

ベイズ統計

古谷知之

講義概要

- 確率は直感的にはわかりにくい
- 場合の数と組み合わせ
 - サイコロ
 - コイン
 - 壺・部屋割り
- 確率の定義
- 確率に関する様々な問題

確率は直感的にはわかりにくい

問題 1

Aさん・Bさん・Cさんの3人が3本のクジの中からそれぞれ1本ずつクジを引くとする。3本のうち1本だけが当たりクジである。

Aさんが最初にクジを引き、Bさんが次にクジを引き、最後にCさんがクジを引くとする。

このとき、誰が一番くじに当たりやすいか？

確率は直感的にはわかりにくい

問題 2

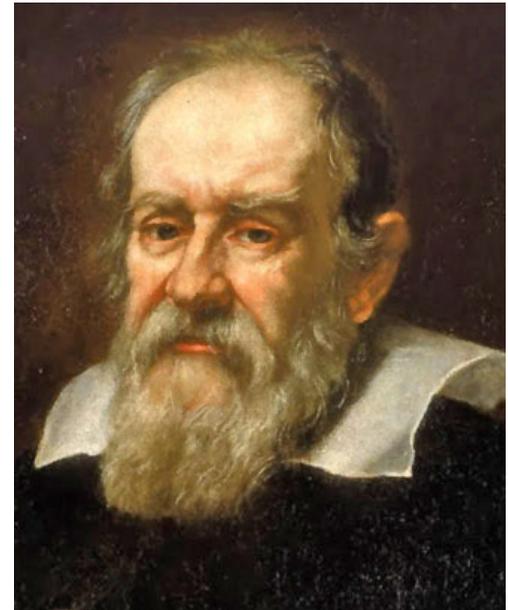
海水の塩分濃度は約3.5%と言われている。

1000kgの海水を容器に汲み上げ、真夏の炎天下で水分を飛ばしたところ、真水の割合は残った海水全体の30%となっていた。

この時、容器内の海水はおよそ何kgになっているだろうか？

ガリレオのサイコロ問題

- 3個のサイコロを投げた時、目の和が9となる組み合わせは6通り、目の和が10となる組み合わせも6通りであるはずなのに、実際には目の和が10となる事のほうが多い。これはなぜだろうか？



<http://ja.wikipedia.org/wiki/ガリレオ・ガリレイ>

場合の数

問題3

大中小3個のサイコロ（1-6の目を持つ通常のサイコロ）を同時に振るとする。このとき、

- (1)すべての目の出方は何通り？
- (2)すべての目が異なるのは何通り？
- (3)3個の目の和が9となるのは何通り？
- (4)3個の目の和が10となるのは何通り？

場合の数

問題4

5個のサイコロをふったとき、

(1)合計が10になる場合は何通りか？

(2)合計が10以下になる場合は何通りか？



順列と組み合わせ

- 順列

- n個の異なるものを1列に並べる組み合わせ

- 全て並べるとき :

$$n! = n \cdot (n-1) \cdots 1$$

- n個からk個を選んで並べるとき :

$$\begin{aligned} {}_n P_k &= \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots 1}{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdots 1} \\ &= n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \end{aligned}$$

順列と組み合わせ

- 組み合わせ

- 異なる n 個のものから異なる k 個のものを選ぶ
組み合わせ

$${}_n C_k = \frac{{}_n P_k}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

順列と組み合わせ

問題 5

A, B, C, D, Eの5人がいるとき、

(1)この5人が1列に並ぶ方法は何通りか？

(2)この5人から3人を選ぶ方法は何通りか？

(3)2人と3人の2組に分けてグループ分けする方法は何通りか？

(4)2人のグループ2組と1人のグループ1組にグループ分けする方法は何通りか？

順列と組み合わせ

問題 6

あるサークルにはP学部の学生が10人、E学部の学生が8人、N学部の学生が2人いる。

- (1)この中から3人選ぶ方法は何通りか？
- (2)P学部学生を3人、E学部学生を2人選ぶ選び方は何通りか？
- (3)この中から3人選ぶとき、N学部の学生が少なくとも1人含まれている選び方は何通りか？

