1　グラフの表示方法

1.1　digraph の定義

頂点の集合 $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ と弧の集合 $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ のペア $G(X, U)$ を digraph という。ここで、弧 u_r はある２つの頂点の順序付けられたペア (X_i, X_j) のことをいう。X_i, X_j をそれぞれ u_r の始点、終点という。以下では簡単のため $i \neq j$ と仮定する。頂点の順を考慮しないとき、ダイグラフとはいわずに無向グラフまたは単にグラフという。ダイグラフを集合のことばで記述したが、計算機で扱うには以下に述べるような記述方法が採用される。

1.2　隣接行列

digraph $G(X, U)$, $X = \{X_1, \dots, X_n\}$, $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ に対して行列 $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ を隣接行列という。ここで

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{弧 } (X_i, X_j) \text{ が存在するとき} \\ 0 & \text{そうでないとき} \end{cases}$$

たとえば、

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1.3　結合行列

digraph G に対して、弧に適当な番号をつけ、行列 $F = (f_{rs})_{\substack{r=1,\dots,n \\ s=1,\dots,m}}$ をつぎのように定義する。

$$f_{rs} = \begin{cases} 1 & X_r \text{ は弧 } u_s \text{ の始点である} \\ -1 & X_r \text{ は弧 } u_s \text{ の終点である} \\ 0 & \text{そのほか} \end{cases}$$

F を G の結合行列という。

たとえば、

$$\begin{array}{c|ccccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \hline \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\\6\end{array} & \multicolumn{9}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{array}$$

1.4　入弧リストと始点リスト

頂点の番号は任意にとり、それに対して弧の番号をうまくつけることで、行列をもちいなくともより効果的に digraph を表現することができる。

まず、X_1 に入ってくる弧を、あれば、1 から順に番号をつける。最後を $v^-(X_1)$ とする。X_2 に入ってくる弧を、あれば、$v^-(X_1)+1$ から順に番号をつける。最後を $v^-(X_1)+v^-(X_2)$ とする。以下同様にし、X_i に入ってくる弧の番号の最小値を $IVL[i]$ と名づける。もし X_i に入ってくる弧がなければ、$IVL[i]=IVL[i+1]$ とする。最後に $IVL[n+1]=m+1$ とおく。すると $IVL[i+1]=IVL[i]+v^-(X_i)$ が成立する。

つぎに、第 j 弧に対して $VL[j]$ をその始点の番号とする。

たとえば、

$$\begin{array}{ccccccc} i & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ IVL[i] & = & 1 & 1 & 3 & 5 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{cccccccc} j & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ VL[j] & = & 4 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

から $G(X,U)$ は

$$X=\{1,2,3,4\}, \quad U=\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5,u_6\}$$

$$u_1=(4,2),u_2=(1,2),u_3=(2,3),u_4=(1,3),u_5=(3,4),u_6=(1,4)$$

となることがわかる。

1.5　出弧リストと終点リスト

digraph $G(X,U)$ の弧の向きを逆にすることで digraph $G^i(X,U^i)$ を得る。U^i は $(X_i,X_j)\in U$ の逆 (X_j,X_i) からなる「逆」弧の集合である。G^i に対して前小節の手法で逆」弧に番号をつけ、それを G の弧の番号とすることにすれば、新たな番号つけの方法

を得る。この方法の方がわたしには扱い安い。対応するリストは $INF[i]$, $NF[j]$, $INF[i+1] = INF[i] + v^+(X_i)$ となる。

たとえば、直前の例は

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} i & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \quad & j & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ INF[i] & = & 1 & 4 & 5 & 6 & 7 & \quad & NF[j] & = & 2 & 3 & 4 & 3 & 4 & 2 \end{array}$$

というリストで表示できる。

$$X = \{1,2,3,4\}, \quad U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

$$u_1 = (1,2), u_2 = (1,3), u_3 = (1,4), u_4 = (2,3), u_5 = (3,4), u_6 = (4,2)$$

1.6 簡単なアルゴリズム

$IVL[i], VL[j]$ から $INF[i], NF[j]$ を求めるアルゴリズムを紹介する。$k = ABB(h)$ は弧の番号を k から h に付け替えたことを示す。

A0 : for $i = 1, 2, \ldots, n$ do $v[i] = 0$;

　　$m := IVL[n+1] - 1$

A1 : for $j = 1, 2, \ldots, m$ do $(i := VL[j]; v[i] := v[i] + 1)$

A2 : $s := 1$;

　　for $i = 1, 2, \ldots, n$ do $(h := v[i]; INF[i] := s; s := s + h)$

A3 : for $j = 1, 2, \ldots, n$ do

　　　for $k = IVL[j], IVL[j]+1, \ldots, IVL[j+1] - 1$ do

　　　$(i := VL[k]; h := INF[i]; NF[h] := j; INF[i] := h + 1; ABB[h] := k)$

A4 : for $j = 1, 2, \ldots, m$ do $(i := VL[j]; INF[i] := INF[i] - 1)$

End

Report digraph $G(X,U)$

$$X = \{1,2,3,4,5\}, \quad U = \{(1,2),(1,3),(1,5),(2,3),(3,2),(3,4),(4,5),(5,2)\}$$

について、IVL, VL, INF, NF をもとめよ。

2 DFS

2.1 道

digraph $G(X,U)$ の弧からなる列 $u_1u_2\ldots u_p$ において、各 i に対して u_i の終点が u_{i+1} の始点に一致するとき、この列を道という。無向弧列の場合、弧に２つの向きを付け加え、向きを考えた弧列が道になるとき、はじめの弧列を無向道という。道 $u_1u_2\ldots u_p$ において u_1 の始点と u_p の終点がいっちするとき、道はサイクルといわれる。無向道にたいしても同様に無向サイクルが定義される。弧列は向きを無視したとき無向道であるとき、無向道という。無向サイクルについても同様である。

無向サイクルを含まず、どの 2 点に対してもそれらを結ぶ無向道が存在するとき（このとき、digraph は弱連結であるという)、このような digraph を木という。木は graph における概念である。

木において、弧数 = 頂点数 -1 が成立する。逆にこれが成り立てば、弱連結な digraph は木である。実際、$G(X,U)$ を木とする。$n=1$ ならどんな digraph でも $m=0$ であるから、等式は正しい。木では唯 1 本の弧の端点になっている頂点が存在する。なぜなら、どの頂点もすくなくとも 2 本の弧の端点になっているなら、無向サイクルが存在するからである。そのような頂点をひとつ選び、それと、それを端点とする弧をもとの木から削除する。このようにしても連結性は破壊されない。よって新しい木 G' を得る。G' に対して、帰納法の仮定により、$m-1=(n-1)-1$ が成立し、$m=n-1$ を得る。逆に $m=n-1$ が成立するとしよう。G が無向サイクルを含むとする。その無向サイクルに属す弧のひとつを削除しても連結性は変わらない。この操作を繰り返せば、G からあらたに木が得られる。この木 G' は頂点を G と共有している。弧は U の元である。G' の頂点数を n'、弧数を m' とすると、$n'=n, m'=m-r$ となる。ここで r は削除した弧の数である。したがって $m'=n'-1$ より、$m-r=n-1$、ゆえに $r=0$ を得る。これは $G=G'$ を示す。

