1　距離

1.1　距離空間

議論の対象を明確にするために、対象が属する空間を予め設定する必要がある。抽象的にはそれはある集合と考えて良い。しかし単なる集合であれば、要素間の関係が不明であるため、議論に深さを望めない。もっとも、単純な関係として距離の概念がある。すなわち近さあるいは遠さを計る尺度である。空間 X における距離 d はつぎの公理によって定義される正の実数値をとる関数である。

D1)　$d(x,y)=0$ ならば $x=y$　　またこの逆も成立する。

D2)　$d(x,y)=d(y,x)$

D3)　$d(x,y)+d(y,z)\geq d(x,z)$

ここで x,y,z は空間の任意の点を表す。もちろん同じものであってもよい。D3) は三角不等式とよばれるもの。三角形の一辺の長さは他の 2 辺の長さの和より小さいということを思い起こしてもらいたい。

例

1.　X は地点 x,y,z,w からなる空間で xy,xz,yw,zw は道でつながれていて、ほかに道はないとする。道をてくてく歩くと、それぞれ行きも帰りも同様に 10 m, 21 m, 43 m, 17 m かかる。2 つの地点間の距離を一方から他方に達するために要する最小の時間で定義する。

2.　平面上の半径 1 の円周もこめた円盤、閉円盤、全体を空間 X とする。2 つの閉円盤 A,B の間の間隙 $g(A,B)$ を一方の閉円盤の上の点ともう一方の上の閉円盤の点との距離で最小のものとして定義する。だから交わっていれば、間隙は 0 ということになる。しかし、これは距離の公理を満たしていない。そこで、つぎのように距離を定義する。いま、A,B を 2 つの閉円盤とする。A の点 a に対して、$g(a,B)$ を考えそれらの最大値を $d(A,B)$ と書き、距離を $d(A,B),d(B,A)$ のうちで大きい方とする。これを $h(A,B)$ で表す。h は距離の公理を満たす。$d(A,B)=0$ のとき、A は B に含まれている。このことに注意すれば条件 D1) はすぐにわかる。他の条件を検証することは君達に任す。

3.　5 つの 0, 1 からなる順序づけられた数の列全体を空間 X とする。2 つの数の列の間の距離を、異なる数字が与えられている位置の個数によって定義する。たとえば、$d(00101,10001)=2$ である。

4.　平面上の点全体を X とする。2 点 $(a,b),(c,d)$ の間の距離をつぎで定義する。

$$d((a,b),(c,d)) = |a-c| + |c-d|$$

1.2　開集合と閉集合

X を距離空間とする。X に含まれる集合 U は、その各点を中心とするある円盤を含むとき、開集合といわれる。ここで円盤として円周を含まないものを考えている。しかし実際には円周の一部が含まれているとしてもこの条件は同じことを意味することになる。なぜなら、半径をすこし小さくすればよいのだから。たとえば、中心 x で、半径 $1/2$ の円盤とは、

$$d(x,a) < 1/2$$

を満たす点 x 全体のことである。U を X の開集合とするとき、その補集合 $X \setminus U$ を閉集合という。すなわち、F が閉集合であるとは、F に属さない任意の点に対して、それを中心とするある円盤があり、その円盤のうえのどの点も F に属さないようにできるときにいうのである。補集合 $X \setminus U$ とは、X の点で U にふくまれないもの全体のこと。だから、F が X の閉集合であるとき、その補集合は開集合になる。開集合全体はつぎのような性質をもつ。

O1)　U, V が開集合であれば、U と V の共通部分も開集合である。

O2)　$U_1, U_2, \ldots$ を開集合の列であるとする。このとき、それらのどれかに含まれる点全体

$$\bigcup U_i = U_1 \cup U_2 \cup \cdots$$

も開集合である。

O3)　なにもないというのもひとつの集合と考え、それを空集合というが、空集合は開集合である。また X 自身も開集合である。

閉集合全体についてはつぎの性質がある。

F1)　U, V が閉集合であれば、U と V の共通部分も閉集合である。

F2)　$U_1, U_2, \ldots$ を閉集合の列であるとする。このとき、それらの共通点全体

$$\bigcap U_i = U_1 \cap U_2 \cap \cdots$$

も閉集合である。

F3)　なにもないというのもひとつの集合と考え、それを空集合というが、空集合は閉集合である。また X 自身も閉集合である。

だから、とくに空集合と空間 X は開集合であり、閉集合でもある。

例

1. 円盤は開集合である。
2. 平面上の有限個の点からなる集合は閉集合である。
3. 平面上の曲線のグラフは閉集合である。
4. 数直線上の開区間は開集合で、閉区間は閉集合である。

1.3　連続性

2 つの距離空間 X, Y の間の関数 $f : X \to Y$ はつぎが成立するとき連続であるといわれる。Y の任意の開集合 U に対して、その逆像 $f^{-1}(U)$ は Y の開集合である。ここで $f^{-1}(U)$ は $f(x)$ が U に属するような点 x 全体からなる集合である。このことを距離関数でいいあらわせば、つぎのようになる。

$$\lim_{d(x,a)\to 0} d'(f(x), f(a)) = 0$$

d, d' は X, Y における距離を示す。X のある点に向かって近付いていくと、Y においてながめれば、その像に近付いている姿がみえるというわけである。

連続の定義を閉集合を用いて述べることもできる。実際 $f : X \to Y$ が連続であるとは、Y の任意の閉集合 F に対してその逆像 $f^{-1}(F)$ が閉集合になる、と定義することができる。連続の議論をするとき、その場にもっとも適切な定義を用いると、議論が鮮明になることが多い。いま述べた 3 つの定義が同じことを意味していることはみなさんが考えてください。ちょっと難しいかもしれません。

例

1. 平面上の点 (x, y) に対して点

$$(x - 2y, -x + 2)$$

を対応させる関数は連続である。距離と普通のものを考える。

2. 平面上の点 (x, y) に対して数直線上の点 x を対応させる。これも連続。
3. 数直線上の点 x に対して数直線上の点 $x^2 + 3$ を対応させる。これも連続。

2　完備性

2.1　完備距離空間

有理数全体を **Q** と書く。実数全体を **R** と書く。実数は有理数によって近似される数として定義される。もっと厳密にいえば、実数が満たすべき性質（これを公理のひとつとして採用する）として完備性がある。

