汎関数の摂動性

X は空でない集合，$\mathcal{A}$ は X の部分集合からなる集合体とする．関数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ は，各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\{f \geq t\}, \{f > t\} \in \mathcal{A}$ のとき **$\boldsymbol{\mathcal{A}}$-可測**といい，その全体を $\mathcal{F}(X)$ で表す．集合関数 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,\infty)$ は，(i) $\mu(\emptyset) = 0$，(ii) $A \subset B$ ならば $\mu(A) \leq \mu(B)$ を満たすとき**非加法的測度**といい，その全体を $\mathcal{M}(X)$ で表す．μ の共役測度を $\bar{\mu}(A) := \mu(X) - \mu(A^c)$ $(A \in \mathcal{A})$ で定義する．$\bar{\mu}$ も非加法的測度で，μ が加法的ならば $\bar{\mu} = \mu$ となる．

関数 $f \in \mathcal{F}(X)$ は，$\mu(\{f \geq r\}) = 0$ かつ $\mu(\{f \geq -r\}) = \mu(X)$ を満たす定数 $r > 0$ が存在するとき **$\boldsymbol{\mu}$-本質的有界**といい，この r の下限を $\|f\|_\mu$ とかく．$\mathcal{F}_{\mu,b}(X)$ で μ-本質的有界関数全体を表す．関数族の一様 μ-本質的有界性も同様に定義する．

非線形汎関数の摂動条件を定式化するため，測度を用いた関数の支配関係を定義する．

定義 1.　$\mu \in \mathcal{M}(X)$，$f, g \in \mathcal{F}(X)$ とする．$\delta \in [0,\infty)$ とする．各 $t \in \mathbb{R}$ に対して，$\mu(\{f \geq t\}) \leq \mu(\{g \geq t\}) + \delta$ が成り立つとき，f は g により **$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\delta})$-支配される**といい，$f \prec_{\mu,\delta} g$ とかく．特に，$\delta = 0$ のときは **$\boldsymbol{\mu}$-支配される**といい，$f \prec_\mu g$ とかく．

定義 2.　$\mu \in \mathcal{M}(X)$，$\mathcal{F} \subset \mathcal{F}(X)$ で，$0 \in \mathcal{F}$ とする．$\theta\colon [0,\infty]^2 \to [0,\infty]$ は関数とする．$I\colon \mathcal{F} \to [-\infty,\infty]$ は積分汎関数，すなわち，(i) $I(0) = 0$，(ii) $f \leq g$ ならば $I(f) \leq I(g)$ を満たすとする．

(1) 各 $r \in (0,\infty)$ と各 $A \in \mathcal{A}$ に対して，$r1_A \in \mathcal{F}$ ならば $I(r1_A) = \theta(r, \mu(A))$ のとき，I は **$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\theta})$-生成的**，$\theta$ を I の**生成器**という．

(2) $f \prec_\mu g$ ならば $I(f) \leq I(g)$ のとき，I は **$\boldsymbol{\mu}$-強単調**という．

(3) $\varphi(0) = \lim_{t \to +0} \varphi(t) = 0$ を満たす関数 $\varphi\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ 全体を Φ で表す．各 $p, q > 0$ に対して，関数 $\varphi_{p,q}, \psi_{p,q} \in \Phi$ が存在して，次の摂動条件 (P) を満たすとき，

I は **μ-摂動的**という: (P) 任意の $f,g\in\mathcal{F},\delta\geq 0,\varepsilon\geq 0$ に対して，$\|f\|_\mu<p,\|g\|_\mu<p,\mu(X)<q$ で $f\prec_{\mu,\delta} g+\varepsilon$ ならば $I(f)\leq I(g)+\varphi_{p,q}(\delta)+\psi_{p,q}(\varepsilon)$.