木 G においてある頂点 X_p があり、他の X_i を出発し X_p に達する道によって結ばれているとき、G は根 X_p をもつ根付き木といわれる。

2.2 DFS

digraph $G(X,U)$ の頂点をつぎのように mark しよう。まず、ひとつの頂点 X_p を mark する。この頂点から発する弧とその終点を mark する。これが終われば、すでに mark

した頂点から発する弧と終点を mark する。この操作をおわるまで繰り返す。結果、X_p を根とする根付き木 B が得られる。

X_i が X_p から達することができるとき mark $ANTE[i] \neq 0$ をつける。いま $ANTE[i] \neq 0$ であるとき、$u_k = (X_i, X_j)$ が存在するならば $ANTE[j] := i$ とする。X_p には特に $ANTE[p] := n+1$ とする。X_i が B の z 番目の頂点であることを $NUMMER[z] = i$ によって示す。$NUMMER[1] = p$ である。

つぎのプログラムは細部で問題があるが、 NF, INF で与えられた digraph から $ANTE, NUMMER$ を決めるものである。

A0 : For $i = 1, 2, \ldots, n$ do
$(NUMMER[i] := 0; ANTE[i] := 0; INFH[i] := INF[i]);$
$ANTE[p] := n+1; NUMMER[1] := p; z := 1; i := p$

A1 : $k := INFH[i]; INFH[i] := k+1;$

P2 : if $(k \neq INF[i+1])$ do

A2.1 : $(j := NF[k];$

P2.1.1 : if $(ANTE[j] = 0)$ do
$(ANTE[j] := i; i := j; z := z+1; NUMMER[z] := j);$

P2.1.2 : if $(z \neq n)$ goto A1)

A2.2 : else do $(i := ANTE[i];$

P2.2.1 : if $(i \neq n+1)$ goto A1)

END

Report つぎの digraph にアルゴリズムを適用してみよう。$p = 4$ とする。

k	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$NF[k]$	=	2	3	4	5	6	1	6	2	4
i	=	1	2	3	4	5	6	:	7	
$INF[i]$	=	1	3	4	6	8	9	:	10	

2.3 BFS

mark のつけかたを変える。まず X_p を決め、それに I を mark する。I を発する弧の終点すべてに番号順に II $\cdots$ と mark する。それが終われば、つぎの mark 最小の頂点に移り、その頂点を発する弧の終点がまだ mark されていなければつづいて mark する。以下、同じことを繰り返す。このようにして X_p を根とする根付き木が得られる。この marking はちかくのものをすべて mark する戦術である。

たとえばつぎの graph $G(X,U)$ を見てみよう。

$$X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

$$\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} &
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}$$

ただし、(i,j) 成分が 1 とは i,j を結ぶ無向弧 (graph では辺という) が存在していることを意味し、0 とはそのようなものが存在しないということを意味する。(graph の行列表示。) 辺を両方向の弧とみなして、今回の方法で根付き木をもとめるとつぎのようになる。$p=6$ としている。

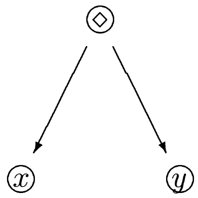
$$\begin{array}{lccccccccccc}
i & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
NUMMER[i] & = & 6 & 1 & 4 & 5 & 7 & 9 & 2 & 3 & 8 \\
ANTE[i] & = & 6 & 1 & 1 & 6 & 6 & 10 & 6 & 1 & 6
\end{array}$$

Report

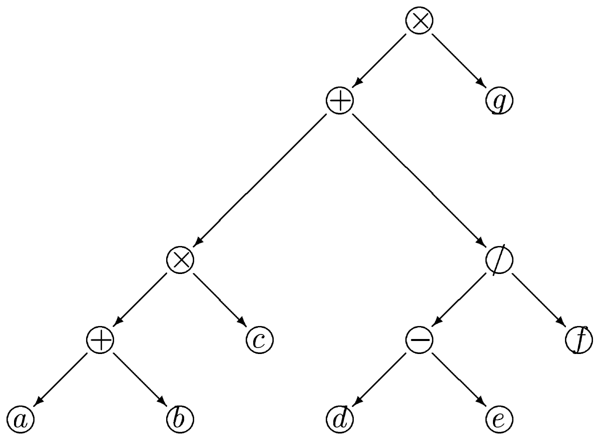
3　根付き木

3.1　2分木

式 $((a+b)c+(d-e)/f)g$ を木で表現する。$+, -, \times, /$ は2項演算である. 一般に $x \diamond y$ を



と表す。今の例では



となる。

3.2　順序

集合 M のなかの関係 ρ がつぎをみたすとき、半順序といわれ、M は半順序集合といわれる。

1) $A\rho A$

2) $A\rho B$ で $B\rho A$ ならば $A=B$

3) $A\rho B$ で $B\rho C$ ならば $A\rho C$

根つき木 W の場合、頂点 A から頂点 B に向かう道が存在するとき、$A \Rightarrow B$ と書く。これによって W の頂点集合は半順序集合になる。

　集合 M のなかの半順序関係 ρ において、M の各2要素 A, B は $A\rho B$ または $B\rho A$ をみたすとき、ρ は全順序、M は全順序集合といわれる。

根つき木 W のおなじ始点をもつ弧の終点全体に半順序関係 $\prec$ が存在するとする。すると、つぎによって定義される関係 $\leq$ は全順序である。

1) $A \Rightarrow B$ ならば $A \leq B$

2) $A \prec B$ ならば $A \leq B$

3) $A \prec B$, $A \Rightarrow A'$, $B \Rightarrow B'$ であり $A = B = B'$ でないならば $A' \leq B'$

根つき木を平面上に描き、$A \prec B$ とは A が B の左にあることとすれば、$\leq$ をイメージしやすい。

条件 1) をつぎの 1') に置き換えれば逆 Tarry 順序を得る。2 分木の場合、これを逆ポーランド記法という。ただの日本語による表現である。

たとえば

$$ab + c \times de - f/ + g\times$$

は普通の記法では

$$((a+b)c + (d-e)/f)g$$

となる。日本語では「a と b を加え、c を掛け、 d から e を引き f で割り、 g を掛ける」ということである。

つぎの $ANTE$ リスト（ただし根の $ANTE$ は $n+1$ とする）

$$\begin{array}{lcccccccccccccc} i & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ ANTE[i] & = & 6 & 12 & 4 & 9 & 1 & 7 & 14 & 9 & 12 & 4 & 1 & 7 & 6 \end{array}$$

