1　自然数、整数、有理数

自然数全体を $\mathbf{N}$ で表す。

（数学的）帰納法はつぎのかたちで用いられる。

I)　$m \in \mathbf{N}$ に対して、つぎが成立するとき、命題 $P(n)$ は任意の $n \geq m$ なる自然数に対して成立するという。
1) 命題 $P(m)$ が成立する。
2) 命題 $P(k)$ $(k \geq m)$ が成立するならば、$P(k+1)$ が成立する。

II)　$m \in \mathbf{N}$ に対して、つぎが成立するとき、命題 $P(n)$ は任意の $n \geq m$ なる自然数に対して成立するという。
1) 命題 $P(m)$ が成立する。
2) $k \geq m$ に対して、命題 $P(h)$ $(m \leq h < k)$ が成立するならば、$P(k)$ が成立する。

例　任意の自然数 n に対して $f(n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ は自然数である。実際、$f(1) = 1$ は自然数。$f(k)$ が自然数であると仮定すると、

$$f(k+1) = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3) = (k+1)^2 + f(k)$$

であるから、$f(k+1)$ は自然数である。帰納法により、任意の自然数 n に対して $f(n)$ は自然数である。

例　$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n}{2}x^2 + \ldots$ の x^k の係数を ${}_nC_k$ と書き、2 項係数という。これは

$${}_nC_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad {}_nC_k = {}_{n-1}C_k + {}_{n-1}C_{k-1}$$

をみたす。ここで自然数 r に対して $r! = r(r-1)\cdots 2 \cdot 1$ である。

$p \in \mathbf{N}, \neq 1$ が素数であるとは、p の約数が $1, p$ しかないときにいう。素数は無限にある（ユークリッドの定理）。

$a, b \in \mathbf{N}$ に対し、方程式 $x + b = a$ の解 x を $a - b$ と表し、これらを整数という。整数全体を $\mathbf{Z}$ で表す。整数には、マイナスの符合をつけること、和、差、積をとることができる。

問題　$(a+c) - (b+c) = a - b,\ k(a-b) = ka - kb$

$a, b \in \mathbf{Z}$ で $b \neq 0$ とするとき、方程式 $bx = a$ の解を $x = \frac{a}{b}$ と書き、有理数という。有理数全体を $\mathbf{Q}$ と書く。有理数には四則演算を考えることができる。自然数は整数であり、整数は有理数である。

2　実数

2.1　記号

Q　有理数全体
R　実数全体
$x \in S$　x は S の要素である。
$A \subset B$　集合 A は B に含まれる。 集合 A は B の部分集合である。集合 B は A を含む。

2.2　公式

絶対値

$|x + y| \leq |x| + |y|$

$||x| - |y|| \leq |x - y|$

2.3　実数

集合 S が順序集合であるとは、S の 2 元 a, b に対して関係 $a \leq b$ があり、つぎの性質をみたすときにいう。
1) $a \leq a$
2) $a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b$
3) $a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c$
S, R を順序集合とする。S の順序関係が R のそれであるとする。S に属するすべての x がある定数 $M \in R$ 以下、すなわち $x \leq M$ であるとき、S は上に有界であるといい、M を S の上界という。上界 M が S の元であるとき、M は S の最大値であるといわれる。最小値も同様に定義される。S の上界全体からなる集合の最小値を、もしあれば、 S の上限といい、$\sup S$ で表す。下に有界、下界、下限 $\inf S$ が同様に定義される。S の最大値、最小値はそれぞれ $\max S, \min S$ と表される。

例　$S = \{1 - 1/n \mid n \in \mathbf{N}\}$ とすると、$\inf S = \min S = 0$, $\sup S = 1$, $\max S$ は存在しない。

例　$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}$ とすると、$\sup S = \max S = b$, $\inf S = a$, $\min S$ は存在しない。

実数の連続性　上に有界な部分集合には上限が存在する。下に有界な部分集合には下限が存在する。

2.4　数列の極限

数列 $\{a_n\}$ が a に収束するとは、任意の正数 $\epsilon > 0$ に対してある自然数 N が存在し、$|a_n - a| < \epsilon$ がすべての $n \geq N$ に対して成立するときにいい、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

と記す。数列 $\{a_n\}$ が発散するとは、どんな正数 M にたいしてもある自然数 N が存在して、$n \geq N$ ならば、$a_n \geq M$ が成立することであり、

$$\lim_{n \to \infty} a_n = +\infty$$

と記す。

$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$ とする。

1) $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a \pm b$

2) $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (b_n, b \neq 0)$

4) $a_n \leq b_n \Rightarrow a \leq b$

はさみうちの定理

$$a_n \leq c_n \leq b_n,\ \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

例 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$

例 $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 0)$

定理　有界な増加数列は収束する。

例　**Napier** の数 $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2.71828\ldots$

問題

(1) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$

(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+5n+10}{2n^2-2n+1}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^n$

(4) $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$

(5) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^4-(n-1)^4}{(n+1)^4+(n-1)^4}$

(6) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n-1}}{n+2}$

(7) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$

(8) $\lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n^2+1}+n)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$

(9) $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$

(10) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+3)!}$

(11) $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n}$

(12) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2n^2}$

(13) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3-(n-1)^3}{(n+1)^2+(n-1)^2}$

(14) $\lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)!+(n+1)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

(15) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{3^n}}$

(16) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}(1+2+\cdots+n)$

(17) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$

(18) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-2+3-4+\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$