定義 3. $\mu\in\mathcal{M}(X)$，$f\in\mathcal{F}(X)$ とする．次の非線形積分は非加法的測度論の応用領域でよく用いられる．ただし，右辺が $\infty-\infty$ となる場合は定義しない．

(1) 非負関数 f の μ に関する **Choque 積分**を，加法と乗法演算を用いて，$\mathrm{Ch}(\mu,f):=\int_0^\infty \mu(\{f\geq t\})dt$ で定義する．一般の $f=f^+-f^-$ に対しては，その**対称 Choquet 積分**を $\mathrm{Ch}^s(\mu,f):=\mathrm{Ch}(\mu,f^+)-\mathrm{Ch}(\mu,f^-)$，**反対称 Choquet 積分**を $\mathrm{Ch}^a(\mu,f):=\mathrm{Ch}(\mu,f^+)-\mathrm{Ch}(\bar{\mu},f^-)$ で定義する．

(2) 非負関数 f の μ に関する **Sugeno 積分**を，Zadeh のファジィ理論で重要な束演算 $\vee:=\sup$ と $\wedge:=\inf$ を用いて，$\mathrm{Su}(\mu,f):=\bigvee_{t\in[0,\infty]}[t\wedge\mu(\{f\geq t\})]$ で定義する．一般の f に対しては，その**対称 Sugeno 積分**を $\mathrm{Su}^s(\mu,f):=\mathrm{Su}(\mu,f^+)-\mathrm{Su}(\mu,f^-)$，**反対称 Sugeno 積分**を $\mathrm{Su}^a(\mu,f):=\mathrm{Su}(\mu,f^+)-\mathrm{Su}(\bar{\mu},f^-)$ で定義する．

(3) 非負関数 f の μ に関する **Shilkret 積分**を，上限 $\vee$ と乗法演算を用いて，$\mathrm{Sh}(\mu,f):=\bigvee_{t\in[0,\infty]}[t\cdot\mu(\{f\geq t\})]$ で定義する．一般の f に対しては，その**対称 Shilkret 積分**を $\mathrm{Sh}^s(\mu,f):=\mathrm{Sh}(\mu,f^+)-\mathrm{Sh}(\mu,f^-)$，**反対称 Shilkret 積分**を $\mathrm{Sh}^a(\mu,f):=\mathrm{Sh}(\mu,f^+)-\mathrm{Sh}(\bar{\mu},f^-)$ で定義する．

関数 $\theta\colon[0,\infty]^2\to[0,\infty]$ は，任意の $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[0,\infty]$ と $b\in[0,\infty]$ に対して，すべての $r\in(0,\infty)$ で $\theta(r,b_n)\to\theta(r,b)$ ならば $b_n\to b$ が成り立つとき，**極限保存的**という．

命題. $\mu\in\mathcal{M}(X)$ とする．

(1) 積分汎関数 $\mathrm{Ch}(\mu,\cdot)$，$\mathrm{Ch}^a(\mu,\cdot)$，$\mathrm{Sh}(\mu,\cdot)$，$\mathrm{Sh}^a(\mu,\cdot)$ は (μ,θ)-生成的，μ-強単調，μ-摂動的で，その生成器 $\theta(a,b):=a\cdot b$ は極限保存的である．

(2) 積分汎関数 $\mathrm{Su}(\mu,\cdot)$ と $\mathrm{Su}^a(\mu,\cdot)$ は (μ,θ)-生成的，μ-強単調，μ-摂動的で，その生成器 $\theta(a,b):=a\wedge b$ は極限保存的である．

注意. 積分汎関数 $\mathrm{Ch}^s(\mu,\cdot)$，$\mathrm{Su}^s(\mu,\cdot)$，$\mathrm{Sh}^s(\mu,\cdot)$ は (μ,θ)-生成的であるが，一般には μ-強単調とはならない．それゆえ，μ-摂動的でない．

3. 非線形積分汎関数に対する有界収束定理

主定理. $\mu\in\mathcal{M}(X)$，$I\colon\mathcal{F}_{\mu,b}(X)\to\mathbb{R}$ は積分汎関数とする．次の 2 つの条件を考える:

(i) μ は自己連続．すなわち，任意の集合 $A\in\mathcal{A}$ と任意の集合列 $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{A}$ に対して，$\mu(B_n)\to 0$ ならば $\mu(A\cup B_n)\to\mu(A)$ かつ $\mu(A\setminus B_n)\to\mu(A)$.

(ii) I に対して有界収束定理が成り立つ．すなわち，任意の一様 μ-本質的有界な関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{F}(X)$ と任意の $f\in\mathcal{F}(X)$ に対して，f_n が f に μ-測度収束すれば，f も μ-本質的有界で，$I(f_n)\to I(f)$.