ある距離空間の無限の点列 $\{a_n\}$ がある点 a に収束するとは、どのように $\epsilon > 0$ をとっても、ある番号 n_0 以上の任意の番号 n に対して

$$d(a, a_n) < \epsilon$$

が成立するときにいう。このとき、

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

と書く。a をこの点列の極限点（数のときは、極限値）という。すなわち a の近くに $\{a_n\}$ がある番号から先すべて集まっているのである。点列 $\{a_n\}$ が Cauchy 列であるとは、どのように $\epsilon > 0$ をとっても、ある番号 n_0 があって、n_0 より大きなすべての m, n に対して

$$d(a_m, a_n) < \epsilon$$

が成立するときにいう。とにかく密集しているという状況が想像されるだろう。

命題　収束する点列は Cauchy 列である。

例

1. $\{n\}$ は収束しない。
2. $\{1/n\}$ は 0 に収束する。
3. $\{a_n\}$ をつぎのように定義する。

$$a_n = \frac{1}{2}\left(a_{n-1} + \frac{2}{a_{n-1}}\right), \quad a_1 = 1$$

この数はすべて有理数であるが、$\lim a_n = \sqrt{2}$ になり、極限の値は有理数ではない。

4. $(1 + 1/n)^n$ は有理数の範囲で収束しない。この極限の値は e と書かれる。

$$\mathrm{e} = 2.718281828459045235360\ldots$$

空間 R の任意の Cauchy 点列が必ず収束するとき、R は完備であるといわれる。

公理　実数全体 **R** は絶対値からつくられる距離に関して完備距離空間である。

2.2 P

平面上の点全体を $\mathbf{P}$ と書くことにする。$\mathbf{P}$ の点は $(a,b),\ (a,b\in\mathbf{R})$ という形をしている。距離として

$$d((a,b),(c,d))=\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}$$

を採用する。これによって $\mathbf{P}$ は距離空間になるが、

定理　$\mathbf{P}$ は完備距離空間である。

いま (a_n,b_n) を Cauchy 列であるとしよう。定義をそのまま書くと、任意の $\epsilon>0$ に対して、ある番号 n_0 があって、どのように $m,n>n_0$ をとっても

$$\sqrt{(a_m-a_n)^2+(b_m-b_n)^2}<\epsilon$$

が成立する。左辺は $|a_m-a_n|,|b_m-b_n|$ より小さい。したがって数列 $\{a_n\},\{b_n\}$ はともに Cauchy 列である。実数の性質からそれらは極限値 a,b をもつ。

$$\sqrt{(a-a_n)^2+(b-b_n)^2}\le|a-a_n|+|b-b_n|$$

であるから、点列 $\{(a_n,b_n)\}$ は点 (a,b) に収束する。

3 連結性

3.1 連結

空間 R が連結であるとは、それ自身と空集合以外に開集合かつ閉集合であるものがないときにいう。部分空間に対しても連結性は定義される。S を R の部分集合であるとする。S における開集合とは R における開集合と S との共通部分のことをいう。これによって S にも近さという概念をもたらすことができる。R が距離空間であるとき、R における距離関数を S における距離関数と考える。このやりかたによって得られる開集合の概念は一般的な導入によるものと同じものである。近さをともに考えに入れた部分集合を部分空間ということにする。R の部分空間 S が連結であるとは、S が空間として連結であるときにいう。

R が連結であるということはつぎのように言い換えられる。R を２つの空でない、交わりのない開集合の和であらわすことはできない。

証明　R が連結であるとする。いま、U, V を R の空でない開集合で

$$R = U \cup V, \quad U \cap V = \varphi$$

であるとしよう。すると $V = R \setminus U$ は閉集合になる。仮定から、V はまた開集合であったから、$V = \varphi$ でなければならない。これははじめの取り方に反する。逆に、R は連結でないと仮定しよう。ある空でない開かつ閉の集合 $U \neq R$ がある。$V = R \setminus U$ もまた、空でない開かつ閉の集合である。そして、上述のような式が得られる。

3.2　連結成分

距離空間 R が与えられたとき、それは一般に連結ではない。全空間は連結な部分空間に分割される。状況をもう少し詳しく説明しよう。まず一点 x からなる部分空間は連結である。一点は２つの開集合に分割されることはないからである。その点をふくむ連結な部分集合 A, B が２つ与えられたとしよう。すると $A \cup B$ は連結である。なぜならば、U, V を空でない開集合として

$$A \cup B \subset U \cup V, \quad U \cap V = \varphi$$

が成り立つとする。もちろん

$$A \subset U \cup V, \quad B \subset U \cup V$$

であるから、$A \subset U$ または $A \subset V$ が成立する。B に対しても同様である。場合を分けて考えれば、事態がおかしくなることがわかる。

だから x を含む最大の連結集合がある。この集合に含まれない点についてもどうようのことを行なう。そして、どんどん連結集合をつくっていくと、R はこのような連結集合によって完全におおわれることになる。この連結集合たちを R の連結成分という。

3.3　弧状連結

区間 $[0,1]$ から空間 R への連続な関数を道という。$f : [0,1] \to R$ が道であるとき、$f(0), f(1)$ をそれぞれ始点、終点という。あわせて端点という。空間 R の部分空間 S のどの２点も S の中を通るある道によって結ばれるとき、S は弧状連結であるといわれる。弧状連結であれば、連結である。なぜならば、空でない開集合 U, V で

$$S \subset U \cup V, \quad U \cap V = \varphi$$

になったとしよう。x を S の一つの点とする。x は U の点でもあるとしてよろしい。y を S の他の点とする。仮定によれば、S の中で x, y を結ぶ道が存在する。それを $f : [0, 1] \to S$ と書く。$f(0) = x, f(1) = y$ としている。いま y は U の点ではないとしてみよう。すなわち V の点であるとしてみよう。はじめて U の点でないような $f(a)$ がある。(実数の性質と、連続関数の定義から保障される。) $t < a$ では $f(t)$ は U の点になっているのである。ところで、V は開集合であるから、a の十分近くの点の f による像は V の中にある。しかし、これはおかしい。だから、y も U に入ってしまう。y は任意にとれるので、$S \subset U$、これがわれわれの主張であった。

われわれの空間は距離空間であった。この場合、連結性と弧状連結性は同値になる。

4　フラクタルの空間

4.1　compact sets

以下では空間 $\mathbf{P}$ を扱う。点の集まりとしては平面上の点全体とし、距離としてユークリッドの距離を考えるということである。$\mathbf{P}$ のなかの部分空間で有界な閉集合を compact 集合という。有界とは、ある一定の点とその集合の任意の点との距離がある定まった値を越えないということを意味する。すなわち、ある点を中心とする円盤にすっぽり含まれてしまうということ。compact sets の特徴のひとつとして