(19) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right)$

(20) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{2^n+1}$

3　関数の極限

3.1　定義

ここで考察する関数は R の部分集合から実数への写像を意味する。関数 $f(x)$ が x を a に近づけるとき b に近づく、

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

とは、任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、$0 < |x - a| < \delta$ をみたすどんな x にたいしても $|f(x) - b| < \epsilon$ が成立するときにいう。もちろん、このような x に対して関数の値がさだまっていなければならない。数列の極限にほとんど同様の定義である。

3.2　公式

$\lim_{x \to a} f(x) = b, \lim_{x \to a} g(x) = c$ とする。

1)　$\lim_{x \to a} f(x) \pm g(x) = b + c$

2)　$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = bc$

3)　$\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{b}{c} \qquad (c \neq 0)$

4)　$f(x) \leq g(x) \Rightarrow b \leq c$

5)　$f(x) \leq h(x) \leq g(x), b = c \Rightarrow \lim_{x \to a} h(x) = b$

3.3　連続関数

開区間とは

$$(a, b) = \{a < x < b \text{ をみたす実数全体 }\}$$

２端点 a, b を含ませるとき、閉区間という。右半開区間や左半開区間なども類似に定義される。

定義　関数 $f(x)$ はすくなくとも a を含む開区間で定義されているとする。

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

が成立するとき、$f(x)$ は $x = a$ において連続であるという。関数 $f(x)$ が開区間 (a, b) の各点において連続であるとき、開区間 (a, b) において連続であるという。点 a の左右どちらかしかでしか関数が定義されていない場合、左連続性、右連続性が定義される。

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$$

連続ならば、左連続、右連続である。関数が閉区間で連続であるとは、端点を除いた開区間で連続であり、左端点で右連続、右端点で左連続であるときにいう。

連続性の ϵ, δ による定義はつぎのとおり。任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し、

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

が成立する。

定義関数 $f(x)$ が区間 I で単調増加であるとは

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

をみたすときである。等号がでないとき、狭義の単調増加であるという。単調減少の定義も同様。

$f(x), g(x)$ が $x = a$ において連続であれば、$f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ はそこで連続である。

$f(x)$ が $x = a$ で連続で、$g(x)$ が $x = f(a)$ で連続であれば、その合成関数 $g(f(x))$ は $x = a$ において連続である。

中間値の定理　関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続とする。もし、$f(a) < f(b)$ ならば、$f(a) < k < f(b)$ をみたす任意の k に対して $f(c) = k,\ a < c < b$ となる c が存在する。

最大値と最小値　関数 $f(x)$ は、閉区間 $[a, b]$ で連続であれば、最大値と最小値をもつ。
逆関数　関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ において連続で、狭義単調増加ならば、その逆関数が存在し、逆関数は連続である。

3.4　三角関数

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 (x, y) を点 $(1, 0)$ から円周上をたどって達する道程 θ によって次のように表示する。

$$x = \cos\theta, \quad y = \sin\theta \qquad (\cos \text{はコサイン、}\sin \text{はサインと読む})$$

ここで、道程は反時計回りで向かうときプラスの値を、時計回りで向かうときマイナスの値をとると約束する。円周を反時計回りで一周すると $2\pi = 2 \times 3.141592\cdots$ の道程であるので、θ は 2π の整数倍だけの不確定さがある。したがって、

$$\cos\theta = \cos(\theta + 2\pi), \quad \sin\theta = \sin(\theta + 2\pi)$$

が成立する。

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

をそれぞれタンジェント、コタンジェントとよぶ。$\sin x, \cos x, \tan x$ の逆関数を $\sin^{-1} x, \cos^{-1} x, \tan^{-1} x$ と書き、それぞれ、アークサイン、アークコサイン、アークタンジェント関数という。

加法公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

3.5　指数関数、対数関数

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad (\text{任意の } x \text{ で有限確定})$$

を (e を底とする) 指数関数という。指数関数の逆関数を (自然) 対数関数といい、$\log x\ (x > 0)$ としるす。

$$e^{a+b} = e^a e^b\ (a, b \in \mathbf{R}) \quad \log(ab) = \log a + \log b\ (a, b >)$$

例　$\sin^{-1} x = \cos^{-1}\frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

例　$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}$

例　$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

例 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

例 $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

問題

(1) $\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2) $\cos^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(3) $\cos^{-1}x=\tan^{-1}\sqrt{5}\Rightarrow x=?$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-3}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$

(8) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left(\frac{x+2}{x^2-5x+4}+\frac{x-4}{3(x^2-3x-2)}\right)$

(9) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{2x^2+1}$

(10) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$

(11) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1}-x\right)$

(12) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2}{2x+1}-\frac{(2x-1)(3x^2+x+2)}{4x^2}\right)$