は根つき木

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc} i & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & : & 14 \\ INF[i] & = & 1 & 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 7 & 9 & 9 & 11 & 11 & 11 & 13 & : & 13 \\ k & = & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & & & \\ NF[k] & = & 5 & 11 & 3 & 10 & 1 & 13 & 6 & 11 & 4 & 8 & 2 & 9 & & & \end{array}$$

を示す。これは、頂点 1 から頂点 5, 11 への弧がある、2 からなし、3 からなし、4 から 3,10 への弧がある、5 からなし、$\cdots$ というふうに出弧を特定し、適当に番号づけをすることによって得られる。

Report つぎの数式から根付き木をもとめ、$ANTE$ リスト、 INF, NF を作成しよう。また、逆ポーランド記法で表現しよう。

$$(a(x+yu) - bx)(y+u)$$

4 連結性

4.1 弱連結性

digraph G のどの 2 頂点も無向道でつながっているとき、G は弱連結という。これは無向グラフの概念である。digraph G の頂点の部分集合を頂点とし、弧が G の弧であるような digraph を G の部分 digraph といおう。G の部分 digraph で弱連結なもののうち（頂点数も弧数も）極大のものを G の連結成分という。G はいくつかの成分に完全に分割される。連結成分を $1, 2, \ldots, r$ というふうに番号付け、頂点がどの成分に属しているかを明確にするアルゴリズムを紹介しよう。

つぎのような digraph を考える。

$$
\begin{array}{llllllllll}
i & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & : & 8 \\
INF[i] & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 5 & 6 & : & 8 \\
k & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
NF[k] & = 5 & 7 & 2 & 6 & 4 & 3 & 4
\end{array}
$$

まず 1 につながっている頂点全体を $KOMPO[1] = 1$ と命名する。1 から弧 1 が出て、その終点は 5 であるから $KOMPO[5] = KOMPO[1]$ となる。5 から出る弧はない。2 から弧 2 が出て、その終点は 7 であるから $KOMPO[7] = KOMPO[2]$, 7 から出る弧 6, 7 の終点は 3, 4 であるから $KOMPO[3] = KOMPO[4] = KOMPO[7]$, 3 から出る弧 3 の終点は 2 であるから $KOMPO[2] = KOMPO[3]$ となる。4 から出る弧 4 の終点は 6。6 から 4 に向かう弧がある。

$$
1 \to 5, \quad 2 \to 7 \to \begin{array}{c} 3 \\ 4 \to 6 \end{array}
$$

そこで $KOMPO[2] = 2$ とすると

$$
\begin{array}{llllllll}
i & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
KOMPO[i] & = 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 2 & 2
\end{array}
$$

したがって、与えられた G は２つの連結成分をもつ。頂点集合としては

$$
\{1, 5\}, \quad \{2, 3, 4, 6, 7\}
$$

4.2 強連結性

digraph G のどの 2 頂点も一方から他方に向かう道が存在するとき、G は強連結であるという。G の部分 digraph で強連結なもののうち極大なものを強連結成分という。強連

結 digraph では各頂点を通るサイクルがかならず存在する。そしてサイクルの間に往復がある。

つぎのような digraph を考える。

$$
\begin{array}{llllllllllll}
i & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & : & 8 & & \\
INF[i] & = 1 & 3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 10 & : & 11 & & \\
k & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
NF[k] & = 5 & 6 & 1 & 4 & 7 & 3 & 2 & 7 & 4 & 4
\end{array}
$$

$$
1 \to 5 \to 2 \to 1, \quad 3 \to 7 \to 4 \to 3, \quad 6 \to \begin{array}{c} 4 \to 3 \\ 7 \to 4 \end{array} \cdots \not\to 6
$$

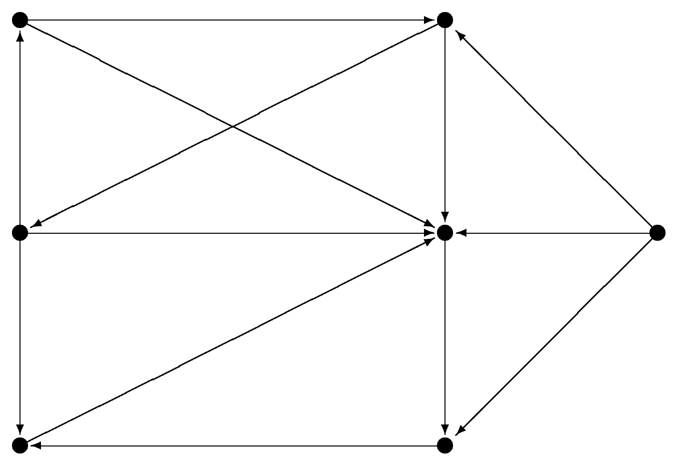
これより G の強連結成分は 3 こ

$$
\{1,5,2\}, \quad \{3,7,4\}, \quad \{6\}
$$

あることがわかる。

Report つぎの digraph の強連結成分をもとめよ。頂点集合だけ示せばよい。

$$
\begin{array}{llllllllllllll}
i & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & : & 8 & & & & \\
INF[i] & = 1 & 3 & 5 & 8 & 9 & 12 & 13 & : & 14 & & & & \\
k & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\
NF[k] & = 2 & 4 & 3 & 4 & 1 & 4 & 6 & 7 & 2 & 4 & 7 & 4 & 6
\end{array}
$$



5　最短経路

5.1　Dijkstra のアルゴリズム

digraph G の道の集合から非負の実数への写像 ℓ で、もし、道 u と v をつなげれば道 w を得るとき

$$\ell(w) \leq \ell(u) + \ell(v)$$

が成立するとき、$\ell(u)$ を道 u の長さという。

digraph G の弧集合 U の各弧に非負の実数 $\ell(u)$ $(u \in U)$ が与えられているとする。2 頂点の組が弧でなければ、ℓ の値を ∞ とする。頂点 X_p を固定する。X_p から X_i に達する道 u が存在するとき、$\ell(u)$ によって u を構成する弧に対する ℓ の値の和とし、すべての u を考慮して最小の $\ell(u)$ の値を $t(i)$ と表そう。このような道が存在しないとき、$t(i) = \infty$ と約束する。すると、$t(i)$ は頂点 X_p から頂点 X_i への最短の道のりと考えることができる。

$t(i)$ を求めるアルゴリズムを紹介する。

まず、$i \neq p$ に対して $t(i) = \ell(X_p, X_i)$, $t(p) = 0$ とおく。X_p をマークする。$t(i)$ の最小値を与える頂点を X_h とし、それをマークする。$t(i)$ と $t(h) + \ell(X_p, X_h)$ の最小値を新たな $t(i)$ とする。以下同様。頂点がすべてマークされれば操作は終わる。

たとえば、つぎのような digraph を考えよう。

i	=	1	2	3	4	5	6	:	7		
$INF(i)$	=	1	5	7	9	9	10	:	10		
k	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
$NF(k)$	=	2	4	3	6	4	5	4	5	4	
ℓ	=	4	12	3	7	9	3	8	5	3	

