ベイズ統計

古谷知之

講義概要

- 確率の諸問題
- 条件付き確率・同時確率・周辺確率
- ベイズの定理
- 逆確率
- 尤度
- 事前確率・事後確率

確率的な思考を身につける

- 世の中で起きていること（事象）をより（抽象的に）簡略化して考える
- 事象の発生数や場合の数を把握する
- 事象の因果関係を示す

確率の「定義」

事象Aの起こる確率P(A)
＝事象Aが起こる場合の数r/全ての場合の数N

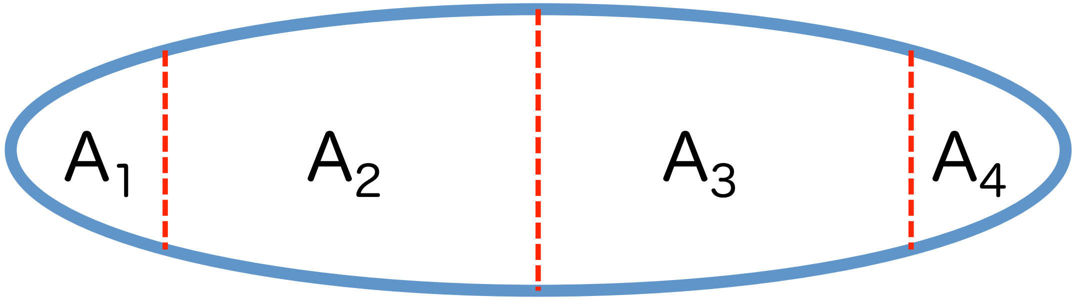
$$P(A) = \frac{r}{N}$$

確率

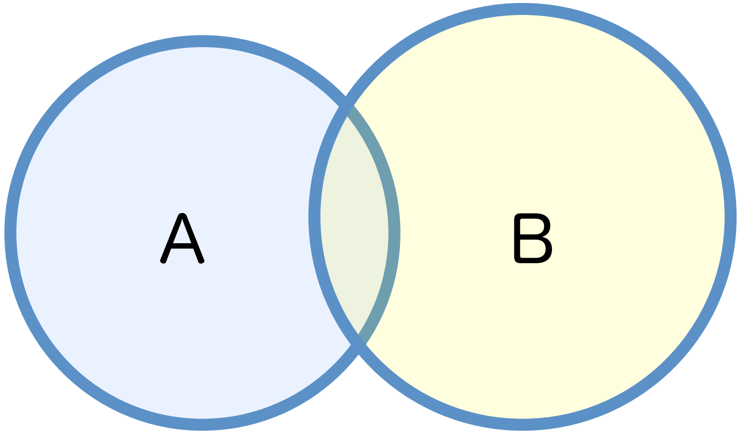
- イベント発生件数 / 生じうる全てのイベント件数
- $P(A)$ ：イベント（事象）Aの発生確率
- 疾病による死亡確率
  - （疾病による死亡者数）/（全人口）
  - （疾病による死亡者数） /（疾病罹患者総数）