(13) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2++x+1}-x\right)$

(14) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+x}-x}$

(15) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4+1}}$

(16) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$

(17) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$

(18) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

(19) $\displaystyle\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

(20) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$

4　微分

4.1　定義

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

が存在するとき、関数 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能であるという。極限値を $f'(a)$ と書き、$f(x)$ の $x=a$ における微分係数という。

$$y=f(a)+f'(a)(x-a)$$

を曲線 $y=f(x)$ の接点 $(a,f(a))$ における接線、$f'(a)$ はその傾きといわれる。微分係数は

$$f(x+h)=f(x)+bh+h\epsilon(h) \qquad \epsilon(h)\to 0 \quad (h\to 0)$$

をみたす定数 b であるといってもよい。
区間 I 各点で微分可能な関数 $f(x)$ の微分係数全体は、区間で定義された関数とみなされる。これを $f(x)$ の導関数といい、$f'(x)$ と書く。記述の形式はつぎのようにいろいろある。

$$y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{d}{dx}f(x), \dot{y}$$

ただし、$y=f(x)$ としている。

4.2　定理、公式

1)　ある点で微分可能な関数はそこで連続である。

2)　$(u+v)'=u'+v'$

3)　$(uv)'=u'v+uv'$

4)　$(u/v)'=(u'v-uv')/u^2$

5)　$\frac{d}{dx}f(g(x))=\frac{df}{dy}(g(x))\frac{dg}{dx}(x)$

6)　逆関数 $f^{-1}(y)$ が存在すれば、

$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y)=\frac{1}{\frac{df}{dx}(f^{-1}(y))}$$

これはつぎのように略記される。

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

7)　$x=f(t), y=g(t)$ ならば、

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{df}{dt}}$$

$f(x)$	$f'(x)$		$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	(αは実数)	e^x	e^x
a^x	$a^x\log a$	$(a>0, a\neq 1)$	$\log\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x}$
$\log_a\lvert x\rvert$	$\frac{1}{x\log a}$	$(a>0, a\neq 1)$	$\sin x$	$\cos x$

$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\sin^{-1} x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\cos^{-1} x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan^{-1} x$	$\frac{1}{1+x^2}$		

例 $|x|$ は微分可能でない

例 $(x^2 \log x)' = 2x \log x + x$

例 $\left(\log \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| \right)' = \dfrac{1}{x^2+a}$ ここで $a \neq 0$

例 $\left(x\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \right)' = \dfrac{1-x-x^2}{1-x^2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

問題

(1) $x^4 + 2x^2 - 1$

(2) $x^5 - \dfrac{1}{x^3}$

(3) $\dfrac{x^3+2x-1}{x^2-1}$

(4) $x \sin x + \cos x$

(5) $\dfrac{1}{\tan x}$

(6) $e^x \cos x$

(7) $x \log x - x$

(8) $\dfrac{x}{\log x}$

(9) $(x^2+1)^7$

(10) $\cos 5x^2$

(11) $(\sin 3x)^2$

(12) $\dfrac{1}{(x^2+1)^2}$

(13) $x\sqrt{x^2+a^2}$

(14) $xe^{\cos 2x}$

(15) $\sqrt{1+2\log x}$

(16) $\log(\log x)$

(17) x^x

(18) $\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$

(19) $\sin^{-1} \dfrac{x}{a}$ $(a > 0)$

(20) $(\tan^{-1} 2x)^3$

(21) $\cos^{-1} \dfrac{1}{x}$

(22) $(x^2-3x+3)(x^2+2x-1)$

(23) $(x^3-3x+2)(x^4+x^2-1)$

(24) $(\sqrt{x}+1)(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1)$

(25) $\left(\dfrac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt[3]{x} + \dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{3x}\right)$

(26) $(x^2-1)(x^2-4)(x^2-9)$

(27) $(1+\sqrt{x})(1+\sqrt{2x})(1+\sqrt{3x})$

(28) $\dfrac{x+1}{x-1}$

(29) $\dfrac{x}{x^2+1}$

(30) $\dfrac{3x^2+1}{x-1}$

(31) $\dfrac{x^3-2x}{x^2+x+1}$

(32) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc \neq 0)$

(33) $\dfrac{x^2+1}{3(x^2-1)} + (x^2-1)(1-x)$

(34) $\dfrac{x^5}{x^3-2}$

(35) $\dfrac{1-x^3}{1+x^3}$

(36) $\dfrac{2}{x^3-1}$

(37) $\dfrac{1}{x^3+x+1}$

(38) $\dfrac{1}{x^2-3x+6}$

(39) $\dfrac{2x^4}{b^2-x^2}$

(40) $\dfrac{x^2+x-1}{x^3+1}$

(41) $\sin x + \cos x$

(42) $\dfrac{x}{1-\cos x}$

(43) $\dfrac{\tan x}{x}$

(44) $\dfrac{\sin x}{x} + \dfrac{x}{\sin x}$

(45) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(46) $\dfrac{x}{\sin x + \cos x}$

(47) $\dfrac{x \sin x}{1+\tan x}$

(48) $\dfrac{1}{4}\tan^4 x$

(49) $\cos x - \dfrac{1}{3}\cos^3 x$

(50) $3\sin^2 x - \sin^3 x$

(51) $\dfrac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x$

(52) $3\sin(3x+5)$

(53) $\sin \dfrac{1}{x^2}$

(54) $(1+\sin^2 x)^4$

(55) $x \sin^{-1} x$

(56) $\dfrac{\cos^{-1} x}{x^2}$

(57) $\dfrac{x}{1+x^2} - \tan^{-1} x$

(58) $\dfrac{x^2}{\tan^{-1} x}$

(59) $\log \sin x$

(60) $\tan^{-1}(\log x^2)$

5　Taylor の定理

5.1　高次微分

n 次微分をつぎによって定義する。

$$y^{(1)} = y', \quad y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$$

例　$k \in \mathbf{N}$ とするとき、$(x^k)^{(n)} = n(n-1)\cdots(n-k+1)x^{k-n} \ (n < k), \quad 0 \ (n \geq k)$

例　$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \dfrac{n\pi}{2})$

例　$(e^x \sin x)^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin(x + \dfrac{n\pi}{4})$