命題　K を compact とする。K の点からなる無限点列は、K の点に収束する無限部分点列を含む。

証明は $\mathbf{P}$ の完備性に基づく。

例　compact でない例を上げよう。

$$A = \{(x, y) \mid y = x^2\}$$

という集合は閉集合であるが、compact でない。A の中の点列

$$a_n = (n, n^2) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

は、どのように無限部分点列をとっても、A の中に収束することはない。

連続関数との関係をのべよう。

命題　関数 $f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ は連続であるとする。もし、K が $\mathbf{P}$ の compact set であるならば、その像 $f(K)$ も compact である。

関数 f は $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$ のように２つの実数値連続関数 $f_1 : \mathbf{P} \to \mathbf{R}$, $f_2 : \mathbf{P} \to \mathbf{R}$ を使って表される。f_1, f_2 による K の像は有界である。すなわち、最大値と最小値が存在する。したがって、f による像 $f(K)$ も有界である。$f(K)$ が閉集合であることを示そう。それにはつぎの事実を用いる。

命題　$\mathbf{P}$ において F が閉集合であるためには、$\mathbf{P}$ の中で収束する F の点列の収束点は F の点である、ということが必要十分である。

話しをつづけよう。いま $f(K)$ の点列 $f(a_n)$ $(a_n \in K)$ が点 b に収束するものとしよう。a_n は K の点であるから、K の中に収束する部分点列 $a_{n'}$ が存在する。その収束点を a と書こう。a は K の点である。関数 f の連続性から、$f(a) = b$ を得る。このことは、b が $f(K)$ の点であることを示している。これで証明はおしまい。

4.2　フラクタルの空間

フラクタルは図形を扱うのであって、点そのものを扱うものではない。どのような図形を扱うか、それらの間のつながりをどのように考えるかをあきらかにしなければならない。以前、２つの閉円盤の間の距離を定義した。それを一般化したものが以下である。

定義　$\mathbf{P}$ の compact sets 全体を $\mathrm{H}(\mathbf{P})$ と書く。$\mathrm{H}(\mathbf{P})$ の２つの図形 A, B の間の距離をつぎのように定義する。まず $a \in A$ に対して $d(a, B)$ を b を B の点全体を走らせたときの $d(a, b)$ の最小値で定義し、$d(A, B)$ は $d(a, B)$ の最大値であるとする。そして $h(A, B)$ を $d(A, B), d(B, A)$ のうちで大きい方とする。さて、$h(A, B)$ が距離であることを示せねばならない。

命題　$h(A, B)$ は $\mathrm{H}(\mathbf{P})$ に距離を与える。

$\mathbf{P}$ 上の距離 $d(x, y)$ は連続関数であることをはじめにチェックしよう。これは、つぎの不等式からわかる。

$$d(x,y) - d(x',y') = d(x,y') - d(x',y') + d(x,y) - d(x,y') \leq d(x,x') + d(y,y')$$

$a \in A$ を止めて $d(a, b)$ という関数を B のうえの関数とみなせば、これは、連続であり、B が compact であるから、最小値をもつ。したがって $d(a, B) = d(a, b)$ となる $b \in B$ が存在する。この $b \in B$ は a に依存するから、a を b に移す関数 $\phi : A \to B$ が得られる。B は中心 a 半径 $d(a, \phi(a))$ の円盤にくっついている。このことから、

問題　関数 ϕ が連続であることがわかる。

つぎに $d(x, B)$ を $\mathbf{P}$ 上の関数とみなすとき、これも連続である。なぜなら

$$d(x,B) = d(x,x'), d(y,B) = d(y,y')$$

をみたす $x', y' \in B$ をとってくれば、

$$d(x,B) - d(y,B) = d(x,x') - d(y,y') \leq d(x,y) + d(x',y')$$

であり、$x \to y$ のとき、$x' \to y'$ であるからである。A は compact であるので $d(a, B)$ は最小値をもつ。
かくしてようやく $d(A, B)$ の存在が言えた。
$h(A, B)$ が距離の公理をみたすことを検証せねばならない。

さて、1) である。等号についての部分だけチェックすればよい。$A = B$ とすると、任意の $a \in A$ について、$d(a, B) = 0$ ということが B が閉集合であることから導かれる。したがって $d(A, B) = 0$ 同様に $d(B, A) = 0$ を得、$h(A, B) = 0$ となる。逆は大したことではない。
つぎに 2) である。これは全く論理的な話しで、述べるほどのことはない。
さいごに一番厄介な 3) である。A, B, C を $\mathrm{H}(\mathbf{P})$ の図形とする。A の任意の点を一つ定め、それを a とする。任意の $b \in B, c \in C$ に対して

$$d(a, B) \leq d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$$

が成立する。だから

$$d(a, B) \leq d(a, c) + d(c, B) \leq d(a, c) + d(C, B)$$

であり、

$$d(a, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

よって、

$$d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$$

同様に

$$d(B, A) \leq d(B, C) + d(C, A)$$

これらから、$h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$ を得る。

5　変換

5.1　アフィン変換

P からそれ自身への関数

$$f(x, y) = (a_1x + a_2y + c_1, a_3x + a_4y + c_2)$$

をアフィン変換という。$a_1, a_2, a_3, a_4, c_1, c_2$ は定数である。記号で

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

さらに、座標はよこに、ベクトルはたてに記述している。

二つのアフィン変換を合成するとアフィン変換になる。このとき、一方は他方の逆変換という。

二つのアフィン変換を合成するとときには恒等変換になることがある。恒等変換とは (x, y) を (x, y) それ自身にうつす変換のこと。変換

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$$

がある変換の逆変換であるためには

$$ab' - a'b \neq 0$$

であることが必要十分である。この左辺を変換 f の行列式ということにする。変換の行列の行列式である。

行列式は面積の倍率にひとしい。

すなわち、ある平面上の図形をアフィン変換で他の図形に移すと、面積は行列式のぶんだけ倍になってしまう。行列式は負の値になるときがある。この場合には図形の向きが反対になっていることがわかる。面積の倍率として向きをも考慮にいれて、上のようないい方をする。