最短距離を段階的に求める。

i	=	1	2	3	4	5	6	mark
$t(i)$	=	0	4	$\boxed{3}$	12	∞	7	3
$t(i)$	=	0	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	11	8	7	3,2
$t(i)$	=	0	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	11	$\boxed{7}$	7	3,2,5
$t(i)$	=	0	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	10	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$	3,2,5,6
$t(i)$	=	0	$\boxed{4}$	$\boxed{3}$	$\boxed{10}$	$\boxed{7}$	$\boxed{7}$	3,2,5,6,4

digraph G の弧に対して実数が付加されているとき、もし、G のサイクルで負の長さのもの（定義は同様）が存在しなければ、うえのアルゴリズムが適用できる。

つぎの例を考えよう。

i	=	1	2	3	4	5	:	6	
$INF(i)$	=	1	2	4	6	7	:	9	
k	=	1	2	3	4	5	6	7	8
$NF(k)$	=	3	4	1	4	5	1	2	1
ℓ	=	-6	-4	-3	2	-3	2	1	4

既述のアルゴリズムによればつぎのようになる。

i	=	1	2	3	4	5	mark
$t(i)$	=	0	∞	$\boxed{-6}$	∞	∞	3
$t(i)$	=	0	∞	$\boxed{-6}$	-4	$\boxed{-9}$	3,5
$t(i)$	=	-5	$\boxed{-8}$	$\boxed{-6}$	-4	$\boxed{-9}$	3,5,2
$t(i)$	=	-11	$\boxed{-8}$	$\boxed{-6}$	-12	$\boxed{-9}$	3,5,2

サイクル $1 \to 3 \to 5 \to 1$ の長さが -5 になっている。ほかにもあるが、この長さによって 1 における長さが負の値になってしまう。長さ負のサイクルがあれば、操作を繰り返せば、いくらでも長さが $-\infty$ にいく。

上例を変形して負の長さのサイクルがない例をみてみよう。

i	=	1	2	3	4	5	:	6	
$INF(i)$	=	1	2	4	6	7	:	9	
k	=	1	2	3	4	5	6	7	8
$NF(k)$	=	3	4	1	4	5	1	2	1
ℓ	=	-6	-4	-3	4	-3	3	12	9

サイクルは $1 \to 3 \to 5 \to 1$, $1 \to 3 \to 4 \to 1$, $1 \to 3 \to 5 \to 2 \to 4 \to 1$ である。

i	=	1	2	3	4	5	mark
$t(i)$	=	0	∞	$\boxed{-6}$	∞	∞	3
$t(i)$	=	0	∞	$\boxed{-6}$	-2	$\boxed{-9}$	3,5
$t(i)$	=	0	3	$\boxed{-6}$	$\boxed{-2}$	$\boxed{-9}$	3,5,4
$t(i)$	=	0	$\boxed{3}$	$\boxed{-6}$	$\boxed{-2}$	$\boxed{-9}$	3,5,4,2
$t(i)$	=	0	$\boxed{3}$	$\boxed{-6}$	$\boxed{-2}$	$\boxed{-9}$	3,5,4,2

Report　つぎの digraph の最短距離を求よう。

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
i & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & : & 6 & & & \\
INF(i) & = 1 & 2 & 5 & 7 & 9 & : & 10 & & & \\
k & = 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\
NF(k) & = 2 & 5 & 3 & 4 & 1 & 4 & 1 & 5 & 1 \\
\ell & = 4 & 12 & 3 & 6 & 7 & 2 & 4 & 5 & 6
\end{array}
$$

5.2　弧長行列

digraph G の弧に長さが考えられるとき、その情報を行列で表現したものを弧長行列ということにする。

$$B = (b_{ij})_{i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,n}$$

ここで

$$b_{ij} = \begin{cases} 0 & i = j \\ \infty & i \neq j \text{ で } (X_i, X_j) \text{ が弧でない} \\ \ell_{ij} & (X_i, X_j) \text{ が弧であり、} \ell_{ij} \text{ がその長さ} \end{cases}$$

行列の積をつぎのように定義しよう。

$C = A \wedge B$

$A = (a_{ij})_{i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n}, B = (b_{ij})_{i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,p}, C = (c_{ij})_{i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,p}$

$c_{ij} = \min_{1 \leq r \leq n} \{a_{ir} + b_{rj}\}$

ベキは帰納的に $A^{\wedge 1} = A, A^{\wedge k+1} = A \wedge A^{\wedge k}$ によって定義しよう。

前小節のレポートの digraph の弧長行列は

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & 6 & 12 \\ 7 & \infty & 0 & 2 & \infty \\ 4 & \infty & \infty & 0 & 5 \\ 6 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

となる。そのベキは

$$B^{\wedge 2} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 10 & 16 \\ 10 & 0 & 3 & 5 & 11 \\ 6 & 11 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & \infty & 0 & 5 \\ 6 & 10 & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{\wedge 3} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 9 & 15 \\ 9 & 0 & 3 & 5 & 10 \\ 6 & 10 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 11 & 0 & 5 \\ 6 & 10 & 13 & 16 & 0 \end{pmatrix}$$

そのさきは、結局

$$B^{\wedge 4} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 7 & 9 & 14 \\ 9 & 0 & 3 & 5 & 10 \\ 6 & 10 & 0 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 11 & 0 & 5 \\ 6 & 10 & 13 & 15 & 0 \end{pmatrix} = B^{\wedge 5} = B^{\wedge 6} = \ldots$$

Mathematica での計算：

```
wedge[A_,B_]:=
  Module[{m=Dimensions[A][[1]],n=Dimensions[A][[2]],p=Dimensions[B][[2]]},
Table[Min[Table[A[[i,r]]+B[[r,j]],{r,n}]] , {i,m},{j,p}]
]
B ={{0, 4, Infinity, Infinity, Infinity}, {Infinity,0, 3, 6, 12}, {7,
      Infinity, 0, 2, Infinity},{4, Infinity, Infinity, 0, 5},{6, Infinity,
      Infinity, Infinity, 0}};
B2=wedge[B,B]
{{0, 4, 7, 10, 16}, {10, 0, 3, 5, 11}, {6, 11, 0, 2, 7},
  {4, 8, Infinity, 0, 5}, {6, 10, Infinity, Infinity, 0}}
B4=wedge[B3,B]
{{0, 4, 7, 9, 14}, {9, 0, 3, 5, 10}, {6, 10, 0, 2, 7},
  {4, 8, 11, 0, 5}, {6, 10, 13, 15, 0}}
B5=wedge[B4,B]
{{0, 4, 7, 9, 14}, {9, 0, 3, 5, 10}, {6, 10, 0, 2, 7},
  {4, 8, 11, 0, 5}, {6, 10, 13, 15, 0}}
```