5.2　定理、公式

1)　**Leibniz の公式**　$(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$

2)　最大値、最小値の存在　関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続ならば、最大値 $\max\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ および、最小値 $\min\{f(x) \mid a \leq x \leq b\}$ が存在する。$f(x)$ が $c \in (a, b)$ で最大値 (最小値) $f(c)$ をとり、微分可能ならば、$f'(c) = 0$ になる。

3)　**Rolle の定理**　関数 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能であるとする。もし、$f(a) = f(b)$ ならば、$f'(c) = 0$ をみたす $a < c < b$ が存在する。

4)　平均値の定理　関数 $f(x), g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続で、区間 (a, b) で微分可能であるとする。このとき

$$\frac{f(a) - f(b)}{g(a) - g(b)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

をみたす $a < c < b$ が存在する。

5)　**Taylor の定理**　関数 $f(x)$ が a, b を含む区間で n 回微分可能ならば、

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{1}{2} f''(a)(b-a)^2 + \cdots \frac{1}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a)(b-a)^{n-1} + R_n$$

$$R_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(c)(b-a)^n$$

をみたす $c \in (a, b)$ が存在する。R_n を剰余項という。

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$(1+x)^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

問題

1) $\log \dfrac{1+x}{1-x}$ 2) $\dfrac{1}{(1+x)^2}$ 3) $\sqrt{1+x}$

6 応用

6.1 曲線の追跡

関数 $f(x)$ を考察する場合、各 x に対して $(x, f(x))$ を平面上に plot して得られる図形を $f(x)$ のグラフというが、このグラフを視察する方法がある。これによれば、関数の大まかな形状を知ることができる。詳しく知るには各点の近くの状況をしらべなければならない。

$f(a)$ が極大値であるとは、a の近くのどの点 x に対しても $f(x) < f(a)$ が成立するときにいう。同様に極小値が定義される。等号を入れれば「広義の」という形容詞がつく。極大値または極小値を極値という。

区間 I で定義された関数 $f(x)$ が凸であるとは、

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1} \leq \frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x} \qquad (x, x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x < x_2)$$

が成立するときにいう。不等号の向きを逆にすれば凹の定義を得る。点 $x = a$ で凹凸が変化するとき、この点を変曲点という。

6.2 定理

1) 関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で連続 (a, b) で微分可能であるとする。
i) (a, b) において $f'(x) = 0$ ならば、$f(x)$ は $[a, b]$ で定数関数である。
ii) (a, b) において $f'(x) > 0$ ならば、$f(x)$ は $[a, b]$ で狭義の増加関数である。
iii) (a, b) において $f'(x) \geq 0$ ならば、$f(x)$ は $[a, b]$ で増加関数である。逆も成り立つ。

2) 関数 $f(x)$ が $x = a$ で広義の極値をとり、そこで微分可能ならば $f'(a) = 0$ である。

3) 関数 $f(x)$ は $x = a$ を含む開区間 I で 2 階微分可能で、$f''(x)$ は連続であり、$f'(a) = 0, f''(a) \neq 0$ とする。このとき、
　$f''(a) > 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極小
　$f''(a) < 0$ ならば $f(x)$ は $x = a$ で極大

4) 関数 $f(x)$ は $x = a$ を含む開区間 I で n 階微分可能で、$f^{(n)}(x)$ は連続であり、

$$f'(a) = f''(a) = \ldots = f^{(n-1)}(a) = 0, f^{(n)} \neq 0$$

とする。このとき、
n が偶数のとき：

$$f^{(n)}(a) > 0 \Rightarrow f(a) \text{ 極小} \qquad f^{(n)}(a) < 0 \Rightarrow f(a) \text{ 極大}$$

n が奇数のとき：　$f(a)$ は極値でない。

5) 関数 $f(x)$ は区間 I で微分可能とする。次は同値である。
i) $f(x)$ は I で凸（凹）である。
ii) $f'(x)$ は I で増加関数（減少関数）である。
iii) $y = f(x)$ のグラフはその上の任意の点における接線より下に (上に）でない。

さらに $f(x)$ が区間 I で 2 階微分可能であれば、つぎも同値。
iv) I で $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$

6) $x=a$ の左右で $f''(a)$ の符合が変れば $f(x)$ は $x=a$ で変曲点をもつ。$f''(a)=0$, $f'''(a)\neq 0$ ならば $f(x)$ は $x=a$ で変曲点をもつ。