二つのアフィン変換の合成の行列式はその二つのアフィン変換の行列式の積にひとしい。

このため、変換の行列式の値が $-1, 1$ の間にあるとき、同じ変換を何回も繰り返しておこなえば、図形はどんどんペッチャンコになっていく。無限にやったとすると、0 になってしまう。

Report　たとえば、
$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$
というのを何回も繰り返してみよう。

　まず、四角形
$$(0,0),\ (1,0),\ (1,1),\ (0,1)$$
が一度の変換でどのようになるかをみると、
$$(1,-1),\ (2,-2/3),\ (5/2,1/3),\ (3/2,0)$$
となる。２度目以降は省略。とにかくドンドンペッチャンコになっていくのを観察してほしい。

6 不動点

点集合 X からそれ自身への関数 f について、もしある点 $x \in X$ において $f(x) = x$ が成立するとき、x を関数 f の不動点という。 不動点は一般に存在するとは限らない。たとえば、S を単位円周とする。

$$S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

関数 $f : S \to S$ を逆時計回りに角度 α だけ回転する操作であるとする。ただし、α は点 $(1, 0)$ から長さ α だけ円周を辿って達する点を意味する。$\alpha < 0$ の場合も考え、この場合は時計回りに $|\alpha|$ の道のりをもつ円周上の点であるとする。円周を（逆時計回りに）一回転すると 2π だけの道のりとなる。したがって、円周上の点は、点 $(1, 0)$ からの道のりでそれを表すと、 2π の整数倍の差を除いて決まる。S 上の点 θ がいま考えている f の不動点であるとは

$$\theta + \alpha = \theta + 2n\pi$$

を満たす整数 n が存在するということを意味する。したがって、$\alpha = 2n\pi$ を得る。すなわち、不動点をもつ f は円周を何回か回転する操作に他ならない。

方程式 $-x^2 + x - t = 0$ を考えてみよう。t はパラメーターであるとする。この方程式は $-x^2 + 2x - t = x$ と書き換えてみれば、関数 $f(x) = -x^2 + 2x - t$ の不動点を与える方程式であると考えられる。方程式を普通の解の公式を用いてとけば、

$$x = -\frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4t}}{2}$$

を得る。したがって、不動点は $t > 1/4$ のとき存在しない。$t = 1/4$ のとき、ただひとつ、$t < 1/4$ のとき、二つ存在する。解の公式を用いるのではなく、近似値を直接みつける方法がある。

簡単のため $t = 0.1$ とし、正の解の近似値をもとめよう。はじめに、$x_0 = 1$ とする。$x_1 = f(x_0)$ を計算すると、$x_1 = 0.9$ を得る。同様にして、

$$x_2 = f(x_2) = 0.89, \quad x_3 = 0.8879, \quad x_4 = 0.8874, \quad x_5 = 0.8873$$

という値を得る。ここで簡単のため下４桁までに丸めた。近似値として 0.8873 をとることができそうである。

いまやった方法は反復法と呼ばれる。いつもこれがうまくいくとは限らない。たとえば、方程式 $x^2-x-1=0$ の近似解をみつけるのに、不動点をもとめる方程式

$$x^2-1=x$$

で同様のことを遂行すると、たとえば $x_0=0$ から出発すれば、

$$x_1=-1, \quad x_2=0, \quad x_3=-1, \quad \ldots\ldots$$

ということになって、一つの値に近付いてくれない。そこで、方程式を

$$g(x)=-0.5x^2+1.5x+0.5=x$$

と書き換える。$x_0=1.5$ から出発すれば、近似値として 1.61803 を得る。

このような変形は何を根拠にして得られるのか。とりあえず

$$\frac{g(a)-g(b)}{a-b}=-0.5(a+b)+1.5$$

という式をながめよう。もし、$1<a,b<2$ であれば、$2<a+b<4$ であるから、右辺は -0.5 より大きく、0.5 より小さい。したがって

$$|g(a)-g(b)|<0.5\,|a-b|$$

を得る。このことから、

$$|g(x_n)-g(x_{n-1})|<0.5^{n-1}(x_1-x_0)$$

を得る。よって $g(x_n)$ は Cauchy 列であることがわかり、収束列である。書き換えはこのような事情を満足するように配慮されたものであった。

$$\frac{g(a)-g(b)}{a-b}$$

は a,b の間のある点での曲線 $y=g(x)$ の接線の傾きに等しくなる。このような接線の傾きの絶対値が 1 より小さいというのが欲しい条件である。

7　縮小写像

距離空間 (X, d) からそれ自身への写像 f で

$$d(f(x), f(y)) \leq sd(x, y) \quad x, y \in X$$

を満たすものを縮小写像という。ここで、 s は 1 より小さい正数である。

たとえば、実数直線 $\mathbf{R}$ で $0 < a < 1, b$ を定数とし、$f(x) = ax + b$ がそうである。また、区間 $[0, 1]$ で

$$f(x) = -\frac{1}{6}x^2 + x$$

がそうである。チェックしてみよう。

X が完備距離空間で、$f : X \to X$ が縮小写像であるとき、f は不動点をひとつもち、しかもそれは唯一である。X の任意の点 x から出発しても f を何回も操作してやると、どんどんこの不動点に近付くことがわかる。

証明は前回のやり方にほぼ同じ。帰納的に

$$x_n = f^n(x), \quad x_0 = x$$

とおく。これは X のなかで点列をつくるが、この点列は Cauchy 列であることがつぎのようにしてわかる。$0 < r, 0 < n$ に対して

$$d(x_{n+r}, x_n) = d(f(x_{n+r-1}), f(x_{n-1})) \leq sd(x_{n+r-1}), x_{n-1}))$$

が成り立つ。この操作を n 回くりかえせば、

$$d(x_{n+r}, x_n) \leq s^n d(x_r, x_0)$$

そこで、三角不等式を用いて、

$$d(x_r, x_0)) \leq d(x_r, x_{r-1}) + d(x_{r-1}, x_{r-2}) + \cdots + d(x_1, x_0)$$

右辺の各項はすでに評価してあった。それをつかって、

$$d(x_r, x_0)) \leq (s^{r-1} + s^{r-2} + \cdots + 1)d(x_1, x_0) = \frac{1 - s^r}{1 - s}d(x_1, x_0) < \frac{1}{1 - s}d(x_1, x_0)$$