5.3 半径と中心

長さつきの連結 graph G が弧長行列 B によって与えられているとしよう。たとえば

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & \infty & 8 & 9 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 5 & 0 & 7 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 8 & \infty & 7 & 0 & 3 & \infty & \infty & \infty & 7 \\ 9 & \infty & \infty & 3 & 0 & 6 & \infty & 16 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 6 & 0 & 8 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 & 0 & 15 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 16 & \infty & 15 & 0 & 8 \\ \infty & \infty & \infty & 7 & \infty & \infty & \infty & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

一般に B は対称行列である。連結性から $n-1$ 次以降のベキは同じである。以降 $D(G) = B^{\wedge n-1}$ とおく。上の例では $D(G) = B^{\wedge 4}$ となる。

$$D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 & 8 & 9 & 15 & 23 & 23 & 15 \\ 2 & 0 & 5 & 10 & 11 & 17 & 25 & 25 & 17 \\ 7 & 5 & 0 & 7 & 10 & 16 & 24 & 22 & 14 \\ 8 & 10 & 7 & 0 & 3 & 9 & 17 & 15 & 7 \\ 9 & 11 & 10 & 3 & 0 & 6 & 14 & 16 & 10 \\ 15 & 17 & 16 & 9 & 6 & 0 & 8 & 22 & 16 \\ 23 & 25 & 24 & 17 & 14 & 8 & 0 & 15 & 23 \\ 23 & 25 & 22 & 15 & 16 & 22 & 15 & 0 & 8 \\ 15 & 17 & 14 & 7 & 10 & 16 & 23 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$D(G)$ の第 (i,j) 成分 d_{ij} は頂点 X_i から頂点 X_j へ達する道の最小の長さを示す。これを X_i から X_j への距離といおう。

$$d_{\max}(X_i) = \max_{1 \le j \le n} d_{ij}$$

とする。G の半径を

$$r(G) = \min_{1 \le i \le n} d_{\max}(X_i)$$

によって定義する。

上例において $r(G)$ を実現する頂点の組をもとめよう。まず $d_{\max}(X_i)$ を実現する頂点の組は

$$(1,5),\ (2,5),\ (3,2),\ (4,3),\ (5,4)$$

このうちで $r(G)=10$ を実現するものは $(2,5),\ (3,2)$ である。

Report　5.2 小節 の B をもつ digraph にたいして $r(G)$ およびそれを実現する頂点の組をもとめよう。

5.4　最長道

各弧に数値が付加されているとき、ある任意の頂点から他の任意の頂点に至る最長の道が存在するためには、どのサイクルの長さも非正であることが必要十分である。全体の長さの符号をかえれば、この問題は最短道のはなしになるから、この命題は当然である。最長の道のもとめかたも、最短の道の求め方に同じである。ただし、$-\infty$ は ∞ とみなす。

たとえば、つぎの長さつきの digraph を扱う。

$$B=\begin{pmatrix}
0 & 13 & 14 & 17 & \infty & 19 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & 0 & \infty & \infty & 21 & \infty & 40 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & \infty & 30 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & 0 & 16 & 22 & \infty & \infty & \infty & 19 & 24 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 20 & 1 & 4 & \infty & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 10 & 13 & \infty & \infty & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 12 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 31 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 14 & 27 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & 44 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 17 & \infty \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 27 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 15 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{pmatrix}$$

$-B$ の $-\infty$ を ∞ に置き換えたものを B' とする。これについて wedgepower を計算し、もとにもどすと、

$$
\begin{pmatrix}
0 & 13 & 14 & 17 & 34 & 39 & 53 & 54 & 35 & 49 & 52 & 60 & 69 & 93 \\
\infty & 0 & \infty & \infty & 21 & \infty & 40 & 41 & 22 & 25 & \infty & 47 & 52 & 74 \\
\infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 23 & \infty & \infty & 30 & \infty & 32 & 35 & 74 \\
\infty & \infty & \infty & 0 & 16 & 22 & \infty & 36 & 17 & 32 & 35 & 42 & 52 & 76 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 20 & 1 & 4 & \infty & 26 & 28 & 53 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 10 & 13 & 12 & 30 & 54 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 12 & 32 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & \infty & 6 & \infty & 33 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & \infty & 14 & 27 & 42 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 2 & \infty & 44 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 17 & 32 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & \infty & 27 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 15 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 0
\end{pmatrix}
$$

6　全域木

連結無向グラフ $G(X,U)$ の部分グラフで、頂点集合が X に一致する木を G の全域木という。骨のようなものである。全域木はいつも存在する。実際、G の部分グラフで木であるもののうちで極大のものを B とする。G の頂点 X_i で B の頂点にならないものがあれば、X_i と B の頂点を結ぶ道で、途中 B の頂点を通らないものがある。B にその道を付け加えれば、B より大きな木が得られる。これは B の極大性に反する。よって、G の頂点はすべて B の頂点である。

G の各弧に負でない長さ $\ell(u)$ が与えられている場合、全域木で全長（すべての弧の長さを加えたもの）が最小のものを経済的全域木という。経済的全域木をみつけるアルゴリズムを紹介する。

1) まず最短の弧を選ぶ。以前の弧とあわせてもサイクルができないという条件で、つぎの最短の弧をえらぶ。同様にして弧が $n-1$ 本得られれば、操作は終わる。

2) 連結性が損なわれないようなら、全体から最長の弧をはずす。このグラフに対して以下同様におこなう。もし、ある段階で連結性がくずれるなら、その前の段階で得られたグラフがもとめる木である。

3) G の頂点 X_1 を端点とする最短の弧を (X_1, X_2) とする。$\{X_1, X_2\}$ と $X \setminus \{X_1, X_2\}$ を結ぶ弧で最短のものを $(X_{2'}, X_3)$ とする。$\{X_1, X_2, \ldots, X_j\}$ と $X \setminus \{X_1, X_2, \ldots, X_j\}$ を結ぶ弧で最小ものを $(X_{j'}, X_{j+1})$ とする。こうして得られる $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が求める木の頂点を与える。途中で選んだ弧が木の弧である。

アルゴリズム 1) によって経済的全域木がえられることを示そう。経済的全域木が存在することは当然。アルゴリズム 1) によって得られた全域木を B_1 とし、B によって B_1 ともっとも多く共通の弧をもつ経済的全域木としよう。B_1, B の弧がことなるものとして矛盾をだす。アルゴリズム 1) で採用される B のものでない最初の弧を (X_1, X_2) としよう。B は X_1, X_2 を結ぶ道 P を含む。P には B_1 に属さない弧 (X_3, X_4) が含まれる。もし、そのような弧がひとつもなければ、B_1 はサイクルをもつことになるからである。$\ell(X_1, X_2) > \ell(X_3, X_4)$ としよう。(X_3, X_4) が選ばれていない理由は、これを添加すれば長さが $\ell(X_3, X_4)$ 以下の弧からなるサイクル K がうまれるからである。K の弧で B の弧ではないものがある。それは (X_1, X_2) が最初に選ばれたことに反する。よって、$\ell(X_1, X_2) \leq \ell(X_3, X_4)$ が成立する。B から弧 (X_3, X_4) を除去し (X_1, X_2) を添加すれば、