積分汎関数 I が μ-摂動的ならば，(i) $\Rightarrow$ (ii) が成り立つ．逆に，I が (μ,θ)-生成的で，その生成器 θ が極限保存的ならば，(ii) $\Rightarrow$ (i) が成り立つ．

ある complete minimal system を Riesz basis に対応させる multiplier の非存在について

中村　昭宏
東海大学海洋学部

2 乗可積分空間 $L^2[-\pi,\pi]$ において, 複素指数関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が Riesz basis であるとき, この関数系に適当な非負関数 $w(t)$ を掛けて（この関数を以後, “multiplier” と呼ぶ）, $\{w(t)e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を conditional basis とする例は Babenko[1] によって与えられた．ここでは, 逆に, Riesz basis でない $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ に適当な multiplier を施して, Riesz basis にできるかどうかを考える．ある関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が complete かつ minimal であるとき, Riesz basis にする multiplier が存在しないことを示す.

数列 $\{\lambda_n\}$ を以下のように定義する.

$$\lambda_n = \begin{cases} n+\dfrac{1}{4}, & n>0 \\ 0, & n=0, \\ n-\dfrac{1}{4}, & n<0. \end{cases} \tag{0.1}$$

このとき, 関数系 $\{e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は complete かつ minimal (see, e.g., [4]) であり, Young [7] はこの関数系が basis でないことを示した.

命題 1. $\{\lambda_n\}$ は (0.1) によって与えられた数列とするとき, $\{w(t)e^{i\lambda_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が Riesz basis となるような非負関数 $w(t)$ は存在しない.

定理 1. 数列 $\{\mu_n\}$ を以下のように定義する.

$$\mu_n = \begin{cases} n+\dfrac{1}{4}+\varepsilon_n, & n>0 \\ 0, & n=0, \\ n-\dfrac{1}{4}+\varepsilon_n, & n<0, \end{cases}$$

ここに, $\varepsilon_n \to 0$ as $n\to\pm\infty$. もし, 関数系 $\{e^{i\mu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が complete かつ minimal ならば, $\{w(t)e^{i\mu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が Riesz basis となるような非負関数 $w(t)$ は存在しない.

例. 数列 $\{\mu_n\}$ を以下のように定義する.

$$\mu_n = \begin{cases} 0, & n=0, \\ 1, & n=1, \\ n+\dfrac{1}{4}+\dfrac{\beta}{\log n}, & n \geq 2 \\ -\mu_{-n}, & n<0. \end{cases}$$

このとき, $0<\beta\leq 1/4$ なる β に対して, $\{e^{i\mu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が complete であることは [4] において示され, minimal かつ Riesz basis でないことも [2] で示されたが, $\{w(t)e^{i\mu_n t}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が Riesz basis となるような非負関数 $w(t)$ が存在しないことも定理からわかる.

参考文献

[1] Babenko K.I. , *On conjugate functions*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **62** (1948), 157-160.

[2] Nakamura A. , *Basis properties and complements of complex exponential systems*, Hokkaido Math. J. **36** (2007), 195-208.

[3] Olevskii A.M., *On operators generating conditional bases in a Hilbert space*, Mathematical Notes **12** (1972), 476-482 (translated from Mat. Zametki, **12**, 1972, 73-84).

[4] Redheffer R.M. and Young R.M. , *Completeness and Basis Properties of Complex Exponentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), 93-111.

[5] Singer I. , *Bases in Banach spaces I*, Springer Verlag, Berlin and New York, 1970.

[6] Young R.M. , *On the Stability of Exponential Bases in* $L^2[-\pi,\pi]$, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 117 - 122.

[7] Young R.M. , *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, revised first edition, Academic Press 2001.

[8] Yukhimenko Y.Y. , *Bases of Exponents in Weighted Spaces* $L^p(-\pi,\pi)$, Moscow University Mathematics Bulletin, **65** (2010), No.2, 69 - 71.