例　$x>0$ のとき、$e^x > 1+x+\dfrac{x^2}{2}$

例　$f(x)=x^2(x-1)^3$ において $f(0)$ は極大値、$f(\frac{2}{5})$ は極小値。

例　$p>1, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ a,b\geq 0$ ならば、

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

例　$a_1,a_2,\ldots,a_n\in \mathbf{R}$ に対して

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}(x-a_i)^2$$

は $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i$ で最小値をとる。

例　$x^n e^x$ は $x=0$ で極小値をとる。

例　e^{-x^2} は $\pm 1/\sqrt{2}$ で変曲点をもつ。

問題

1)　$\dfrac{x}{1+x} < \log(1+x)$ を示せ

2)　$\dfrac{x}{1+x^2} < \tan^{-1}x < x$

3)　$x\log x \geq x-1 \quad (x>0)$

4)　$\dfrac{2}{\pi} < \sin x < x \quad (0<x<\dfrac{\pi}{2})$

5)　$\alpha(x-1) < x^\alpha - 1 < \alpha x^{\alpha-1}(x-1) \quad (\alpha>1, x>1)$

6)　$e^x > 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!} \quad (x>0)$

7)　$\sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \ldots > \sqrt[n]{n}$

8)　$\dfrac{\log x}{x}$ の極値を求めよ

9)　$\sin^2 x - \sqrt{3}\cos x \quad (0<x<2\pi)$ の極値を求めよ

10)　$x^2\log x$ の極値を求めよ

11)　$2(e^x+e^{-x}\cos x)-x^3-x^2$ の $x=0$ における極大極小を調べよ

6.3　L'Hospital の方法

極限値計算に有力な方法。

1) **Case** $0/0$　関数 $f(x), g(x)$ は区間 $[a, b]]$ で連続、区間 (a, b) で微分可能とする。また、$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ そして、$f(a) = g(a) = 0$ と仮定する。このとき、もし

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

ならば、

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

2) **Case** ∞/∞　関数 $f(x), g(x)$ は区間 (a, b) で微分可能とする。また、$g'(x) \neq 0$ $(a < x < b)$ そして、$f(a) = g(a) = \infty$ と仮定する。このとき、上述と同様の命題が成立する。

証明　A が有限の場合。任意の $\epsilon > 0$ に対して $x_0 \in (a, b)$ を $|A - f'(x)/g'(x)| < \epsilon$ $(a < x < x_0)$ なるようにとる。

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} D(x, x_0)$$

とすれば、$D(x, x_0) \to 1$ $(x \to a)$ を得る。平均値の定理から、

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} D(x, x_0) = \frac{f'(c)}{g'(c)} + \frac{f'(c)}{g'(c)} (D(x, x_0) - 1)$$

なる $a < c < x_0$ がある。$|D(x, x_0) - 1| < \epsilon$ なる x に対して

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - A \right| < \epsilon + (|A| + \epsilon)\epsilon$$

をえる。$A = \infty$ の場合 $1/\epsilon$ で評価する。$D(x, x_0) > 1/2$ なる x に対して

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \frac{1}{2} \frac{f'(c)}{g'(c)} > \frac{1}{2\epsilon}$$

例　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x}{x^2} = \frac{1}{2}$

例　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^2}{x} = 0$

例　$\displaystyle \lim_{x \to +0} x^x = 1$

例　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0$

問題

(1)　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$　(2)　$\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{\log x}{1 - x}$　(3)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$

(4)　$\displaystyle \lim_{x \infty} x^{1/x}$　(5)　$\displaystyle \lim_{x \to \pi/2 - 0} \left(\tan x - \frac{1}{\cos x} \right)$　(6)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{(\log x)^2}{\sqrt{x}}$

(7)　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$　(8)　$\displaystyle \lim_{x \to +0} x \log x$　(9)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} x \left(\frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x \right)$

(10)　$\displaystyle \lim_{x \to \infty} (1 + x)^{1/x}$　(11)　$\displaystyle \lim_{x \to 1} (1 - \log x)^{1/\log x}$　(12)　$\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{a^x + b^x}{x} \right)^{1/x}$　$(a, b > 0)$

7　2変数関数

7.1　定義

$\mathbf{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbf{R}\}$: 平面
$0 = (0, 0)$: 原点
$(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$,　(複号同順) : 和と差
$a(x, y) = (ax, ay)$　$(a \in \mathbf{R})$: スカラー倍
$\| p \| = \sqrt{x^2 + y^2}$: $p = (x, y)$ のノルム
$(a, b) \cdot (c, d) = ac + bd$: 内積
$\angle(p, q)$: p, q のなす角度、$p \cdot q = \| p \| \| q \| \cos \angle(p, q)$
$\{p \mid \| p - q \| \leq r\}$: 中心 q 半径 r の閉円盤
$\{p \mid \| p - q \| < r\}$: 中心 q 半径 r の開円盤
$\{p \mid \| p - q \| = r\}$: 中心 q 半径 r の円周

$D \subset \mathbf{R}^2$ が開集合とは、D の各点を中心とする開円盤で D にふくまれるものが存在するときにいう。開集合の補集合を閉集合という。空集合は開集合であり閉集合である。集合 D を含む最小の閉集合を D の閉包といい、$\overline{D}$ と記する。$\overline{D} - D$ を D の境界という。

$D \subset \mathbf{R}^2$ が連結であるとは、$D \subset U \cup V$ および $U \cap V = \phi$ をみたす開集合 U, V に対し $D \subset U$ または $D \subset V$ が成立するときにいう。

円盤に含まれる集合を有界集合という。

連結な開集合を領域という。連結な閉集合を有界閉領域という。

部分集合 $D \subset \mathbf{R}^2$ から $\mathbf{R}$ への写像を 2 変数関数という。任意の開区間の逆像が開集合になっている関数は連続であるといわれる。1 変数の場合と同様に、連続関数の和積スカラー倍は連続である。

$f : D \to \mathbf{R}$ を 2 変数関数、$q \in \overline{D}, c \in \mathbf{R}$ とする。任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ があり、$\| p - q \| < \delta$ をみたす任意の $p \in D$ に対し $|f(p) - c| < \epsilon$ が成立するとき、

$$\lim_{p \to q} f(p) = c$$

と記し、c を f の q における極限値という。

関数が点 p で連続であることを 1 変数の場合と同様に極限値を用いて定義する。定義されている領域で連続であることも各点で連続であることによって定義する。この定義は既述のものと同値であることがわかる。