あらたな全域木 B' を得る。実際、B' にサイクルがあるとすると、それは (X_1, X_2) と P をつなげたものとなる。しかし、B' には弧 (X_3, X_4) は含まれていない。さて、B' は経済的であり、B_1 と共通の弧を B より１つ多くもつ。これは B のとりかたに反する。よって、$B = B'$ を得る。

問題　上の議論に倣って、アルゴリズム 2) によって経済的全域木がえられることを証明せよ。

解　アルゴリズム 2) によって得られた全域木を B_2、B によって B_2 ともっとも多く共通の弧をもつ経済的全域木としよう。B_2, B の弧がことなるものとして矛盾をだす。B_2 の弧で B の弧でないもののなかで長さ最大のものを (X_1, X_2) とする。B は X_1, X_2 を結ぶ道 P を含む。X_1, X_2 が除去されない理由はそれを除去すれば非連結になるからである。よって道 P の中で B_2 の弧でなく、長さが X_1, X_2 のそれより以上のもの (X_3, X_4) がある。以下同様。

4) もし同じ長さの弧が存在しないならば、経済的全域木はつぎの方法によって一義的に確定する。各頂点を通る弧で最短のものを選ぶ。これらによってできる部分グラフを W とする。W はサイクルをもたない。もしサイクル

$$X_1 \xleftrightarrow{u_1} X_2 \xleftrightarrow{u_2} \cdots \xleftrightarrow{u_{j-1}} X_j \xleftrightarrow{u_j} X_1$$

があるとすると、$\ell(u_1) < \ell(u_2)$ の場合、$\ell(u_2) < \cdots < \ell(u_j) < \ell(u_1)$ となって矛盾する。$\ell(u_1) > \ell(u_2)$ の場合も同様である。W は一般に連結ではない（木がちらばっているので森といわれる）。木をつなぐ弧のなかで最短のものを採用することで全域木 B_4 が得られる。

　B を経済的全域木とし、$B \neq B_4$ であると仮定する。B_4 の部分木 B' の弧 (X_1, X_2) で B のものでないものがある。X_1, X_2 を結ぶ B' の道で、弧の端点 X_3 が B' の頂点で、他の端点 X_4 がそうでないものがある。このとき $\ell(X_1, X_2) < \ell(X_3, X_4)$ が成立する。X_2, X_3 は B' のなかでつながっているからである。そこで、B から弧 (X_3, X_4) を除去し、(X_1, X_2) を添加すれば B より短い全域木が得られる。これは B が経済的であることに反する。以上で $B = B_4$ が示された。

　アルゴリズム 4) は扱いやすいので、一般の問題をこの場合に帰着する方法が採用され

る。たとえば、無向グラフ $G(X,U)$, $X=\{1,2,3,4,5,6\}$,

U	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)	(2,3)	(2,4)	(3,4)	(3,6)	(4,5)	(5,6)
ℓ	3	3	1	4	1	3	5	4	4	2	2
ℓ'	3	2.9	1	4	1.1	3.1	5	4.1	3.9	2	2.1

の経済的全域木はつぎによって得られる。

U	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,6)	(4,5)
ℓ'	3	2.9	1	1.1	2
ℓ	3	3	1	1	2

7 Steiner 問題

平面上に n 点 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が与えられている。これらを線でうまくつなぎ合わせるに当たって、必要な線の総長（網長といおう）を最小にするにはどうすればよいか？この問題を Steiner の問題という。求めるつなぎ合わせであらたな点が発生していることがある。このような点を Steiner 点という。したがって Steiner 問題の解はグラフで表現できる。このグラフを Steiner tree ということにする。

$n=3$ の場合、3 点を A, B, C としよう。三角形 ABC において、もし、頂角で 120° 以上のものがあれば、その頂点と他の頂点との辺が求める木を構成する。どの頂角も 120° より小さければ、三角形の内点 P と頂点を結ぶ木で、$\angle APB = \angle BPC = 120^\circ$ となるものがもとめるものである。点 D を BC に関して A と反対側にとり、BC を一辺とする正三角形 BCD をつくる。点 P は B, C, D の外接円と直線 AD との交点である。これを示すために Ptolemaios の定理が有用である。

Ptolemaios の定理　四角形 $ABCD$ が円 O に内接しているとき、
$AB \cdot CD + BC \cdot DA = AC \cdot BD$ が成立する。

証明　点 E を線分 $\angle ABD = \angle EBC$ となるようにとる。$\triangle ABD$ と $\triangle EBC$ は相似であるから、

$$\frac{AD}{BD} = \frac{EC}{BC} \quad \text{よって} \quad AD \cdot BC = EC \cdot BD$$

また $\triangle CBD$ と $\triangle EBA$ は相似であるから、

$$\frac{CD}{BD} = \frac{EA}{BA} \quad \text{よって} \quad CD \cdot BA = EA \cdot BD$$

2式を加えれば、求める式を得る。

$n=4$ の場合、2点の Steiner 点が現れるときがある。

Steiner tree ではつぎが成り立つ。

1) 2点間をつなぐ線は直線である。

2) サイクルが存在しない。

3) Steiner 点はたかだか $n-2$ こしかない。

4) 交わる2線は $120°$ 以上の角度をなす。

5) Steiner 点では3線が交わっている。

6) Steiner 点で交わっている3線のどの2線も $120°$ の角度をなす。

Steiner tree が実際に存在することを示そう。3) によって、与えられた点を含む最小の凸形のなかに高々 $n-2$ この点を自由に動かし、これらの点とすでに与えられている点とで構成される木全体を考える。木の枝（弧）は直線分である。各木に対してその全長が決まる。木の形態を決めれば、動点に関して木の全長は連続な関数となる。したがってその最小値が存在する。形態は有限このとり方しかないので、全体として最小値が存在することになる。有界閉集合上の連続関数が最小値をとるという微積分の定理がここで使われていることに注意。

[algorithm]

1. Order the fixed points by the distance from their mean, the first being closest to it. (This ordering step greatly reduces the dependency of the final tree on the initial ordering of the points, although there can still be ties.)

2. Insert a Steiner point between the first three fixed points, connect it to each, and locally optimize to obtain the Steiner tree for those three points. Call it the current tree.

3. for k = 4, . . . , n do

a. Save the current tree as old tree and set best tree to an artificial tree with length ∞.

b. for each edge (a; b) of the current tree do

i. Place a Steiner point s on the edge (a; b).

ii. Remove the edge (a; b).

iii. Add the edges (tk; s), (a; s), (b; s).

iv. Run the local optimization routine.