James 定数に関する最近の発展

田中亮太朗（新潟大）
斎藤　吉助（新潟大）
佐藤　正博（新潟大）

X を Banach 空間とし, B_X と S_X をそれぞれ X の単位球および単位球面とする．そのとき, X が uniformly non-square であるとは, ある正数 δ が存在して, $\|2^{-1}(x+y)\| > 1-\delta$ を満たす任意の元 $x, y \in B_X$ に対して $\|2^{-1}(x+y)\| \leq 1-\delta$ が成立することをいう．これは, $\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} \leq 2(1-\delta)$ と言い換えることもできる．この定義から明らかなように, uniform non-squareness は Clarkson によって導入された uniform convexity よりも (少なくとも等距離同型による同一視の下では) はるかに多くの空間を扱うことできる．にもかかわらず, そのような空間は種々の良い性質を持つことが知られている．例えば uniformly non-square な Banach 空間は常に回帰的である (cf. [4])．さらに, 2006 年には García-Falset [3] らが Dominguez Benavides [1] の結果を基にして, uniformly non-square な Banach 空間が非拡大写像に関する不動点性を持つことを証明した．このように, uniform non-squareness は, Banach 空間論の諸分野における重要な性質を保証する概念として, いまや欠かせない道具となっている．

Banach 空間の幾何学の一つの方向性として, 幾何学的構造の定量化がある．古くからよく知られているものとしては, Clarkson's modulus of convexity や modulus of smoothness などが挙げられる．これらは, その名の通り空間の convexity 及び smoothness の度合いを表すものと考えられるが, これを non-squareness に対して試みたのが James 定数である．1990 年, Gao-Lau [2] は Banach 空間 X の James 定数 $J(X)$ を次の式により導入した．

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x+y\|, \|x-y\|\} : x, y \in S_X\}.$$

このような量は Banach 空間の幾何学的定数と呼ばれる．一般に, $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$ であることが知られている．また, 上で述べたことから, X が uniformly non-square であることと $J(X) < 2$ とは同値であることが容易にわかる．James 定数は, 他の幾何学的定数 (例えば, von Neumann-Jordan 定数 $C_{NJ}(X)$) との相互評価や normal structure との関連性などの視点から広く研究されてきた．

さて, James 定数の一つの特徴として, 等式 $J(X^*) = J(X)$ が一般には成立しないということが知られている．ここで, X^* は Banach 空間 X の双対空間を表す．これは, von Neumann-Jordan 定数との大きな違いの一つである．Kato-Maligranda-Takahashi [5] で指摘されたように, 反例はごく単純な Day-James 空間で挙げられる．すなわち, ℓ_2-ℓ_1 を次のノルムを備えた $\mathbb{R}^2$ とする．

$$\|(x,y)\|_{2,1} = \begin{cases} \|(x,y)\|_2 & \text{if} \quad xy \geq 0, \\ \|(x,y)\|_1 & \text{if} \quad xy \leq 0. \end{cases}$$

そのとき, $J((\ell_2\text{-}\ell_1)^*) \neq J(\ell_2\text{-}\ell_1)$ である．

本講演では, 等式 $J(X^*) = J(X)$ がいつ成立するのかという問題を 2 次元空間で考える．まず, 上述のノルム $\|\cdot\|_{2,1}$ が symmetric である, すなわち $\|(x,y)\|_{2,1} = \|(y,x)\|_{2,1}$ が成立することに注意しておく．また, このことから, $\mathbb{R}^2$ 上のノルムを新たに $\|(x,y)\|'_{2,1} = \|(x+y, x-y)\|_{2,1}$ によって定義すれば, それは absolute となる．ここで, ノルム $\|\cdot\|$ が absolute とは, $\|(x,y)\| = \|(|x|,|y|)\|$ が成立することという．James 定数は等距離同型の下で保存されるため, 空間 $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|'_{1,2})$ に関しても等式は不成立であることがわかる．では, ノルムが symmetric かつ absolute であればどうか. 少なくとも, そのようなノルムでの反例は挙がっておらず, 逆に, $\|(x,y)\| = (|x|^p + |y|^p)^{1/p}$, $\|(x,y)\|_\beta = \max\{|x|, |y|, \beta(|x|+|y|)\}$ 及び $\|(x,y)\|_{\omega,q} = (\max\{|x|^q, |y|^q\} + \omega \min\{|x|^q, |y|^q\})^{1/q}$ などで定義される symmetric absolute norm に関しては, 等式が成立することが確認されている (cf. [6, 7])．このことから, 我々は, symmetric absolute norm に対しては, 常に等式が成立すると予想した．本講演の目的は, その予想が真であると示すことである．すなわち, 次の定理を証明する．

Theorem ([8])**.** *X を symmetric absolute norm を備えた $\mathbb{R}^2$ とする．そのとき, 等式 $J(X^*) = J(X)$ が成立する．*

さらに, $J(X^*) \neq J(X)$ となる他の 2 次元空間 X の例についても言及する．

参考文献

[1] T. Dominguez Benavides, *A geometrical coefficient implying the fixed point property and stability results*, Houston J. Math., **22** (1996), 835-849.