区間 $[a, b]$ から $\mathbf{R}^2$ への連続関数 $f(x)$ を連続曲線という。ただし、$\lim_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \to b-0} f(x) = f(b)$ とする。

$D \subset \mathbf{R}^2$ が連結ならば、D 内の任意 2 点は D 内に像をとる連続曲線で結ばれる。逆も成立する。

7.2　定理、公式

1) $\| p + q \| \leq \| p \| + \| q \|$
2) $|p \cdot q| \leq \| p \| \| q \|$
3) 極限値について 1 変数のときと同様の結果が成立する。

4) 連続関数の和差積商は定義可能の領域で連続である。連続関数の合成も可能であれば連続である。
5) 連結集合の連続関数による像は連結である。
6) 連続関数は有界閉集合で最大値最小値をとる。

例 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x-y)\sin\frac{1}{x^2+y^2} = 0$

例 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

例 $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ は存在しない。

例 $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ $((x,y)\neq(0,0))$, $\quad f(0,0)=0$ は $(0,0)$ で連続である。

例 $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$, $\quad f(0,0)=0$ は $(0,0)$ で不連続である。

問題

1) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

2) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{x^2+y^4}$

3) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

4) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\log(x^2+y^2)$

5) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$, $\quad f(0,0)=0$ は $(0,0)$ で連続である。

6) $f(x,y) = \frac{xy}{\sin(x^2+y^2)}$ $((x,y)\neq(0,0))$, $\quad f(0,0)=0$ は $(0,0)$ で不連続である。

7) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq(0,0))$, $\quad f(0,0)=0$ は $(0,0)$ で連続である。

8　偏導関数

8.1　定義

2 変数関数 $f(x,y)$ の点 (a,b) における、x に関する偏微分係数 $f_x(a,b)$ を関数 $g(x)=f(x,b)$ の $x=a$ における微分係数 $g'(a)$ で定義する。偏導関数についても同様な定義がなされる。2 回偏微分係数は

$$f_{xx}(a,b),\quad f_{xy}(a,b),\quad f_{yx}(a,b),\quad f_{yx}(a,b)$$

または

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial x}f(a,b),\quad \frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(a,b),\quad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}f(a,b),\quad \frac{\partial^2}{\partial y\partial y}f(a,b)$$

などと記す。$\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}f(a,b)$ ははじめ x で微分し、ついで y で微分することを意味している。一般に f_{xy} と f_{yx} は異なる。

関数 $f(x,y)$ が C^n 級であるとは、どの $m\leq n$ 回偏導関数も連続であるときにいう。実は n 回偏導関数が連続だけで OK。

$u(x,y)\dfrac{\partial}{\partial x}+v(x,y)\dfrac{\partial}{\partial y}$: 1 階偏微分作用素

$u(x,y)\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial x}+v(x,y)\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+w(x,y)\dfrac{\partial^2}{\partial y\partial y}$: 2 階偏微分作用素

$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y\partial y}$: Laplacian

$o(x)$　: Landau 記号 $\lim\limits_{x\to 0}o(x)/x=0$

関数 $f(x,y)$ が点 (a,b) で全微分可能とは

$$f(a+h,b+k)=f(a,b)+Ah+Bk+o(\|(h,k)\|)$$

をみたす定数 A,B が存在することである。全微分可能ならば連続である。$A=f_x(a,b)$, $B=f_y(a,b)$

$df(x,y)=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$: 全微分可能な関数 $f(x,y)$ の全微分

8.2　定理、公式

1) f_{xy},f_{yx} がともに連続ならば、$f_{xy}=f_{yx}$ が成立する。
2) $f(x,y)$ が (a,b) を含む開集合で偏微分可能で、その導関数 $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ が (a,b) で連続ならば、$f(x,y)$ は (a,b) で全微分可能である。

例　$z=(2x+3y)\sin y$ ならば $z_x=2\sin y$, $z_y=3\sin y+(2x+3y)\cos y$, $z_{xx}=0$, $z_{xy}=z_{yx}=2\cos y$, $z_{yy}=6\cos y-(2x+3y)\sin y$

例　$f(x,y)=\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ $((x,y)\neq 0), f(0,0)=0$ なら $f_{xy}(0,0)\neq f_{yx}(0,0)$

例　$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ は 0 で連続で、偏微分可能だが、全微分可能ではない。

問題

A $z_x, z_y =?$

1) $z = x^3 + y^3 - 3axy$ 2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 3) $z = e^{ax} \cos by$

4) $z = \log(x^2 + y^2)$ 5) $z = x^y$ 6) $z = \sin^{-1}(x/y)$

B $z_{xy} =?$

1) $z = xy(2x + 3y)$ 2) $z = e^{xy}$ 3) $z = \cos(x - 2y)$

4) $z = \log(e^x + e^y)$ 5) $z = \sin^{-1} xy$

C $z_{xx} + z_{yy} =?$

1) $z = \log(x^2 + y^2)$ 2) $z = e^x \cos y$ 3) $z = \tan^{-1}(x/y)$

9　Taylor の定理

1) $z=f(x,y)$ が全微分可能で、$x=\phi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$ が偏微分可能ならば、合成関数

$$z=f(\phi(u,v),\psi(u,v))$$

は偏微分可能で、

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

2) $h^2+k^2=1$ とする。(a,b) の近傍で定義された関数 $f(x,y)$ に対し

$$\lim_{t\to 0}\frac{f(a+ht,b+kt)-f(a,b)}{t}$$

が存在するとき、$f(x,y)$ は (a,b) で (h,k) 方向に微分可能であるといい、極限値を (h,k) 方向の方向微分係数という。

3) 関数 $f(x,y)$ が領域 D で連続な n 回導関数をもち、すなわち C^n 級であり、D 内で (a,b) , $(a+h,b+k)$ が線分で結べるならば、

$$f(a+h,b+k)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^j f(a,b)+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(a+\theta h,b+\theta k)$$

