An application of the theory of strongly normal extensions

K. Nishioka

1 Introduction

Brownawell-Kubota, Acta Arith., 1977 の結果を説明する。
$C \supset \mathbf{Q}$ を代数的閉体、R は C の体拡大として有限次元であり、議論に出てくる元はすべて R に含まれているものとする。$D \in Der(R/C)$ を一つ固定する。R は D に関して微分体となる。$K \supset C$ を R の部分微分体とし、R/C の derivations 全体を $Der(R/C)$ と書き、その R-dual を微分加群 $\Omega_{R/C}$ と書く。$\Omega_{R/C}$ から R への R-準同形 f で $fd = D$ をみたすものが一意的に定まる。$Der(R/K)$ の各元 X に対して $[D, X] \in Der(R/K)$ が成立する。微分加群 $\Omega_{R/K}$ の加群内部準同形 D^1 が

$$(D^1\omega)(X) = D\omega(X) - \omega[D, X], \qquad X \in Der(R/K)$$

によって定義される (Lie derivative)。次がいえる。

$$D^1\phi_K = \phi_K D^1, \quad \text{on } \Omega_{R/C}$$

ここで，ϕ_K は $\Omega_{R/C}$ から $\Omega_{R/K}$ への自然な R-加群準同形である。

$$\phi_K d = d_K : R \to \Omega_{R/K}$$

D^1 について Rosenlicht の簡単な結果がある。もし，$a, b \in R$ が C 上代数的従属であれば，

$$D^1(adb) = d(aDb)$$

が成立する。これは d_K についても正しい。ϕ_K を作用させれば，このことは分かる。

2. R の元 u は，ある $a \in K$ で

$$(Du)^2 = a^2(4u^3 - g_2u - g_3)$$

をみたすとき，K 上 weierstrassian という。ここで

$$g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0, \quad g_2, g_3 \in C$$

である。g_2, g_3 をパラメターとする楕円曲線を A と書く。u が K 上 weierstrassian であるというのは $(u, v) \in A$ で $Du/v \in K$ ということである。$E = C(u, v)$ は C 上の楕円関数体である。K の微分拡大 $KE = K(u, v)$ は，いわゆる K の強正規拡大となる。強正規拡大については次の基本的事実がある。

Lemma 1(Kolchin) N/K を超越次数 1 の正規拡大とすると，N/K の種数は 0 または 1 に等しい。

3. **Lemma 2** u_i $(i = 1, 2)$ は K 上 weierstrassian で，K 上代数的従属であるならば，
$d_K u_i/v_i$ $(i = 1, 2)$ は $\mathrm{End}(A)_{\mathbf{Q}}$ 上線形従属である。

$E_i = K(u_i, v_i)$ とする．u_i のどれかが K 上代数的であれば，$d_K u_i/v_i = 0$，すなわち，命題にいう通り。以下，簡単のため，K は代数的閉であるとする。E_i/K は強正規拡大である．$E = E_1E_2/K$ は強正規である。また，Lemma 1 より，その種数は 1 に等しい。したがって，E/E_i は不分岐拡大である。E_i の第一種微分 $\omega_i = d_K u_i/v_i$ は R 上線形従属である：

$$\omega_2 = c\omega_1. \tag{1}$$

$D^1\omega_i = d_K(Du_i/v_i) = d_K a_i = 0$ であるから，D^1 を施せば，

$$D(c)\omega_1 = 0$$

よって，$c \in C$。K を複素数体と見なし，E_i, E に対応する Riemann 面を S_i, S で表す。S/S_i は covering surface である。S_1 における基本 cycle を γ_1, γ_2 とし，周期を

$$\pi_i = \int_{\gamma_i} \omega_1$$

とする。ある整数 n で $n\gamma_i$ の S への lifting γ_i' が cycle になるものがある。n として，$i = 1, 2$ に共通にとることができる。(1) を γ_i' で積分すれば，

$$m_{i1}\pi_1 + m_{i2}\pi_2 = cn\pi_i$$

を得る．ここで m_{ij} は有理整数である．この式は cn が $\mathrm{End}(A)$ であることを示している．

4.　定理 1　u_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は K 上 weierstrassian で，K 上代数的従属であるならば，$d_K u_i/v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ は $\mathrm{End}(A)_{\mathbf{Q}}$ 上線形従属である．

n に関する帰納法による．u_1 は K 上超越的としてよい。$E_1 = K(u_1, v_1)$ と置く。u_i $(i \geq 2)$ は E_1 上代数的従属であるから，帰納法の仮定により，

$$\sum_{i=2}^{n} \alpha_i d_{E_1} u_i/v_i = 0,\ \alpha_i \in \mathrm{End}(A)_{\mathbf{Q}}$$

という自明でない表示を得る．したがって，

$$\sum_{i=2}^{n} \alpha_i du_i/v_i \in R \otimes_{E_1} \Omega_{E_1/C}$$

であり，

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i du_i/v_i \in R \otimes_K \Omega_{K/C} \tag{2}$$

を得る。ここで，$\alpha_1 \in R$ である．$\alpha_1 \neq 0$ としてよい。ある $i > 1$ で $\alpha_i \neq 0$ となるものがある。それを，たとえば $i = 2$ としよう。L を K 上 u_i $(i > 2)$ すべてで生成される微分体とする。Lemma 2 によって，自明でない関係式

$$\beta_1 d_L u_1/v_1 + \beta_2 d_L u_2/v_2 = 0,\ \beta_i \in \mathrm{End}(A)_{\mathbf{Q}}$$

が得られるが，他方 (2) に ϕ_L を作用させて，

$$\alpha_1 d_L u_1/v_1 + \alpha_2 d_L u_2/v_2 = 0.$$

これより，$\alpha_1 \in \mathrm{End}(A)_{\mathbf{Q}}$ であることが分かる。

5.　定理 2　$K=C(x)$, $Dx=1$ で，$a_i \in C$ とすると，定理 1 の仮定の下で，自明でない関係式

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0, \quad \alpha_i \in \mathrm{End}(A)_{\mathbf{Q}}$$

が成立する。

定理 1 によって，自明でない関係式

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i d_K u_i/v_i = 0, \quad \alpha_i \in \mathrm{End}(A)_{\mathbf{Q}}$$

が成立する。これより，

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i du_i/v_i \in R \otimes_K \Omega_{K/C}.$$

したがって，ある $\beta \in R$ で

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i du_i/v_i = \beta dx。 \tag{3}$$

$$D^1 du_i/v_i = d(Du_i/v_i) = da_i = 0, \quad D^1 dx = 0$$

であるから，(3) に D^1 を施せば，$D\beta=0$。すなわち，$\beta \in C$。いま，たとえば，$\alpha_1 \neq 0$ としよう。C の拡大体 L で，u_1, x は L 上超越的であるが，代数的従属であり，他の u_i は $L(u_1, x)$ 上代数的であるようなものが存在する。M を K にすべての u_i, v_i を添加して得られる体とすると，それは，L 上の代数関数体である。このとき，(3) の左辺は M の第一種，右辺は第二種微分であるから，$\beta=0$ であり，(3) の左辺は 0 に等しい。

$$f du_i/v_i = Du_i/v_i = a_i$$

に注意して，(3) に f を作用させれば，

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i = 0$$

を得る。