確率の「定義」

事象Aの起こる確率 $P(A)$

= 事象Aが起こる場合の数 r /全ての場合の数 N

$$P(A) = \frac{r}{N}$$

「全ての場合の数」なんて、定義できるのか？
発生回数が少なくても確率は安定するのか？
偶然的な現象にも適用できるのか？

数学的確率と統計的確率

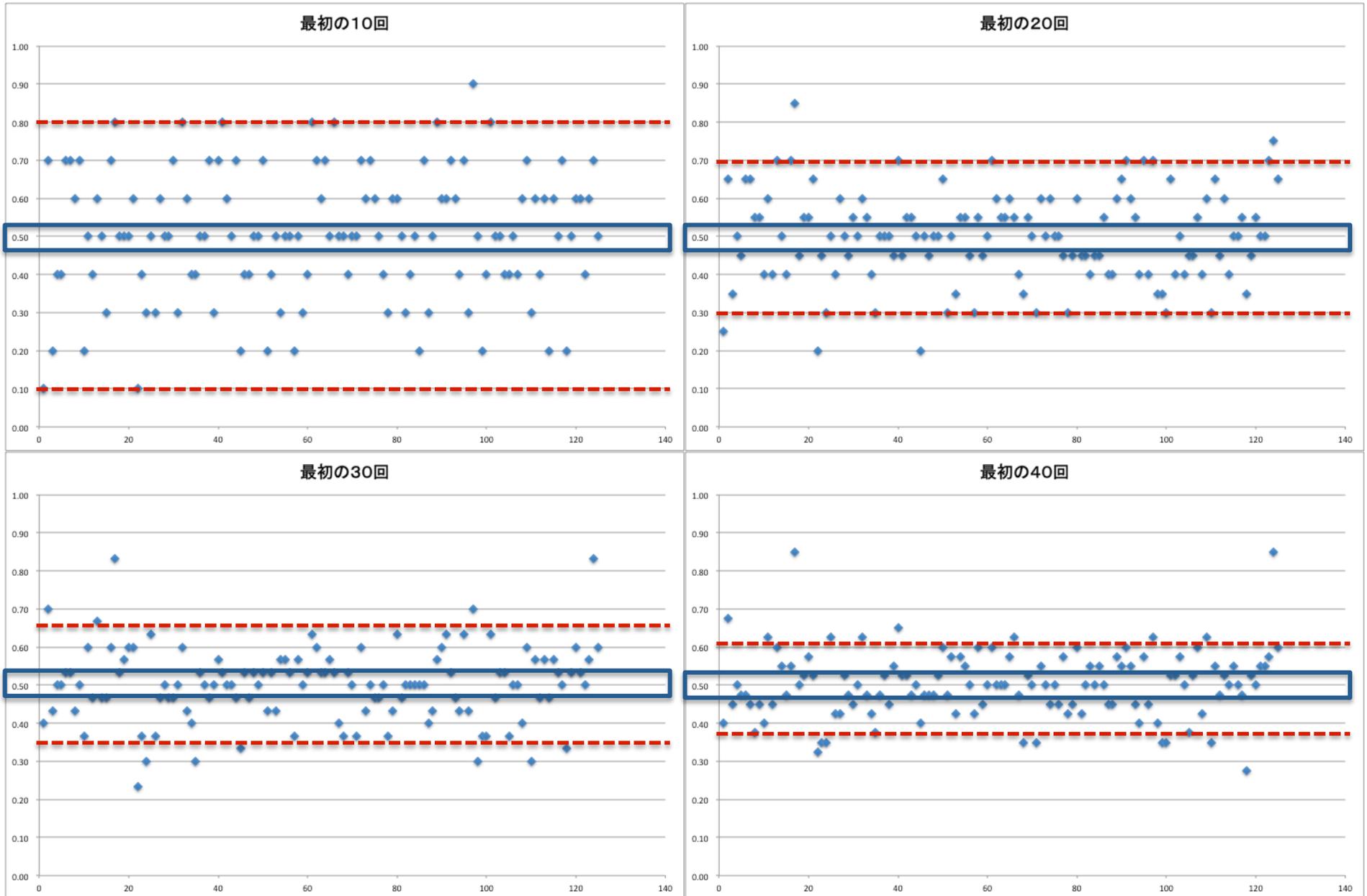
- 数学の教科書で出てくる確率
 - $P(\text{表}) = [\text{表の出る回数}] / [\text{コイントスの回数}]$
 - ラプラスの数学的確率と呼ぶことがある
- 多数回の試行で安定した相対頻度
 - 統計的確率と呼ぶことがある
- 結局は同じことを言っている
 - 現象の発生が偶然的であり、基本となる事象が全て等しい確率で生じる場合には、ある事象の確率は場合の数の比率で表される