をみたす $0<\theta<1$ が存在する。

4) $F(x,y)$ は (a,b) の近傍で C^1 級であるとし、$F(a,b)=0$, $F_y(a,b)\neq 0$ とする。このとき、$x=a$ を含む開区間 I で定義された C^1 級関数 $f(x)$ で

$$b=f(a),\quad F(x,f(x))=0\ (x\in I)$$

をみたすものが唯一存在する。さらに

$$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$$

例　$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とすると、

$$\frac{\partial}{\partial r}=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta}=-r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\Delta z=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\theta^2}$$

例　$z=f(x,y)$ は全微分可能とする。$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ とする。$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$ ならば、$z_\theta=0$

問題

A　$z_u, z_v=?$

1) $z=\log(x^2+y^2)$, $x=u-v, y=u+v$　2) $z=e^{x+y}$, $x=\log(u+v), y=\log(u-v)$

B　$dy/dx=?$

1) $x^2+xy-y^2=1$　2) $x^3-3axy+y^3=0$

3) $e^x+e^y=e^{x+y}$

10　偏微分の応用

極値の定義は 1 変数の場合に同じ。関数の極値問題は制限がある場合とない場合に分けられる。

1) $f(x,y)$ が偏微分可能で、点 (a,b) で極値をとるならば、

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

2) $f(x,y)$ は (a,b) の近傍で C^2 級で、$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$ とする。$A = f_{xx}(a,b)$, $B = f_{xy}(a,b)$,
$C = f_{yy}(a,b)$, $D = B^2 - AC$ とおくとき、
i) $D < 0, A > 0$ ならば $f(x,y)$ は (a,b) で極小値 $f(a,b)$ をとる。
ii) $D < 0, A < 0$ ならば $f(x,y)$ は (a,b) で極大値 $f(a,b)$ をとる。
iii) $D > 0$ ならば $f(x,y)$ は (a,b) で極値をとらない。

iv) $F(x,,y)$ は (a,b) の近傍で C^2 級で、$F_y(a,b) \neq 0$ とする。関数 $y = f(x)$ で $x = a$ の近傍で
$F(x, f(x)) = 0$ をみたすものが唯一存在するが、それが $x = a$ において極値 $b = f(a)$ をもつならば、

$$F(a,b) = 0,\ F_x(a,b) = 0$$

さらに、

$F_{xx}(a,b)/F_y(a,b) > 0$ ならば b は極大値。

$F_{xx}(a,b)/F_y(a,b) < 0$ ならば b は極小値。

v) [Lagrange の乗数法] $f(x,y), g(x,y)$ は C^1 級とする。条件 $g(x,y) = 0$ のもとで関数 $z = f(x,y)$ が
(a,b) で極値をとり、$g_x(a,b) \neq 0$ または $g_y(a,b) \neq 0$ ならば、ある定数 λ が存在して、つぎが成り立つ。

$$F_x(a,b) = F_y(a,b) = F_\lambda(a,b) = 0$$

ここで、$F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$

例　$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ は極小値 $f(1,1) = -1$ をとる。

例　$F(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy = 0$ により定義される陰関数 $y = f(x)$ は極大値 $f(\sqrt[8]{3}) = \sqrt[8]{27}$、極小値
$f(-\sqrt[8]{3}) = -\sqrt[8]{27}$ をもつ。

例　条件 $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ のもとで、$f(x,y) = xy$ は極大値 1、極小値 -1 をとる。

例　条件 $g(x,y) = x^3 - y^2 = 0$ のもとで $f(x,y) = (x+1)^2 + y^2$ は極小値 1 をとる。

例　$x + y + z = 5, xy + yz + zx = 8$ のもとで xyz は最大値 $\frac{112}{27}$、最小値 4 をとる。

問題

A　極値をもとめる

1)　$x^2 - xy + y^2 - 4x - y$

2)　$xy(2 - x - y)$

3)　$xy(x^2 + y^2 + 1)$

4)　$(x^2 + y^2)e^{x-y}$

5)　$x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y - 1$

6)　$x^3 - 9xy + y^3 + 1$

B　陰関数の極値をもとめる

1)　$x^2 - xy + y^2 - 3 = 0$

2)　$xy(y - x) - 16 = 0$

3)　$x^3 - 3xy + y^3$

4)　$x^4 + 3x^2 + y^3 - y = 0$

C　条件付き極値問題

1)　$x^2 + y^2 - 8 = 0$ のとき $x + y$

2)　$xy - 1 = 0$ のとき $x^2 + y^2$

3)　$x^2 + xy + y^2 = 1$ のとき xy

4)　$x^3 - 6xy + y^3 = 0$ のとき $x^2 + y^2$

D 最大値最小値問題

1)　$\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{1}{a^2}$ のとき $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2)　$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = 1$ のとき $u = x + y + z$

3)　$2x^2 + 3y^2 + 6z^2 = 1$ のとき $u = y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xz - 2xy$

