1 Painlevé I

微分体 K は $C_K = \mathbf{C}$ をみたし、元 $x,\ Dx = 1$ をもつと仮定する。K 上の微分方程式

$$y'' = 6y^2 + x$$

の解 y は K 上の１階代数的微分方程式を満足しないと仮定する。$R = K\langle y\rangle$ と置く。$C_R = \mathbf{C}$ である。

S/R を $C_S = \mathbf{C}$ をみたす微分拡大で、ϵ を不定元として、形式的巾級数環 $S[[\epsilon]]$ につぎのように微分を導入する。

$$D\sum \frac{a_n}{n!}\epsilon^n = \sum \frac{Da_n}{n!}\epsilon^n \qquad (a_n \in S)$$

y の「ϵ 近傍」 $y(\epsilon) = \sum \frac{y_n}{n!}\epsilon^n \in S[[\epsilon]]$ が y と同じ方程式をみたすものとして、

$$y_1'' = 12yy_1, \quad y_2'' = 12yy_2 + 12y_1^2, \quad \ldots$$

これらは、つぎのようにしても得られる。$y'' = 6y^2 + x$ に形式的に d を作用させ、$dy'' = 12ydy$ を得るが、dy を y_1 に置き換えて初めの式を得る。つぎに、さらに d を作用させ、$dy_1'' = 12ydy_1 + 12y_1dy$ を得る。dy, dy_1 を y_1, y_2 に置き換え、次式を得る。

$\Omega(R/K)$ において

$$D\begin{pmatrix} dy \\ dy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dy \\ dy' \end{pmatrix}$$

が成立する。$R^1/R,\ C_{R^1} = \mathbf{C}$ の生成元として、つぎの z_1, z_2, z_1' を採用する。

$$D\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 12y & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{pmatrix}, \quad z_1z_2' - z_1'z_2 = 1.$$

これらは R 上代数的に独立である (後述)。

$\eta_1, \eta_2, \omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \Omega(R^1/K)$ をつぎによって定義する。

$$\eta_1 = z_2'dy - z_2dy', \quad \eta_2 = -z_1'dy + z_1dy',$$

$$\omega_1 = z_2'dz_1 - z_2dz_1', \quad \omega_2 = -z_1'dz_1 + z_1dz_1', \quad \omega_3 = z_2'dz_2 - z_2dz_2'.$$

すると、

$$D\eta_1 = D\eta_2 = 0,\ D\omega_1 = -12z_1z_2dy,\ D\omega_2 = 12z_1^2dy,\ D\omega_3 = -12z_2^2dy$$

$$\begin{pmatrix} dy \\ dy' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ z_1' & z_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$$

を得る。対応して Der (R^1/R) の微分を

$$X_1 = z_1\frac{\partial}{\partial z_1} + z_1'\frac{\partial}{\partial z_1'} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}, \quad X_2 = z_2\frac{\partial}{\partial z_1} + z_2'\frac{\partial}{\partial z_1'}, \quad X_3 = z_1\frac{\partial}{\partial z_2}$$

によって定義する。これらは R^1 上 D と可換である。

$R^2/R^1,\ C_{R^2} = \mathbf{C}$ を f_0, f_1, f_2, f_3

$$Df_i = -12z_1^{3-i}z_2^i \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

で生成される微分拡大とする。f_i は R 上代数的に独立である (後述)。

2 trans.deg $R^1/R = 3$

R^1/R の微分 Galois 群が $SL_2(\mathbf{C})$ であることを示す。以下そうでないと仮定する。

このとき、方程式

$$w' = 12y - w^2$$

は R 上代数的な解 w をもつ。R 上の既約方程式を $F(w) = 0$ とする。F は $K[u, y, y']$ において既約であるとしてよい。

$$F(w, y, y') = 0.$$

ここで $Du = 12y - u^2$ とした。微分して

$$DF(w, y, y') = 0$$

F は既約だから $A \in K[u, y, y']$ で

$$DF = AF.$$

となるものがある。A は u に関して線形である。実際 weight function を

$$\omega(u^i y^j y'^k) = i + 2j + 3k$$

によって定義する。 $F \in K[u, y, y']$ に対して

$$F = \sum_{h=0}^{p} F_h, \quad F_p \neq 0, \quad F_h \in V_h,$$

V_h は重さ h の巾積によって生成される K-linear space である。$DF \neq 0$ であるとき、$\omega(DF) = \omega(F) + 1$ が成立する。