ここで、公式 $1 + s + \cdots + s^{k-1} = (1 - s^k)/(1 - s)$ を用いた。まとめて、

$$d(x_{n+r}, x_n) \leq \frac{s^n}{1 - s}d(x_1, x_0)$$

よって、n が無限に大きくなれば、左辺は r が何であっても 0 に近付く。これで、点列 $\{x_n\}$ が Cuachy 列であることが示せた。空間 X は完備であったので、この点列はある点 u に収束する。このことは不動点の存在をも示している。ほかに、不動点の候補 v があったとしよう。$d(u,v) > 0$ とすると、

$$d(u,v) = d(f(u), f(v)) \leq sd(u,v) < d(u,v)$$

ということになっておかしい。だから $d(u,v) = 0$ すなわち、$u = v$ 。

7.1 縮小アフィン変換

R や区間のような一次元の世界での縮小写像は比較的扱い易い。**P** の場合にはどうか。とくに、アフィン変換について考えてみる。話は普通の線形変換

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

についてだけ考えればよい。点 (x,y) が単位円周上を動くとき、$\left|A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|$ は compact であるから、最大値をとる。その最大値を A の norm といい、$||A||$ と書く。するとどのような点 (x,y) に対しても、

$$\left|A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right| \leq ||A|| \left|\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right|$$

が成り立つ。したがって、行列 A で定義される線形変換が縮小的であるためには、$||A|| < 1$ であることが必要充分である。では、$||A||$ はどのようにしてもとめるのであろうか。それについてはつぎの定理がある。

定理　${}^tAA$ の固有値の大きい方を α とすると、$||A|| = \sqrt{\alpha}$ となる。

　定理に出てきた記号 ${}^tA$ は A の転置行列を表す。$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき、${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ である。つぎの行列は縮小写像を与えるだろうか。この定理を使ってしらべてみよう。

Report

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 1 & 0.3 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

8　フラクタルの空間上の縮小写像

8.1　IFS

$\mathbf{P}$ に対して距離空間 $(H(\mathbf{P}), h)$ が定義された。$H(\mathbf{P})$ は $\mathbf{P}$ の中の compact sets 全体からなる集合で、h は 2 つの compact 部分集合の間の距離であった。

『$\mathbf{P}$ からそれ自身への縮小写像は $H(\mathbf{P})$ からそれ自身への縮小写像になる』

ことを示そう。

$f : \mathbf{P} \to \mathbf{P}$ を縮小写像であるとする。

$$|f(x) - f(y)| \leq s\,|x - y|$$

s は $0 < s < 1$ を満たす定数である。$\mathbf{P}$ の compact set B に対して、$f(B)$ は B の f による像を表す。

$$f(B) = \{f(b)\ ;\ b \in B\}$$

縮小写像は連続であるから、$f(B)$ は $\mathbf{P}$ の compact set になる。したがって B にたいして $f(B)$ を対応づける対応は $H(\mathbf{P})$ からそれ自身への写像である。つぎに、距離について調べる。B, C を $\mathbf{P}$ の compact sets とする。$h(f(B), f(C))$ は $d(f(B), f(C))$ と $d(f(C), f(B))$ のうち大きい方であった。$d(f(B), f(C))$ は $d(f(b), f(C)),\ b \in B$ のうちで最大ものである。そして $d(f(b), f(C))$ とは、$|f(b) - f(c)|,\ c \in C$ のうち最小のものである。仮定から

$$d(f(b), f(c)) \leq sd(b, c) \qquad (d(b, c) = |b - c|)$$

である。定義の道筋を逆にたどっていけば目的の不等式を得られる。実際、

$$d(f(b), f(C)) \leq sd(b, C)$$

$$d(f(B), f(C)) \leq sd(B, C)$$

であるから、

$$h(f(B), f(C)) \leq sd(B, C)$$

この証明から、$f : H(\mathbf{P}) \to H(\mathbf{P})$ は同じ縮小度 s をもつ縮小写像であることがわかる。

定義　$w_1, w_2, \ldots, w_n$ を $\mathbf{P}$ からそれ自身への縮小写像であるとする。w_i の縮小度を s_i とし、s でそれらの最小値を表す。このとき、$\{w_i\ ;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ を縮小度 s の **IFS** という。

8.2 attractor

つぎの定理が成立する。

定理　$\{w_i\ ;\ i=1,2,\ldots,n\}$ を IFS とする。$H(\mathbf{P})$ からそれ自身への変換 W を

$$W(B)=\bigcup_{i=1}^{n} w_i(B) \qquad (B\in H(\mathbf{P}))$$

で定義する。これは縮小写像になる。したがって、それは唯一の不動点 A をもつ。

$$A=W(A)=\bigcup_{i=1}^{n} w_i(A), \qquad A=\lim_{k\to\infty} W^k(B) \quad (B\in H(\mathbf{P}))$$

この定理によって存在が保証された集合 A を IFS $\{w_i\ ;\ i=1,2,\ldots,n\}$ の attractor という。

証明のためには $H(\mathbf{P})$ が完備距離空間になることを示す必要がある。完備性の証明は長くかかるのでここでは省略する。Barnsley の本を見て下さい。基本だけ述べておきます。A_i を $H(\mathbf{P})$ の Cauchy 列とすると、$a_i\in A_i$ でつくられる点列をうまくとれば、$\{a_i\}$ が $\mathbf{P}$ における Cauchy 列になり、このようにつくられる Cauchy 列の極限点全体は $H(\mathbf{P})$ の元となる。そして $\lim_{k\to\infty} A_k=A$ を得る。

W の縮小性について説明するために距離 h の性質を一つ挙げる。

B,C,D,E を $\mathbf{P}$ の compact sets とすると、

$$h(B\cup C, D\cup E)\le h(B,D)\vee h(C,E)$$

ここで $\vee$ はどちらか大きい方ということを意味する。

これはつぎのことからすぐに出てくる。

$$d(B\cup C, D)=d(B,D)\vee d(C,D)$$

実際、左辺は $d(x,D),\ x\in B\cup C$ 全体の最大値であるから、ある $y\in B\cup C$ で

$$d(B\cup C,D)=d(y,D)$$

したがって、$d(B\cup C,D)\le d(B,D)\vee d(C,D)$ 逆の不等号が成立することは当たり前。

問題　証明を完結しよう。逆の不等号が成立することを示そう。

さて、B, C を $\mathbf{P}$ の compact sets とする。

$$\begin{aligned} h(W(B), W(C)) &= h(w_1(B) \cup w_2(B) \cup \cdots, w_1(C) \cup w_2(C) \cup \cdots) \\ &\leq h(w_1(B), w_1(C)) \vee h(w_2(B), w_2(C)) \vee \cdots \\ &\leq s_1 d(B, C) \vee s_2 d(B, C) \vee \cdots \\ &\leq s d(B, C) \end{aligned}$$