コイントス

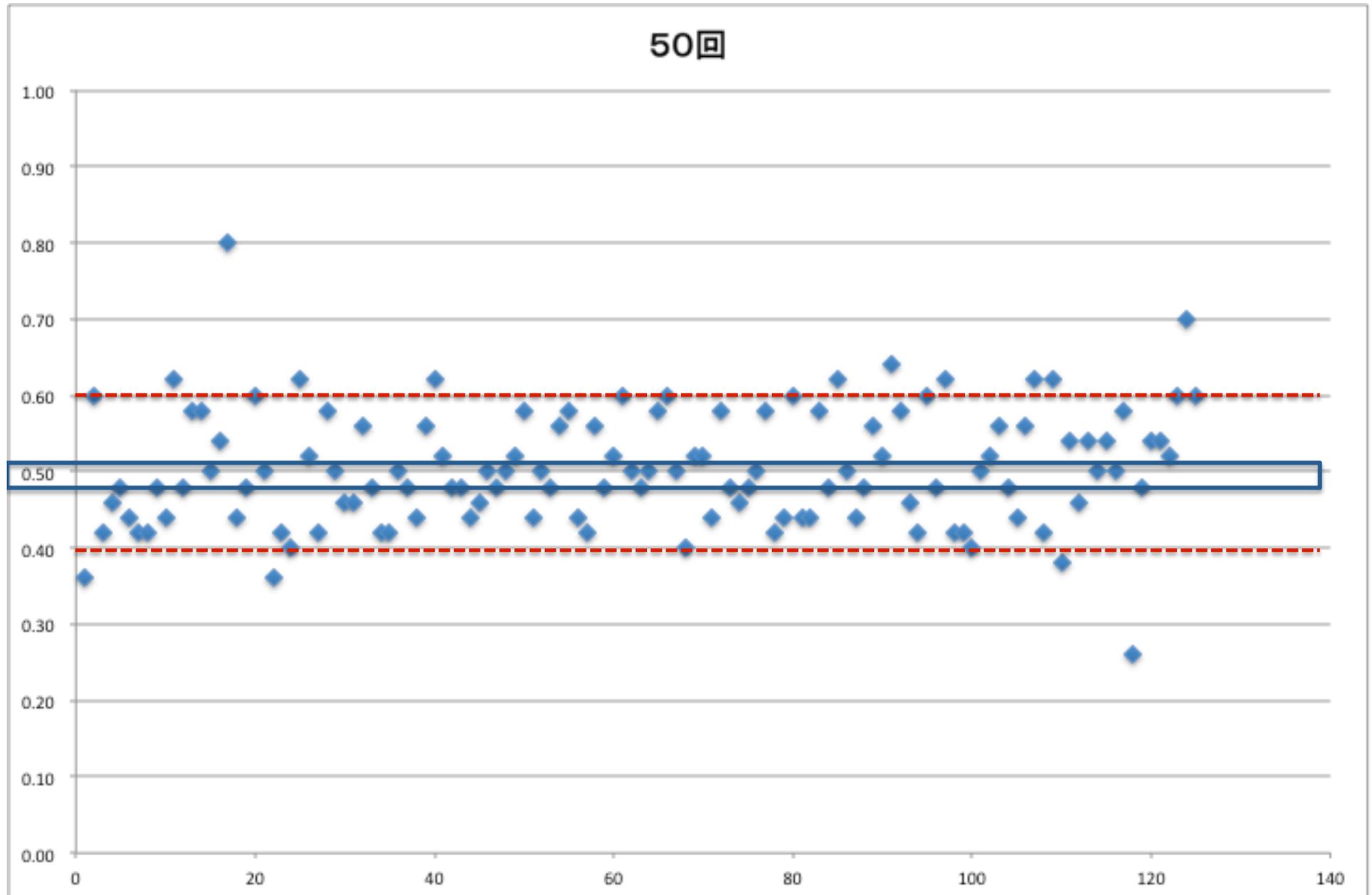
- 「表が出る確率は $1/2$ である」は本当か？



コイントスで表が出た相対頻度

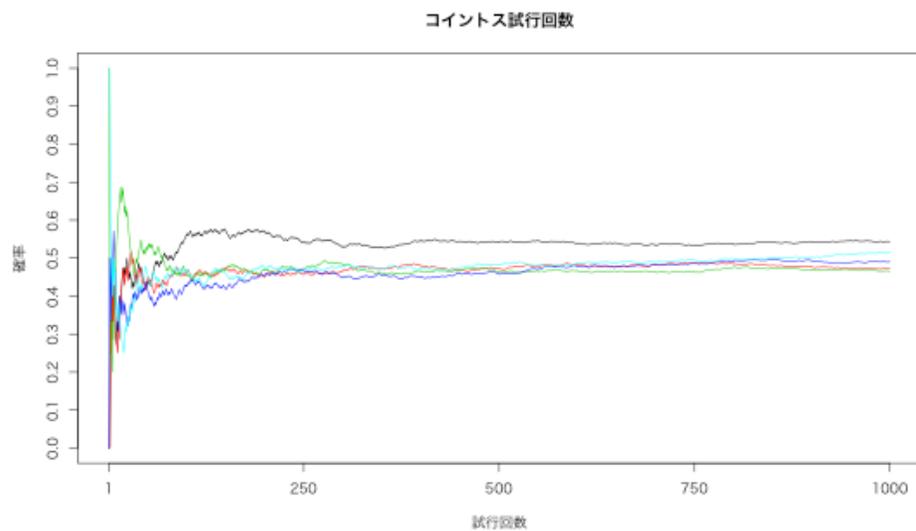


コイントスで表が出た相対頻度

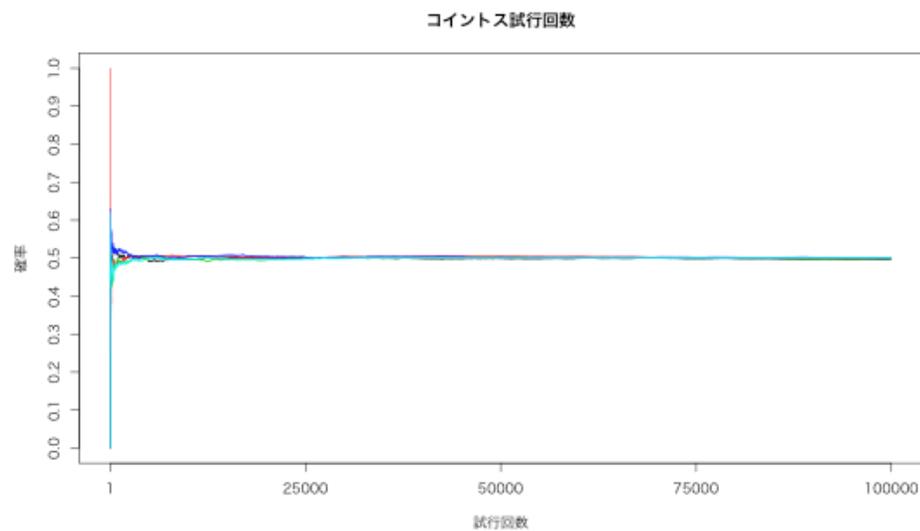


コイントスの回数を増やすと

5人が1000回コイントス



5人が100000回コイントス



経験的確率（主観的確率）

- 過去の経験に則ってある事象が生じる確率を考えると、それを「経験的確率」という

- 経験的確率の例
 - 星占い、手相
 - 恋愛
 - 昔の犯罪捜査



ド・メシのサイコロ問題

問題7

- (1) サイコロを4回振って6の目が1回以上出る確率を求めなさい。
- (2) 2つのサイコロを24回振って6のゾロ目が1回以上出る確率を求めなさい。

事象と余事象

- 事象：ある試行の結果起こる事柄
- 確率論では事象Aが生じる確率を以下のように表す

$$P(A)$$

- 事象Aが起こらない事柄 \bar{A} を余事象という
- 事象Aが起こる確率と \bar{A} が起こる確率の合計は1となる

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

誕生日のパラドックス

- K大学の新生クラスが40人で構成されることになりました。あるクラスは全員が閏年でない同じ年で生まれています。
- このうち、あなたと同じ誕生日の人がいる確率はどの位だろうか？