[2] J. Gao and K.-S. Lau, *On the geometry of spheres in normed linear spaces*, J. Aust. Math. Soc. Ser. A, **48** (1990), 101–112.

[3] J. García-Falset, E. Llorens-Fuster and E. M. Mazcuñnan-Navarro, *Uniformly non-square Banach spaces have the fixed point property for nonexpansive mappings*, J. Funct. Anal., **233** (2006), 494–514.

[4] R. C. James, *Uniformly non-square Banach spaces*, Ann. of Math., **80** (1964), 542–550.

[5] M. Kato, L. Maligranda and Y. Takahashi, *On James and Jordan-von Neumann constants and the normal structure coefficient of Banach spaces*, Studia Math., **144** (2001), 275–295.

[6] N. Komuro, K.-S. Saito and K.-I. Mitani, *On the James constant of extreme absolute norms on $\mathbb{R}^2$ and their dual norms*, Proceeding of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis. I., 255–268, Yokohama Publ., Yokohama, 2013.

[7] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and R. Tanaka, *On James constants of two-dimensional Lorentz sequence spaces and its dual*, submitted.

[8] K.-S. Saito, M. Sato and R. Tanaka, *The duality of James constant in Banach spaces*, submitted.

The Kakeya maximal operator on the variable Lebesgue spaces

Hiroki Saito (Saitama University)*1
Hitoshi Tanaka (The University of Tokyo)*2

1. Introduction and Results

The purpose of this talk is to investigate the boundedness of the Kakeya maximal operator on the variable Lebesgue spaces. Given a measurable function $p(\cdot):\mathbb{R}^n\to[1,\infty)$, we define the variable Lebesgue space $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ to be the set of measurable functions such that for some $\lambda>0$,

$$\rho_{p(\cdot)}(f/\lambda)=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)^{p(x)}dx<\infty.$$

$L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ is a Banach space when equipped with the norm

$$\|f\|_{p(\cdot)}=\|f\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)}=\inf\{\lambda>0:\ \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda)\le 1\}.$$

Definition 1.1 (a) *We say that $p(\cdot)$ is locally log-Hölder continuous if there exists a positive constant c_0 such that*

$$|p(x)-p(y)|\log\left(\frac{1}{|x-y|}\right)\le c_0,\qquad x,y\in\mathbb{R}^n,\ |x-y|<1.$$

(b) *We say that $p(\cdot)$ is log-Hölder continuous at infinity if there exist constants c_∞ and $p(\infty)$ such that*

$$|p(x)-p(\infty)|\log(e+|x|)\le c_\infty,\qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

(c) *Given a measurable set $E\subset\mathbb{R}^n$, let*

$$p_-(E)=\operatorname*{ess\,inf}_{x\in E}p(x)\ \text{and}\ p_+(E)=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in E}p(x).$$

If $E=\mathbb{R}^n$, then we simply write p_- and p_+.

For a locally integrable function f on $\mathbb{R}^2$ the Kakeya maximal operator K_N, $N\gg 1$, is defined by

$$K_Nf(x)=\sup_{x\in R\in\mathcal{B}_N}\fint_R|f(y)|\,dy,$$

where $\mathcal{B}_N$ denotes the set of all rectangles in $\mathbb{R}^2$ with eccentricity N (the ratio of the length of long-sides and short-sides is equal to N).

キーワード：Kakeya maximal operator; variable Lebesgue spaces; N-modified log-Hölder continuous

*1 e-mail: j1107703@gmail.com
*2 e-mail: htanaka@ms.u-tokyo.ac.jp

It is well known that (see [1, 3])

$$\|K_N f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \le C_p(\log N)^{2/p}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^2)} \text{ for } 2 \le p \le \infty. \tag{1}$$

One might naturally expect that

$$\|K_N\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)\to L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)} \le C(\log N)^{2/p_-} \text{ when } 2 \le p_- \le p_+ < \infty.$$

However, we have the following theorem.