$DF = AF$ の重さを比較する。F の u に関する次数を m とすれば、DF は次数 $m+1$ をもち、F より重さが 1 大きい。よって、A は u に関して線形で、u の係数は $-m$ 。したがって

$$DF = (-mu + a)F \tag{1}$$

微分 D をつぎのように分割する。

$$D = X + Y + Z,$$

ここで

$$X = (12y - u^2)\partial/\partial u + y'\partial/\partial y + 6y^2\partial/\partial y', \quad Z = x\partial/\partial y',$$

Y は係数に D を作用させるものである。あきらかに

$$XV_{h-1} \subset V_h, \quad YV_h \subset V_h, \quad ZV_{h+3} \subset V_h.$$

が成立する。F の各成分については

$$XF_h + YF_{h+1} + ZF_{h+4} = (-mu)F_h + aF_{h+1}. \tag{*}$$

ここで $F_h = 0$ for $h < 0$ or $h > p$ とする。

F_h を求めるために準備する。

K 上の拡大体 $K(y, y', u)$ につぎの K 上微分 X を導入する。

$$Xu = 12y - u^2, \quad Xy = y', \quad Xy' = 6y^2$$

$R = K(y, y')$ および、$L = K(\gamma),\ \gamma = y'^2 - 4y^3$ と置く。

L は R において代数的に閉じている。

命題 1. $\overline{L}R = \overline{L}(y, y')$ の任意の素因子 P における局所一意化変数 τ に対して、$\nu_P(X\tau) = 0$ が成立する。

証明 $y'^2 = 4y^3 + \gamma$ を $\overline{L}$ 上の関係式とみる。$y_P = a \in \overline{L}$ の場合。$4a^3 + \gamma \neq 0$ ならば、

$$y = a + \tau, \quad y' = b + b_1\tau + \dots, \; b^2 = 4a^3 + \gamma \neq 0$$

を得る。よって、$X\tau = b + b_1\tau + \dots$ したがって主張が成立する。

$4a^3 + \gamma = 0$ の場合。

$$y = a + \tau^2, \quad y' = b\tau + b_1\tau^2 + \dots, \; b^2 = 12a^2 \neq 0$$

より、OK。

$y_P = \infty$ の場合。

$$y = \tau^{-2}, \quad y' = b\tau^{-3} + b_1\tau^{-2} + \dots, \; b^2 = 4$$

より、OK。

命題 1 より、$f \in R$ に対して、Xf は 1 位の極をもたないこと、$f \notin L$ ならば、Xf は必ず極をもつことがわかる。

$t = y'u - 6y^2, s = y't, k = 4y^3 + \gamma$ と置く。

$$Xt = -ut, \quad Yt = 0, \quad Zt = xu, \quad Xs^{-1} = k^{-1}$$

命題 2. もし $f \in R(u)$ が $Xf \in L$ を満たすならば、$f \in L$ である。

証明 上述の命題 1 を用いる。f の s に関する展開 $\sum_i f_i s^i, \; f_i \in L$ に X を作用させれば、

$$Xf = \sum_i \left(Xf_i - (i-1)k^{-1}f_{i-1}\right) s^i$$

よって

$$Xf_i - (i-1)k^{-1}f_{i-1} = 0 \quad (i \neq 0), \in L \quad (i = 0).$$

もし $f_i \neq 0$ となる負数 i があれば、最小のものを j とするとき、$Xf_j = 0$ を得、上記命題より、$f_j \in L$ を得る。そして $Xf_{j+1} - jk^{-1}f_j = 0$ より $f_j = 0$。これは矛盾。よって $Xf_0 \in L, f_0 \in L$ となる。$f_1 \in L$ を得る。$Xf_2 - k^{-1}f_1 = 0$ より $f_1 = 0, f_2 \in L$ 。以下同様に $f_i = 0 \; (i > 0)$ を得る。

さて、$h = p$ の場合。

$$XF_p = -muF_p.$$

$X(F_p/t^m) = 0$ であるから $F_p = ct^m$ なる $c \in L$ がある。よって、$c = c_0\gamma^k$ であり、$F_p = c_0\gamma^k t^m$ がある $c_0 \in K$ で成立する。k は非負正数である。$c_0 = 1$ としてよい。$p = 6k + 4m \geq 4$ であることに注意する。