より W は縮小度 s の縮小写像であることがわかる。

9 フラクタルを計算する

9.1 Sierpinski triangle

IFS としてつぎの３つのものを取り扱おう。

$$
\begin{aligned}
w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
w_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \end{pmatrix} \\
w_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

これらを表で表そう。

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0.5	0	0	0.5	1	1	0.33
2	0.5	0	0	0.5	1	50	0.33
3	0.5	0	0	0.5	50	50	0.34

p は確率を示す。というよりむしろ採用率といったほうがよい。これはつぎのように決められる。w_i に対する確率を p_i とするとき、

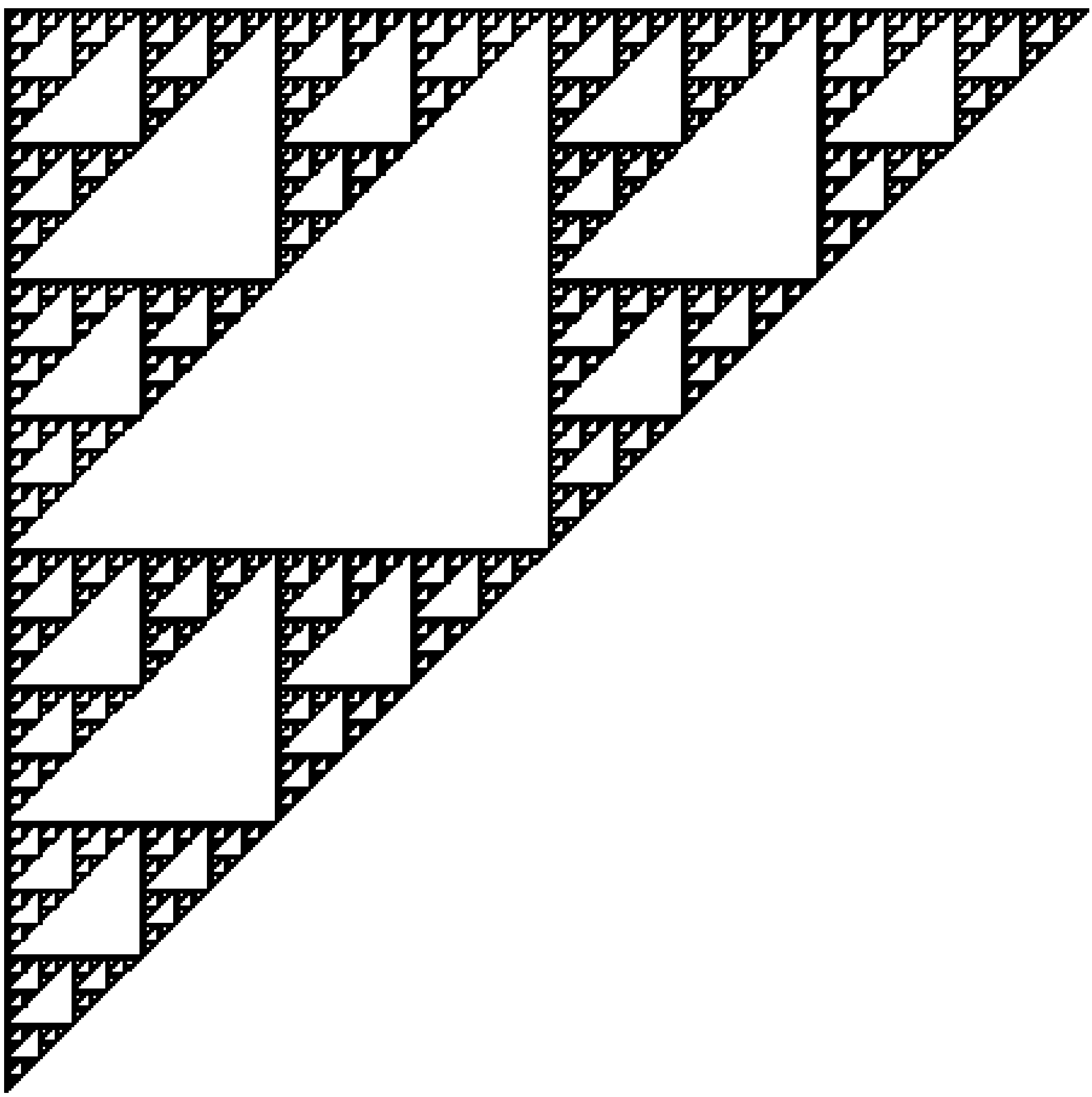
$$p_i \approx \frac{|\det A_i|}{\sum_{i=0}^{3} |\det A_i|}$$

A_i は w_i に対応する線形変換の行列を示す。$\approx$ は大体という意味。このような表を IFS コードという。いま与えた IFS code を Bernsley は *IFS code for a Sierpinski triangle* といっている。

$A(0)$ を $(1,1),(1,100),(100,1)$ を３頂点とする直角三角形とする。W を w_1,w_2,w_3 からつくられる $H(\mathbf{P})$ のなかの変換とする。

$$A(1) = W(A(0)), \ldots, A(n) = W(A(n-1)), \ldots$$

によって図形 $A(n)$ をどんどんつくっていく。すると、つぎの図のようになる。



9.2 Fern

つぎの code は *IFS for a Fern* とよばれるものの一つ。

w	a	b	c	d	e	f	p
1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
2	0.85	0.04	-0.04	0.85	0	1.6	0.85
3	0.2	-0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
4	-0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

Sierpinski triangle では確率を用いなかった。ここでは確率を用いて attractor をつくる。点 $x \in \mathbf{P}$ に対してつぎの点を

$$\{w_1(x), w_2(x), w_3(x), w_4(x)\}$$

の中から採用率 p_i で $w_i(x)$ を選ぶのである。採用率を行使するとき、外見上できるだけあからさまでないようにする。このために乱数が用いられる。

10　凝縮集合

$\mathbf{P}$ はいままで通りのユークリッド平面、$H(\mathbf{P})$ は $\mathbf{P}$ における compact sets 全体とする。C を compact set とするとき、変換 $w_0 : H(\mathbf{P}) \to H(\mathbf{P}),\ w_0(B) = C$ for all $B \in H(\mathbf{P})$ を凝縮変換といおう。C は凝縮集合といわれる。このとき、w_0 は縮小率 0 の縮小写像である。そして集合 C はその唯一の不動点である。