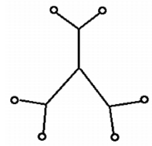
v. If the resulting tree is shorter than best tree, then set best tree to this new tree.

vi. Set the current tree to old tree.

c. Set the current tree to best tree.

4. Set the final tree to the current tree.

Report　平面上に 6 点が与えられた場合を考察しよう。最小の木でなくともよいとする。すなわち最小の木になる可能性のあるのものを列挙しよう。



8　輸送回路網

つぎの条件をみたす連結有向グラフ $G(X,U)$ を輸送回路網という。

1) 入る弧が存在しない頂点 $s \in X$ が唯一存在する。これを入り口という。

2) 出る弧が存在しない頂点 $s \in X$ が唯一存在する。これを出口という。

3) 弧 $(X_i, X_j) \in U$ に容量とよばれる値 $c(X_i, X_j) \geq 0$ が付随されている。弧 $(X_i, X_j) \notin U$ に対しては $c(X_i, X_j) = 0$ とする。

輸送回路網における流れ f とは $X \times X$ から非負実数への関数で

$$f(x,y) \leq c(x,y) \quad (x,y \in X)$$

および、$x \in X \setminus \{s,t\}$ に対して

$$\sum_{y \in X} f(x,y) = \sum_{y \in X} f(y,x)$$

をみたすものである。

　つぎが成立する。

$$v(f) = \sum_{x \in X} f(s,x) = \sum_{x \in X} f(x,t)$$

この値を流れ f の値という。 輸送回路網で問題とされるは、流れの値全体のなかから最大値を求めることである。

8.1　カット

輸送回路網 G の入り口 s を含み、出口 t を含まない弧の部分集合をカットといおう。カット S に対して $c(S) = \sum_{x \in S, y \notin S} c(x,y)$ を容量という。

$$\sum_{x \in S, y \notin S} (f(x,y) - f(y,x)) = v(f)$$

が成立する。なぜなら、

$$\text{左辺} \ = \ \text{左辺} \ + \sum_{x \in S, y \in S} (f(x,y) - f(y,x)) = \sum_{x \in S, y \in X} (f(x,y) - f(y,x)) = v(f)$$

に等しい。左辺が S に依存していないことに注意。

任意の f と任意の S に対して $v(f) \le c(S)$ が成立する。なぜなら

$$v(f) = \sum_{x \in S, y \notin S} (f(x,y) - f(y,x)) \le \sum_{x \in S, y \notin S} f(x,y) \le \sum_{x \in S, y \notin S} c(x,y) = c(S)$$

右辺の最小値が存在する。左辺の最大値も存在する。実際 f は n^2 次元ユークリッド空間の有界閉集合の点とみなすことができ、$v(f)$ は f に関して連続であるからである。（ワイエルシュトラスの定理を使う。）

つぎは最大流 - 最小カット定理とよばれている。

定理　$\max_f v(f) = \min_S c(S)$

証明　f を G の最大流とし、つぎのように有向グラフ $G'(X', U')$ をつくる。

$$X' = X, \quad U' = \{(x,y) \mid 「f(x,y) < c(x,y)」\text{または}「f(y,x) > 0」\}$$

さらに

$$S = \{x \in X \mid x \text{は} s \text{に} G' \text{の中でつながっている}\}$$

とする。S が G のカットであることを示そう。もし、そうでなければ $t \in S$ である。これは、s, t が G' のなかの道 $s = x_0, x_1, \ldots, x_a = t$ でつながっていることを示す。

$$\epsilon_i = \max\{c(x_i, x_{i+1}) - f(x_i, x_{i+1}), f(x_{i+1}, x_i)\}$$

とおくと $\epsilon_i > 0$ となる。$\epsilon = \min_i \epsilon_i$ とし、流れ g をつぎのように定義する。

$$\epsilon_i > f(x_{i+1}, x_i)$$

のとき

$$g(x_i, x_{i+1}) = f(x_i, x_{i+1}) + \epsilon, \quad g(x_{i+1}, x_i) = f(x_{i+1}, x_i)$$

そうでなければ

$$g(x_i, x_{i+1}) = f(x_i, x_{i+1}), \quad g(x_{i+1}, x_i) = f(x_{i+1}, x_i) - \epsilon$$

他の場合 g, f は同じ値をとるものとする。しかし、$v(g) = v(f) + \epsilon$ となり、矛盾。したがって、S は G' のカットである。すると、$x \in S, y \notin S$ に対して $f(y,x) = 0$ であるから、$v(f) = c(S) \ge \min_T c(T)$ をえる。

定理　c が整数値をとるなら、最大流を与える流れは整数値をとる。

9　有限グラフ上の電気回路網

定義　$G(X,U)$ を連結無向グラフとし、$C := \{C_{xy}\}_{x,y\in X}$ が以下の性質をみたすとする。

$$C_{xy} = C_{yx} \begin{cases} > 0 & (x,y) \in U \\ = 0 & \text{other} \end{cases}$$

このとき、(X,C) の組を G 上の電気回路という。C_{xy} をコンダクタンス、その逆数 $R_{xy} = 1/C_{xy}$ を抵抗という。$(x,y) \notin U$ のとき、$R_{xy} = \infty$ と考える。$x \in X$ に対して $C_x := \displaystyle\sum_{y\in X} C_{xy}$ とする。

$x \in X$ で電位を $v(x)$, $x \in X$ から $y \in X$ への電流量を i_{xy} と書く。$s,t \in X$ を固定しよう。

[Ohm の法則]

$$v(x) - v(y) = i_{xy}R_{xy}, \qquad (x,y) \in U$$

これより $i_{xy} = -i_{yx}$ である。

[Kirchhoff の電流則]　$v(s), v(t)$ を与えれば、

$$\sum_{y\in X,\ (x,y)\in U} i_{xy} = 0, \qquad x \in X, x \neq s,t$$

任意 2 頂点 x,y の間の全抵抗は Ohm の法則を援用することによって定義される。電流 $\{i_{xy}\}, v(x)-v(y)$ は線形方程式の解である。もし、$v(s) = v(t)$ ならば、$i_{xy} = 0$ $(x,y \in X)$ である。 $i_{x_1x_2} > 0$ としよう。途中で s,t が現れない限り、Kirchhoff の電流則からつぎつぎと $i_{x_ix_{i+1}} > 0$ を得る。したがって、ある番号 k でサイクル $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_k$ を得る。しかし、この場合 $v(x_k) > v(x_{k+1}) > \cdots > v(x_k)$、矛盾である。よって、ある j で $x_j = s$ または $x_j = t$ となる。$x_j = t$ としよう。$x_1 \neq s$ なら、$v(y_1) > v(x_1)$ なるものがある。同様の考えによってある i で $y_i = s$ または $y_i = t$ を得る。しかし、これは $v(s) = v(t)$ に反する。$x_j = t$ としても同様である。もし、$v(s) = v(t)$ ならば、$v(x)$ はすべて同じ値である。