$h = p - 1$ の場合。

$$XF_{p-1} = -muF_{p-1} + aF_p$$

よって

$$X(F_{p-1}/F_p) = a \in K \subset L,$$

命題 2 から $a = 0$ and $F_{p-1} = 0$ を得る。

$h = p - 2$ または $p - 3$ の場合。

$$XF_{p-2} = -muF_{p-2}, \quad XF_{p-3} + YF_{p-2} = -muF_{p-3},$$

よって、同様に $F_{p-2} = F_{p-3} = 0$ を得る。

$h = p-4$ の場合。

$$XF_{p-4} + ZF_p = -myF_p.$$

F_p の Z に関する対数微分をとれば、

$$ZF_p/F_p = kZ\gamma/\gamma + mZt/t = 2kxy'/\gamma + mxu/t) = X(2kxy/\gamma + mx/t)$$

よって、

$$X(F_{p-4}/F_p) + X(2kxy/\gamma + mx/t) = 0,$$

そして、L の元の重さは 6 の倍数であるから、

$$F_{p-4} = -(2kxy/\gamma + mx/t)F_p,$$

$p=4$ とすると $k=0, m=1$ そして $F = t-x$ であり、これは $Dt = -u(t-x)$ であるから矛盾。よって $p>4$ とする。

$h = p-5$ の場合。

$$XF_{p-5} - (2ky/\gamma + m/t)F_p = -muF_{p-5}.$$

よって

$$X(F_{p-5}/F_p) = 2ky/\gamma + my's^{-1}.$$

F_{p-5}/F_p を s に関して展開して、

$$\sum_{i=r}^{\infty} a_i s^i, \quad a_r \neq 0, \quad a_i \in R.$$

とすれば

$$\sum_{i=r}^{\infty} (Xa_i - (i-1)k^{-1}a_{i-1})s^i = my's^{-1} + 2ky/\gamma.$$

もし $r \leq -2$ とすれば、$Xa_r = 0$ よって $a_r \in L$ である。$Xa_{r+1} - rk^{-1}a_r = 0$ or my' および命題 1 より $r=0$ 矛盾。したがって、 $r=-1,\ Xa_{-1} = my',\ a_{-1} = my + c,\ c \in L$ を得る。

$$Xa_0 = -(my+c)k^{-1} + 2ky/\gamma$$

命題 1 より、このような a_0 は存在しない。矛盾。

3 trans.deg $R^2/R^1 = 4$

Ostrowski の定理 M を微分体で y_i をつぎをみたすものとする。

$$Dy_i \in M \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad C_{M(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \mathbf{C}$$

もし、y_i が M 上代数的従属であるならば、ある $c_i \in \mathbf{C}$ (not all zero) で

$$\sum c_i y_i \in M$$

なるものがある。

f_i が R^1 上代数的従属であると仮定する。Ostrowski の定理よりある $c_i \in \mathbf{C}$ (not all zero) で

$$f = \sum c_i f_i \in R^1$$

なるものがある。

$$Df = \sum c_i z_1^{3-i} z_2^i \neq 0$$

に X_3 を必要なら作用させ、

$$Df = z_1^3$$

としてよい。さらに X_3 を作用させれば、$DX_3 f = 0$、よって $c = X_3 f \in \mathbf{C}$ を得る。

$$g = f - \frac{cz_2}{z_1} \in R(z_1, z_1')$$

$DX_1 f = 3z_1^3$ であるから、$X_1 f - 3f = e \in \mathbf{C}$ であるが、

$$X_1 f - 3f = -\frac{5cz_2}{z_1} + X_1 g$$

より $c = 0$ を得る。$D(f + e/3) = z_1^3$ であるから、$e = 0$ として議論する。

$f = A/B,\ A, B \in R[z_1, z_1']$ を既約分数表示とすれば $X_1 f = 3f$ であるから

$$BX_1 A - AX_1 B = 3AB$$

これより $B|X_1 B, A|X_1 A$ したがって、A, B は斉次多項式であり total deg $A =$ total deg $B + 3$ が成立する。よって、$f = z_1^3 h$ とおけば、$v = \frac{z_1'}{z_1}$ とするとき $h \in R(v)$ であり、

$$Dh = -3vh + 1$$

h を v, y, y' に関する多項式の比によって表示すれば、前節のように矛盾を得る。