変化の理論 (西岡担当)　模擬問題

学籍番号 ______________________ 氏名 ____

1.　直線 $y = x - 1$ と放物線 $y = x^2$ との距離をもとめよ。

距離を与える 2 点は、傾き -1 の法線 $y = -\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}$ との交点である。これらは、$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$, $\left(\frac{7}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ である。よって、求める距離は $\frac{3}{8}\sqrt{2}$ となる。

2.　極限値をもとめよ。

a)　$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{x-1}\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right) = e^2$$

b)　$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(1-\cos x)}{(1-\cos\ x)^2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos\ x)^2}{x^4} = \frac{1}{8}$$

3.　つぎを計算せよ。

a) $\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)^{1/2} = \frac{\partial}{\partial x}(y(x^2+y^2)^{-1/2}) = -xy(x^2+y^2)^{-3/2}$$

b) $\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\tan\theta\right)$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\tan\theta\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r\cos^2\theta}\right) = -\frac{1}{r^2\cos^2\theta}$$

3.　$x^2+y^2+z^2=1$ を条件として、$f(x,y,z) = xy^2z^3$ の最大値をもとめよ。

$$F = xy^2z^3 - t(x^2+y^2+z^2-1)$$

とおく。Lagrange の方法によって、つぎの方程式の解のなかに最大値を与える (x,y,z) がある。

$$F_x = y^2z^3 - 2tx = 0, F_y = 2xyz^3 - 2ty = 0, F_z = 3xy^2z^2 - 2tz = 0, F_t = -x^2-y^2-z^2+1 = 0$$

$xyz \neq 0$ なるものを求める。第 2 式から $t = xz^3$ これを第 1 式と第 3 式に代入して、

$$y^2z^3 - 2x^2z^3 = 0, 3xy^2z^2 - 2xz^4 = 0$$

よって、

$$2x^2 = y^2, 3y^2 = 2z^2$$

第 4 式から $3y^2 = 1$ よって、$x^2 = \frac{1}{6}, y^2 = \frac{1}{3}, z^2 = \frac{1}{2}$ をえる。f の最大値は $(x,y,z) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ などのときで $\frac{1}{12\sqrt{3}}$ となる。

4. 不等式 $\dfrac{3}{2} < \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 2$ を証明せよ。

授業でやった方法はよくなかったので、訂正する。まず、第 2 の不等式。$n^2 > n(n-1)$ をもちいると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le 1 + \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < 2$$

第 1 の不等式を示すには

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ge 1 + \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} > \frac{3}{2}$$

面積の考えを用いる方法。でも授業の範囲外。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} > 1 + \int_2^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{3}{2}$$

おもしろい証明がある。与えられた級数の存在は、上限が存在することからわかっているので、その和を s とおく。各項 $1/n^2$ を n が $2, 3$ の倍数であるときに限定して、

$$s > 1 + \frac{1}{4}s + \frac{1}{9}s - \frac{1}{36}s$$

を得る。よって $\dfrac{2}{3}s > 1$ これより、$s > \dfrac{3}{2}$ を得る。(でも、これは技巧的すぎますね。参考のために説明しました。)
等比級数をもちいるには、工夫がいる。$n \ge 3$ にたいして $n \le 3(4/3)^{n-3}$ が成立する。等号は $n = 3, 4$ の場合のみ。帰納法の仮定のもとで $3(4/3)^{n-2} \ge 3(4/3)^{n-3}(4/3) = 4(4/3)^{n-3} \ge 3(4/3)^{n-3} + 1 \ge n + 1$ が成り立つからである。この結果によって

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ge 1 + \frac{1}{4} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{9}{16}\right)^{n-3} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\frac{1}{1 - 9/16} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{16}{63} > \frac{3}{2}$$