[直列、並列]　2 つの抵抗器 r_1, r_2 (同じ文字で抵抗を示す) を直列、並列に接続したとき、全抵抗値はそれぞれ

$$r_1 + r_2, \qquad \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$$

である。並列の場合、コンダクタンスでみれば、全コンダクタンスは和で表される。
[同電位]　同電位の頂点は同一視できる。たとえば、立方体の隣り合う頂点の間の全抵抗は 7/12 となることがわかる。

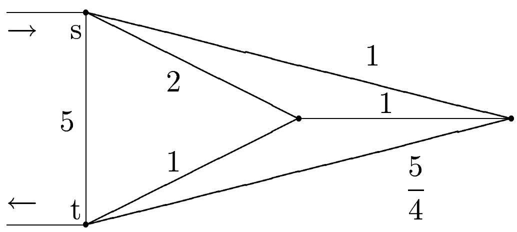
[星 - デルタ変換]　x が抵抗 R_{ax}, R_{bx}, R_{cx} の弧によって 3 頂点 a, b, c とだけに結ばれているとき、x を星の中心という。もし、$x \neq s, t$ ならば、星はデルタ R_{ab}, R_{bc}, R_{ca} で置き換えられる。抵抗に関して、

$$R_{ab}R_{cx} = R_{bc}R_{ax} = R_{ca}R_{bx} = R_{ax}R_{bx} + R_{bx}R_{cx} + R_{cx}R_{ax}$$

コンダクタンスに関して

$$C_{ab}C_{cx} = C_{bc}C_{ax} = C_{ca}C_{bx} = \frac{C_{ax}C_{bx}C_{cx}}{C_{ax} + C_{bx} + C_{cx}}$$

例と課題



s, t 間の全抵抗は 1 になる。5/4 を 2 にすればどうなる？（レポート課題）

10　有限グラフ上の電気回路網 2

$G(X,U)$ を連結単純無向グラフとし、$R_{xy}=1\ (x,y)\in U$ を仮定する。s から電流量 1 を流入、t から同量が流出するとしよう。このとき、各 $(a,b)\in U$ に対しつぎによって与えられる電流量 w_{ab} が流れる。

$$w_{ab}=\frac{N(s,a,b,t)-N(s,b,a,t))}{N}$$

$N(s,a,b,t)$ は s から t への道上に a,b がこの順に現れるような全域木の個数であり、N は全域木の総数である。

以下でこれを証明する。一般の場合に以下の証明は適用できないが、確率概念を使った存在証明がある。さて、全域木を T とする。T 上の $s-t$ 道に対して $(s,b)\in U$ なる b がひとつ決まるから

$$\sum_{b;(s,b)\in U}N(s,s,b,t)=N$$

$(s,b)\in U$ に対して $N(s,b,s,t)=0$ であるから

$$\sum_{b;(s,b)\in U}w_{sb}=1$$

が成り立つ。t に関しても同様であるから、s,t について Kirchhoff の電流則が成立する。

T を全域木、x を s,t と異なる頂点とする。

$$N\sum_{y;(x,y)\in U}w_{xy}=\sum_{y;(x,y)\in U}(N(s,x,y,t)-N(s,y,x,t))$$

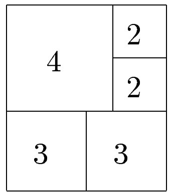
x が $s-t$ 道上になければ、T はカウントされない。$s-t$ 道が $s\ldots uxv\ldots t$ となっているとしよう。$v=y$ か $u=y$ であるにしたがって、T は $N(s,x,y,t)$ か $N(s,y,x,t)$ にカウントされる。すべての T についてこれが成立するから、電流則がいえる。

つぎに電位則をしめす。サイクルをとったとき、各弧の抵抗は同じ値なので、通過する電流量が 0 であることをいえばよい。つぎの概念を用いる。G の 2 木 $\mathcal{F}(F_s,F_t)$ とは、F_s,F_t は s,t をそれぞれ頂点とする木で、和が G の全域部分グラフになっているときにいう。$N(s,a,b,t)$ は $a\in F_s, b\in F_t$ をみたす 2 木の総数である。さて、$0,1,2,\ldots,n$ をサイクルとしよう。途中同じ頂点はあらわれない。n 番目の頂点は 0 番目の頂点に一致する。このとき、

$$N\sum_{i=0}^{n-1}w_{i,i+1}=\sum_{i=0}^{n-1}(N(s,i,i+1,t)-N(s,i+1,i,t))=\sum_{i=0}^{n-1}N(s,i,i+1,t)-\sum_{i=0}^{n-1}N(s,i+1,i,t)$$

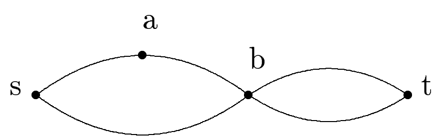
の第1項において、2木 F_s, F_t は F_s から F_t へ橋渡しをするサイクルの弧の個数だけカウントされる。第1項においては、2木 F_s, F_t は F_t から F_s へ橋渡しをするサイクルの弧の個数だけカウントされる。サイクルであるから、これらの数は等しい。これで証明おわり。

抵抗がすべて正有理数のとき、正有理数の電流を流すと、各弧に有理数の電流量が流れる。なぜなら、抵抗の共通分母を B とすれば、各弧を分割し、$1/B$ の抵抗の直列に置き換えることができるからである。



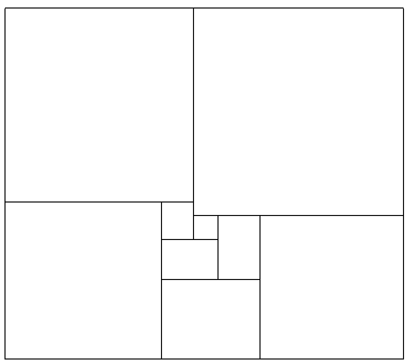
1903年に Dehn が与えた、かわった定理を紹介する。ひとつの長方形が正方形でタイル張りできるとは、たとえば右のような図を意味する。この様な場合、長方形の隣り合う２辺の比は有理数である。

長方形の上辺の中点を s 、下辺のそれを t とおき、途中に現れている水平辺の中点とともに頂点集合をつくる。正方形は弧とみなす。これによって、正方形タイル張りはグラフを構成することがわかる。上図の場合は



タイルを同材質で作られているなら、たて H よこ L の長方形の抵抗はすべて H/L の定数倍になる。したがって正方形の抵抗はすべて同じ値であるから、抵抗をすべて 1 として正方形タイル張りを電気回路とみなそう。すると、全抵抗は有理数であり、もとめる結果を得る。

Report　たて 61 よこ 69 の長方形の正方形分割をもとめよう。下図は略図。



[参考文献]

1. グラフ理論入門、ボロバッシュ、倍風館

2. 確率論、熊谷、共立

3. 「正方形分割」でＷｅｂを調べる