11　無限級数

数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(a_n \in \mathbf{R})$ からつくられる有限和

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

が極限値 $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ をもつとき、無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

は s に収束するという。そうでないとき発散するという。

1)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が存在すれば、a_n は 0 に収束する。

2)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束すれば、$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ (c は定数) が収束し、

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

3)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ に有限個の項を付け加えても、取り除いてもその収束発散は変らない。

4)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束するとする。$1 = n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ を自然数の増加列とし、$b_k = \sum_{n_{k-1} \leq i < n_k} a_i$ とすれば、$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ は収束し、 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ にひとしい。

5)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することと

$$\lim_{m,n\to\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{n} a_k \right| = 0 \quad (m < n)$$

であることとは同値である。

6)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数 $(a_n \geq 0)$ で $\{s_n\}$ が有界 (ある $M > 0$ 存在し、任意の n に対して $s_n \leq M$) ならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

7)　正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ において、各 n に対して $a_n \leq b_n$ であり、$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ が収束するならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ も収束する。

8)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数で

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r \quad (0 \leq r \leq \infty)$$

をみたすとき、

i) $0 \leq r < 1$ ならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

ii) $1 < r \leq \infty$ ならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

9)　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が正項級数で

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = r \quad (0 \leq r \leq \infty)$$

をみたすとき、

i) $0 \leq r < 1$ ならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束する。

ii) $1 < r \leq \infty$ ならば、$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

10) $\{a_n\}$ が単調非増加で、0 に収束するとき、$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ は収束する。

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad (|r| < 1)$, 発散　(他)

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ および $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^p}$ は $p > 1$ のとき、収束し、$p \leq 1$ のとき発散する。

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+3n-3}$ は収束する。

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n-4^n}$ は収束する。

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ $(a > 0)$ は収束する。

例 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ は収束する。

問題

級数和をもとめる

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(n+1)(n+2)}$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n-2^n}{5^n}$

収束するか

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$

7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+2}$

8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$

9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin^2 \frac{\pi}{n}$

10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n-2^n}$

11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3n^3-n-1}$

12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{n}$

13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n-2}{2n+3}\right)^n$

15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^n}$

12　巾級数

$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ が収束するとき、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束するという。

$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ を (x に関する) 巾級数という。$x^0=1$ と約束する。

巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ に対して

$$r=\sup\left\{|x|\ ;\ \sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\text{が収束}\right\}$$

をこの級数の収束半径という。

1)　級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束すれば、収束する。逆は一般に成立しない。

2)　絶対収束級数は、項の順序を変えても絶対収束し、その極限値は同じ。

3)　$\sum_{n=0}^{\infty}a_n,\ \sum_{n=0}^{\infty}b_n$ が絶対収束するとする。$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_{n-k}b_k$ と置くとき、$\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ は絶対収束し $(\sum_{n=0}^{\infty}a_n)(\sum_{n=0}^{\infty}b_n)$ に等しい。

4)　巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は、$x=x_0\ (\neq 0)$ で収束すれば、$|x|<|x_0|$ であるすべての x に対して絶対収束する。

5)　巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は、$x=x_0\ (\neq 0)$ で発散すれば、$|x|>|x_0|$ であるすべての x に対して発散する。

6)　巾級数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径を r とする

i)　$0<r<\infty$ ならば、$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ は $|x|<r$ で絶対収束し、$|x|>r$ で発散する。

ii)　$r=0$ ならば、$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ はすべての $x\neq 0$ に対して発散する。

iii)　$r=\infty$ ならば、$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ はすべての x に対して収束する。

逆に、上記 i),ii),iii) をみたす r は $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径である。

7)　$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径を r とする。もし、

$$(1)\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho\quad\text{または}\quad(2)\quad\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$$

が存在すれば、$r=1/\rho$ である。(ただし $1/0=\infty, 1\infty=0$)

8)　$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ の収束半径を r とし、$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\ (|x|<r)$ とする。このとき、$f(x)$ は $(-r,r)$ で微分可能で、

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$$

証明　$|x|,|x|+|h|<s<r$ とする。ある M で $|a_n|s^n\leq M$ が任意の n に対してなりたつ。
$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n$ と置く。すると、

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right|\leq M\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r^n}\left(\frac{(|x|+|h|)^n-|x|^n}{|h|}-n|x|^{n-1}\right)$$

よって左辺は

$$\leq\frac{Ms|x|}{(s-|x|)^2(s-|x|-|h|)}$$

ここで $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=(1-x)^2\ (|x|<1)$ を用いた。

9) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を r とし、$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < r)$ とする。もし、関数 $g(x)$ が $g'(x) = f(x), g(0) = 0$ をみたすならば、

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad (|x| < r)$$

10) $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(|x| < r)$ ならば、$a_n = f^{(n)}(0)/n!$ である。

例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ は収束するが、絶対ではない。

例 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ の収束半径は 1 である。$x = \pm 1$ では収束しない。収束域が $(-1, 1)$ であるという。

例

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^n x^n$$

の収束域はそれぞれ、 $(-1, 1)$, $[-1, 1)$,$(-3/2, 3/2)$ である。

例 $(1+x)^{\alpha} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

例 $\tan^{-1} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$

問題

絶対収束か

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$ 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

収束域をもとめよ

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n x^n$ 5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ 6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$

つぎを示せ

7) $\log(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1)$

8) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \quad (|x| < 1)$

9) $\sin^{-1} x = x + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (|x| < 1)$