$\{w_1, \ldots, w_n\}$ を縮小率 s の IFS とする。w_0 を凝縮写像であるとするとき、$\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ を凝縮をもつ縮小率 s の双曲的 IFS という。

凝縮をもつ IFS に対して

定理　$\{w_0, w_1, \ldots, w_n\}$ を凝縮をもつ縮小率 s の双曲的 IFS とする。このとき、変換

$$W(B) = \bigcup_{k=0}^{n} w_k(B), \qquad B \in H(\mathbf{P})$$

は縮小率 s の $H(\mathbf{P})$ からそれ自身への縮小写像である。その不動点は

$$A = W(A) = \bigcup_{k=0}^{n} w_k(A)$$

を満たし、任意の $B \in H(\mathbf{P})$ に対して $A = \lim_{h\to\infty} W^h(B)$ を満足する。
(証明はまえとまるで同じ。)

たとえばつぎの変換

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.75 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.25 \\ 0 \end{pmatrix}$$

をみよう。$\{w_0, w_1\}$ は凝縮をもつ双曲的 IFS である。

問題

$$w_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の場合にはどうなるか。

問題　実数直線上で凝縮集合を $[0, 1]$、変換を $w_1(x) = \dfrac{1}{2}x + 2$ とするとき、何が起きるか。

```
DEF f(x)=x^3-3*x+1   %definition of function
SQR(a^2+b^2)       %square root function
OPTION ANGLE DEGREES         %angle
PRINT ACOS((b^2+c^2-a^2)/(2*b*c))     %for 0\leq t\leq 180
PRINT PI, MAXNUM    % \pi  and maximum number usable in Basic
PRINT RND
RANDOMIZE      %different issues
SET WINDOW -4,4,-4,4          %window setup
DRAW GRID(90,1)         %grid in window
PLOT LINES: x,f(x);
PLOT LINES: x1 , y1 ;
PLOT LINES: x2 , y2          %successive drawing
PLOT POINTS: x,y
MOD(n,3)=0       %modulus

10 LET A=0       %do-loop
20 DO
30    LET A=A+1
40    PRINT A
50 LOOP
60 END

10 LET A=0 %do-while-loop
20 DO WHILE A<100
30    LET A=A+1
40    PRINT A
50 LOOP
60 END

10 LET A=0 %do-until-loop
```

```
20 DO UNTIL A>=100
30    LET A=A+1
40    PRINT A
50 LOOP
60 END
```

```
10 PRINT "2×3=?" %exit do
20 DO
30   INPUT n
40   IF n=2*3 THEN EXIT DO
50   PRINT "残念，もう一度"
60 LOOP
70 PRINT "正解!"
80 END
```

```
10 DIM A(10)              %alignment from 1
20 LET A(4)=15
30 PRINT A(4)
40 END
```

```
100 DIM m(0 TO 10)          %matrix
110 MAT m=ZER
120 DO
130    INPUT n
140    IF n<0 THEN EXIT DO
150    LET i=INT(n/10)
160    LET m(i)=m(i)+1
170 LOOP
180 FOR i=0 TO 10
190    PRINT i*10;"～";i*10+9,m(i)
200 NEXT i
```

```
210 END
```

```
100 DIM s(2 TO 1000)  %eratusteneth
110 MAT s=ZER
120 FOR n=2 TO 1000
130    IF s(n)=0 THEN
140       PRINT n
150       FOR  k=n^2 TO 1000 STEP n
160          LET s(k)=1
170       NEXT k
180    END IF
190 NEXT n
200 END
```

```
10 OPTION BASE 0 %change to the initial 0 from 1
20 DIM A(4)
30 LET A(0)=7
40 MAT PRINT A
50 END
```

```
100 OPTION ANGLE DEGREES %exception
110 DEF f(x)=TAN(x)
120 SET WINDOW -180,180,-4,4
130 DRAW AXES(90,1)
140 FOR x=-180 TO 180
150    WHEN EXCEPTION IN
160       PLOT LINES: x,f(x);
170    USE
180       PLOT LINES
190    END WHEN
200 NEXT x
```

```
210 END
```

```
%%  external function
```

```
100 DECLARE EXTERNAL FUNCTION GCD
110 FOR x=1 TO 100
120    FOR y=x TO 100
130       IF GCD(x,y)=1 THEN
140          LET z=SQR(x^2+y^2)
150          IF INT(z)=z THEN PRINT x,y,z
160       END IF
170    NEXT y
180 NEXT x
190 END
200 EXTERNAL FUNCTION GCD(a,b)
210 DO
220    LET r=MOD(a,b)
230    IF r=0 THEN EXIT DO
240    LET a=b
250    LET b=r
260 LOOP
270 LET GCD=b
280 END FUNCTION
```

```
%%  external picture
```

```
10 DECLARE EXTERNAL PICTURE circle
20 OPTION ANGLE DEGREES
30 SET WINDOW -8,8,-8,8
40 DRAW circle
50 DRAW circle WITH SCALE(2)
```

```
60 DRAW circle WITH SCALE(3,2)
70 DRAW circle WITH SCALE(3,2)*SHIFT(3,4)
80 DRAW circle WITH SCALE(5,3)*ROTATE(60)
90 END
100 EXTERNAL PICTURE circle
110 OPTION ANGLE DEGREES
120 FOR t=0 TO 360
130    PLOT LINES:COS(t),SIN(t)
140 NEXT t
150 END PICTURE

%% subroutine

10 DECLARE EXTERNAL SUB solve
20 INPUT a,b,c
30 WHEN EXCEPTION IN
40    CALL solve(a,x,b,y,c)
50    PRINT x,y
60 USE
70    PRINT "解なし"
80 END WHEN
90 END
100 EXTERNAL SUB solve(a,x,b,y,c)
110 IF b=0 THEN
120    IF MOD(c,a)=0 THEN
130       LET x=c/a
140       LET y=0
150    ELSE
160       LET x=1/0            ! 例外を発生させる
170    END IF
180 ELSE
```

```
190     LET q=INT(a/b)
200     LET r=MOD(a,b)
210     CALL solve(b,u,r,v,c)
220     LET x=v
230     LET y=u-q*v
240 END IF
250 END SUB
```