Theorem 1 *Let $N \gg 1$ and $1 < p_- < p_+ < \infty$. Suppose that K_N is bounded from $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ to $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ and that $p(\cdot)$ is continuous. Then there exist a positive constant C, independent of N, and a small constant $\varepsilon > 0$ such that*

$$\|K_N\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)\to L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)} \ge CN^{\varepsilon}.$$

Definition 1.2 *Let $N \gg 1$. We say that $p(\cdot)$ is N-modified locally log-Hölder continuous if there exists a positive constant b, and α_N such that*

$$\left|\frac{1}{p(x)} - \frac{1}{p(y)}\right| \log\left(\frac{N}{|x-y|^2}\right) \le b + \alpha_N \log N, \qquad x, y \in \mathbb{R}^2,\ |x-y| < \sqrt{N}.$$

Theorem 2 *Let $N \gg 1$ and $2 \le p_- \le p_+ < \infty$. Suppose that $p(\cdot)$ is N-modified locally log-Hölder continuous and log-Hölder continuous at infinity. Then K_N is bounded from $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ to $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ and*

$$\|K_N\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)\to L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)} \le CN^{p_-\alpha_N}(\log N)^{2/p_-},$$

where the constant C is independent of N.

If $p(\cdot)$ is locally log-Hölder continuous, then $p(\cdot)$ is N-modified locally log-Hölder continuous.

Corollary 3 *Let $N \gg 1$ and $2 \le p_- \le p_+ < \infty$. Suppose that $p(\cdot)$ is locally log-Hölder continuous and log-Hölder continuous at infinity. Then K_N is bounded from $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ to $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)$ and*

$$\|K_N\|_{L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)\to L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^2)} \le CN^{1-\frac{p_-}{p_+}}(\log N)^{2/p_-}.$$

参考文献

[1] A. Córdoba, *The Kakeya maximal function and the spherical summation multiplier*, Amer. J. math., **99** (1977), no. 1, 1–22.

[2] D. Cruz-Uribe, L. Diening and A. Fiorenza, *A new proof of the boundedness of maximal operators on variable Lebesgue spaces*, Boll. Unione Mat. Ital. (9), **2** (2009), no. 1, 151–173.

[3] L. Grafakos, *Modern Fourier Analysis*, volume 250 of *Graduate Texts in Mathematics.* Springer, New York, 2nd edition, 2008.

[4] V. Kokilashvili and A. Meskhi, *Two-weighted norm inequalities for the double Hardy transforms and strong fractional maximal functions in variable exponent Lebesgue space*, Spectral theory, function spaces and inequalities, 105–124, Oper. Theory Adv. Appl., **219** (2012).

An extension operator for Triebel–Lizorkin spaces with variable exponents.

Takahiro Noi
Department of Mathematics and Information Science, Tokyo Metropolitan University
1-1 Minami osawa, hachioji-city, Tokyo.
E-mail : taka.noi.hiro@gmail.com

In this talk, it is concerned with a boundedness of an extension operator for Triebel–Lizorkin spaces with variable exponents on upper half spaces $\mathbb{R}^n_+$.

1 Definition of Triebel–Lizorkin spaces with variable exponents

We first introduce the variable Lebesgue spaces $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$. Let $p(\cdot)$ be a measurable function on $\mathbb{R}^n$ with range in $(0,\infty)$. Let $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ denote the set of measurable functions f on $\mathbb{R}^n$ such that

$$||f||_{L^{p(\cdot)}} := \inf \left\{ \lambda > 0 \quad : \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{\lambda} \right)^{p(x)} \mathrm{d}x \le 1 \right\} < \infty.$$

Then it is well known that $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ becomes a quasi Banach space.

Denote by $\mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ the set of measurable functions $p(\cdot)$ on $\mathbb{R}^n$ with range in $(0,\infty)$ such that

$$0 < p^- = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x), \quad \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n} p(x) = p^+ < \infty.$$

We denote by $C^{\log}(\mathbb{R}^n)$ the set of all real valued functions $p(\cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ satisfying following conditions: There exist constants $C_{\log}(p)$ and $p_\infty \in \mathbb{R}$ such that

$$|p(x) - p(y)| \le \frac{C_{\log}(p)}{\log(e + |x-y|^{-1})} \quad (x, y \in \mathbb{R}^n,\, x \ne y) \tag{1}$$

and

$$|p(x) - p_\infty| \le \frac{C_{\log}(p)}{\log(e + |x|)} \quad (x \in \mathbb{R}^n). \tag{2}$$

The set $\Phi(\mathbb{R}^n)$ is the collection of all systems $\theta = \{\theta_j\}_{j=0}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ such that

$$\begin{cases} \operatorname{supp}\theta_0 \subset \{x \,:\, |x| \le 2\}, \\ \operatorname{supp}\theta_j \subset \{x \,:\, 2^{j-1} \le |x| \le 2^{j+1}\} \text{ for } j = 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

for every multi-index α, there exists a positive number c_α such that

$$2^{j|\alpha|}|D^\alpha\theta_j(x)| \le c_\alpha$$

for $j = 0, 1, \cdots$ and $x \in \mathbb{R}^n$ and

$$\sum_{j=0}^{\infty} \theta_j(x) = 1$$

for $x \in \mathbb{R}^n$.

Let θ be a continuous function on $\mathbb{R}^n$ or the sum of finitely many characteristic functions of cubes in $\mathbb{R}^n$. Then $\theta(D)$ is defined by $\theta(D)f = \mathcal{F}^{-1}[\theta \cdot \mathcal{F}f]$.

Definition 1.1. Triebel–Lizorkin space $F^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ with variable exponents is the collection of $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ such that

$$||f||_{F^{\alpha(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} = \left|\left|\left\{2^{j\alpha(\cdot)}\theta_j(D)f\right\}_{j=0}^{\infty}\right|\right|_{L^{p(\cdot)}(\ell^{q(\cdot)})} < \infty.$$

Here $L^{p(\cdot)}(\ell^{q(\cdot)})$ is the space of all sequences $\{g_j\}_{j=0}^{\infty}$ of measurable functions on $\mathbb{R}^n$ such that quasi-norms

$$||\{g_j\}_{j=0}^{\infty}||_{L^{p(\cdot)}(\ell^{q(\cdot)})} = \left|\left|\left(\sum_{j=0}^{\infty} |g_j(\cdot)|^{q(\cdot)}\right)^{\frac{1}{q(\cdot)}}\right|\right|_{L^{p(\cdot)}} < \infty.$$

We define Triebel–Lizorkn spaces $F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n_+)$ with variable exponents on $\mathbb{R}^n_+ = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$.

Definition 1.2. Let $p(\cdot), q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ and $s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$.

Triebel–Lizorkin spaces with variable exponents on upper half plane $F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n_+)$ is the collection of $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n_+)$ such that there exists a $g \in F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ satisfying $f = g|_{\mathbb{R}_+}$. The space $F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n_+)$ becomes a normed space equipped with the norm

$$||f||_{F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n_+)} := \inf\left\{||g||_{F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}} : g \in F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n),\ f = g|_{\mathbb{R}^n_+}\right\}.$$

2 Main theorem

Theorem 2.1. *Let $N \in \mathbb{N}$, $p(\cdot), q(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n) \cap \mathcal{P}_0(\mathbb{R}^n)$ and $s(\cdot) \in C^{\log}(\mathbb{R}^n)$. Then there exists an operator* Ext_N *which is so called extension operator:*

$$\mathrm{Ext}_N : \bigcup_{\substack{p(\cdot),q(\cdot)\,:\,N^{-1}\le p^-,q^- \\ s(\cdot)\,:\,s^+\le N}} F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow \bigcup_{\substack{p(\cdot),q(\cdot)\,:\,N^{-1}\le p^-,q^- \\ s(\cdot)\,:\,s^+\le N}} F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n), \tag{3}$$

satisfying the following conditions.

(1) $\mathrm{Ext}_N|_{F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n_+)}$ *is continuous.*

(2) *For any* $f \in F^{s(\cdot)}_{p(\cdot),q(\cdot)}(\mathbb{R}^n_+)$, $(\mathrm{Ext}_N f)|_{\mathbb{R}^n_+} = f$.