%% built in functions

ABS(x) x の絶対値

SQR(x) x の非負の平方根

INT(x) x を超えない最大の整数

MOD(x, y) x を y で割った余り

CEIL(x) x 以上の最小の整数

IP(x) x の整数部分

FP(x) x の小数部分

ROUND(x, n)　x を小数点以下 n 桁に丸めた値

SGN(x) x の符号 (sign)。 x>0 のとき SGN(x)=1,　SGN(0)=0,　0 のとき SGN(x)=-1

指数・対数

EXP(x) 指数関数

LOG(x) 自然対数

LOG2(x) ２を底とする対数

LOG10(x) 常用対数

三角関数

SIN(x) 正弦関数 sine

COS(x) 余弦関数 cosine

TAN(x) 正接関数 tangent

CSC(x) 余割関数 cosecant

SEC(x) 正割関数 secant

COT(x) 余接関数 cotangent

ASIN(x) sin θ＝x となるθ。ただし，$-\pi/2 \leqq \theta \leqq \pi/2$

ACOS(x) cos θ＝x となるθ。ただし， $0 \leqq \theta \leqq \pi$

ATN(x) tan θ＝x となるθ。 ただし，$-\pi/2 < \theta < \pi/2$

ANGLE(x,y) 原点と点(x,y)を結ぶ半直線がx軸の正の向きとなす角。

ただし，$-\pi <$ ANGLE(x,y) $\leqq \pi$

双曲線関数

TANH(x) 双曲線正接関数

SINH(x) 双曲線正弦関数

COSH(x) 双曲線余弦関数

乱数

RND 疑似乱数，$0 \leqq$ RND < 1

時刻

TIME その日の午前0時からの経過秒数

その他

PI 円周率πの近似値

MAXNUM 表現可能な最大の正の数

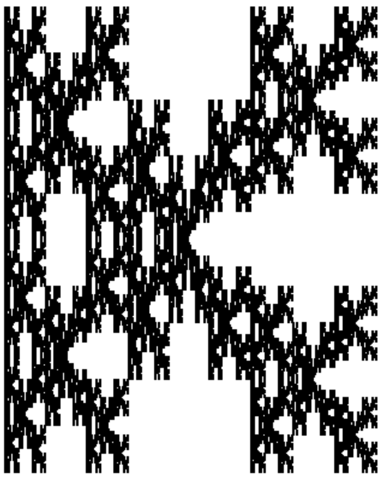
EPS(x) xの直前，直後の数との差，および機械最小値のうちの最も大きい数（数値の分解能を意味する)。

MAX(a,b) a,bのうち大きい方

MIN(a,b) a,bのうち小さい方

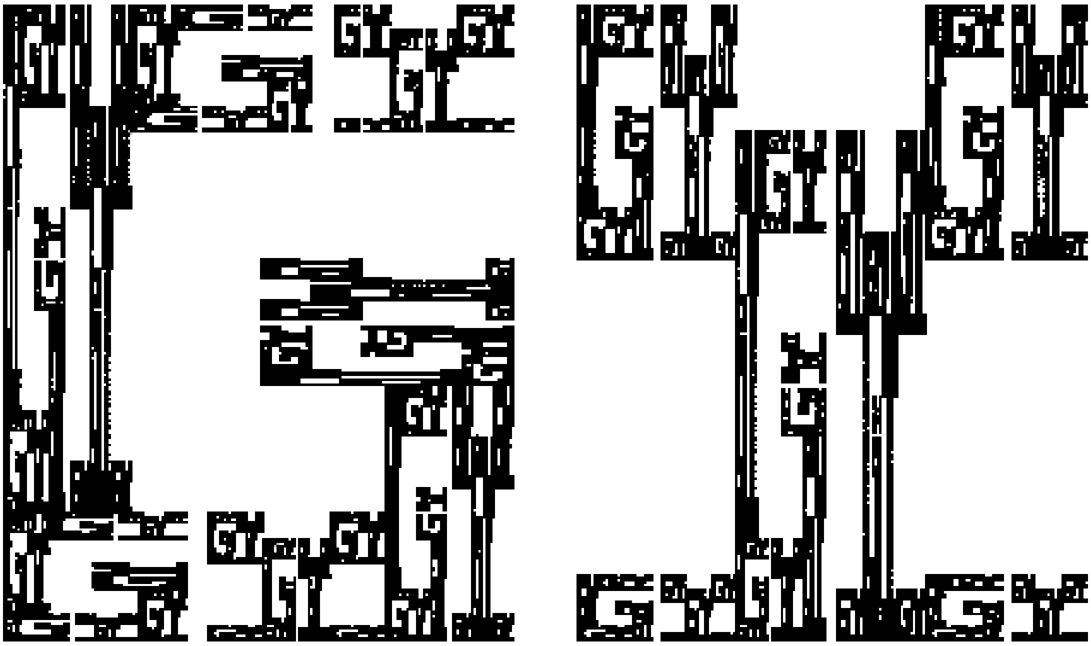
11　文字K

```
set window -10,120,-10,120
set point style 1
set line style 1
option angle degrees
picture ell(n)
   if n=1 then
      plot lines: 0,0;80,0;80,100;0,100;0,0
   else
      draw ell(n-1) with scale(0.33,0.5)
      draw ell(n-1) with scale(0.33,0.5)*shift(0,50)
      draw ell(n-1) with scale(0.33,0.6)*shift(80*0.33,20)
      draw ell(n-1) with scale(0.34,0.4)*shift(80*0.66,60)
      draw ell(n-1) with scale(0.34,0.4)*shift(80*0.66,0)
   end if
end picture
draw ell(8)
end
```



12 initial GY

```
set window -10,180,-10,180
set point style 1
set line style 1
option angle degrees
picture gy(n)
   if n=1 then
      plot points:50,50
   else
      draw gy(n-1) with scale(60/170,1/5)
      draw gy(n-1) with scale(20/170,4/5)*shift(0,20)
      draw gy(n-1) with scale(60/170,1/5)*shift(20,80)
      draw gy(n-1) with scale(20/170,2/5)*shift(60,0)
      draw gy(n-1) with scale(20/170,2/5)*rotate(90)*shift(80,40)
      draw gy(n-1) with scale(30/170,4/5)*shift(115,0)
      draw gy(n-1) with scale(25/170,2/5)*shift(90,60)
      draw gy(n-1) with scale(25/170, 2/5)*shift(145,60)
      draw gy(n-1) with scale(25/170,1/10)*shift(90,0)
      draw gy(n-1) with scale(25/170,1/10)*shift(145,0)
   end if
end picture
draw gy(8)
END
```


GY