集合の重なり方

- 集合内の部分集合が互いに背反のとき

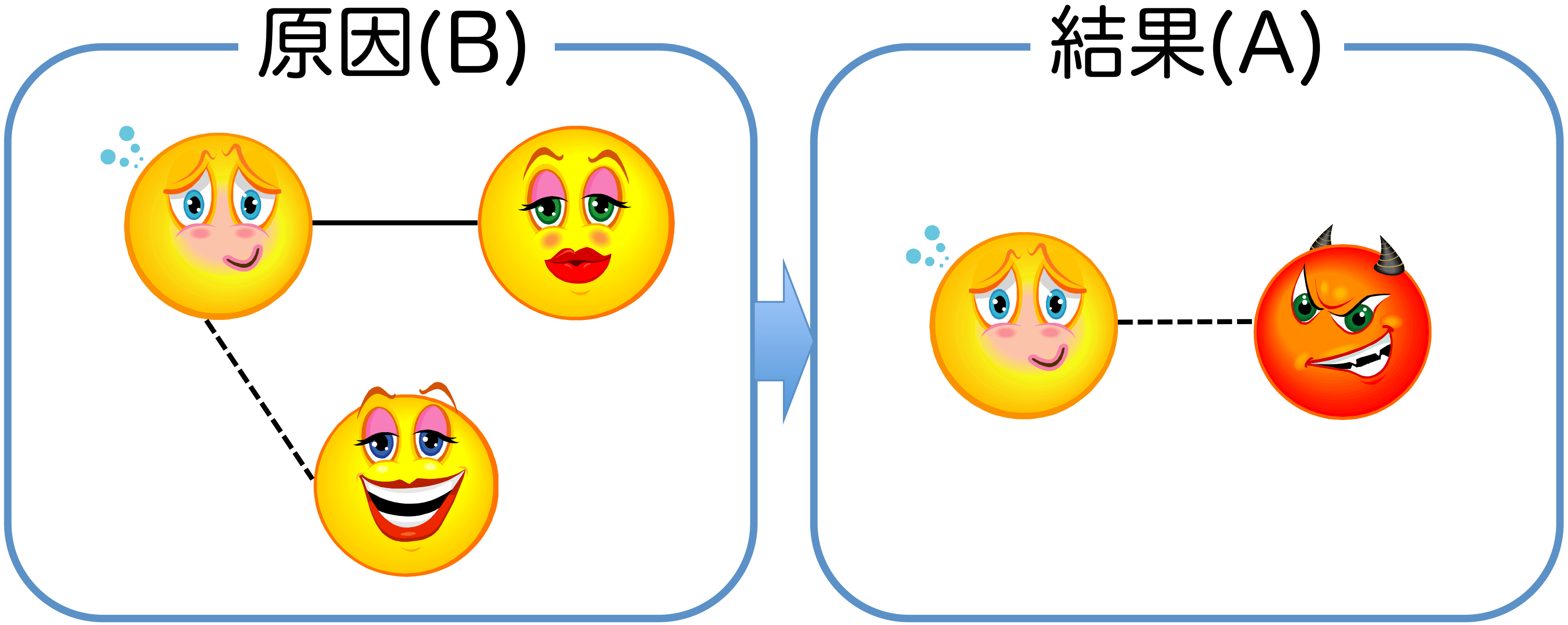


- 複数の集合が重なるとき



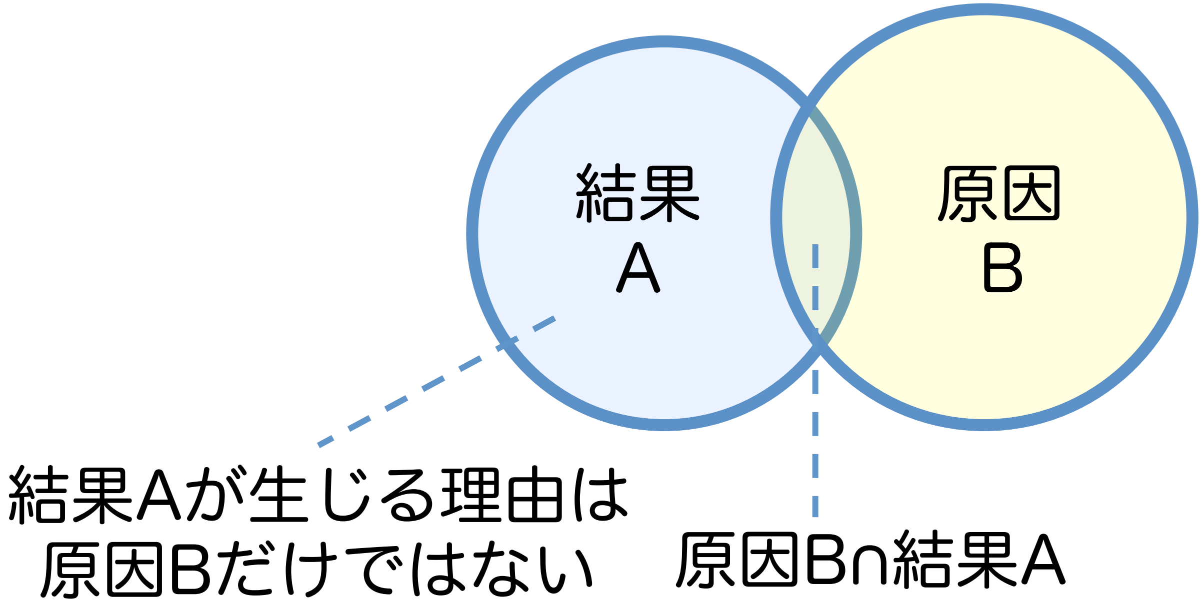
因果関係

- ものごとが発生するには必ず原因がある



因果関係とベン図

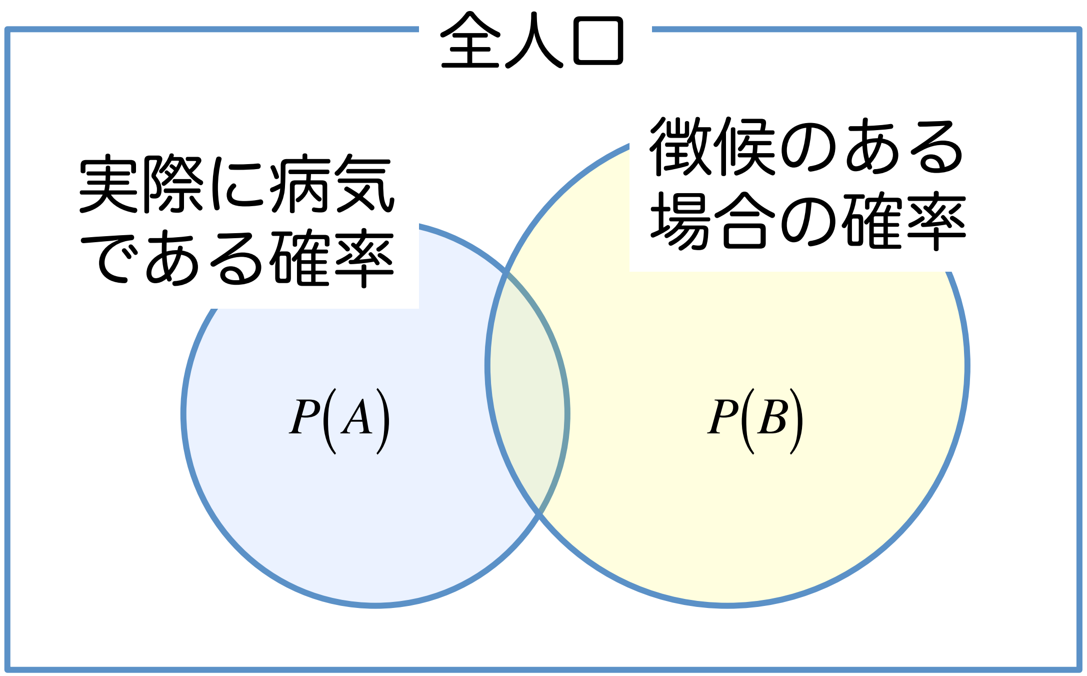
- 原因Bが理由となり結果Aが生じる場合
=原因Bの割合に対する(原因B∩結果A)が
生じる割合



原因と結果の発生確率

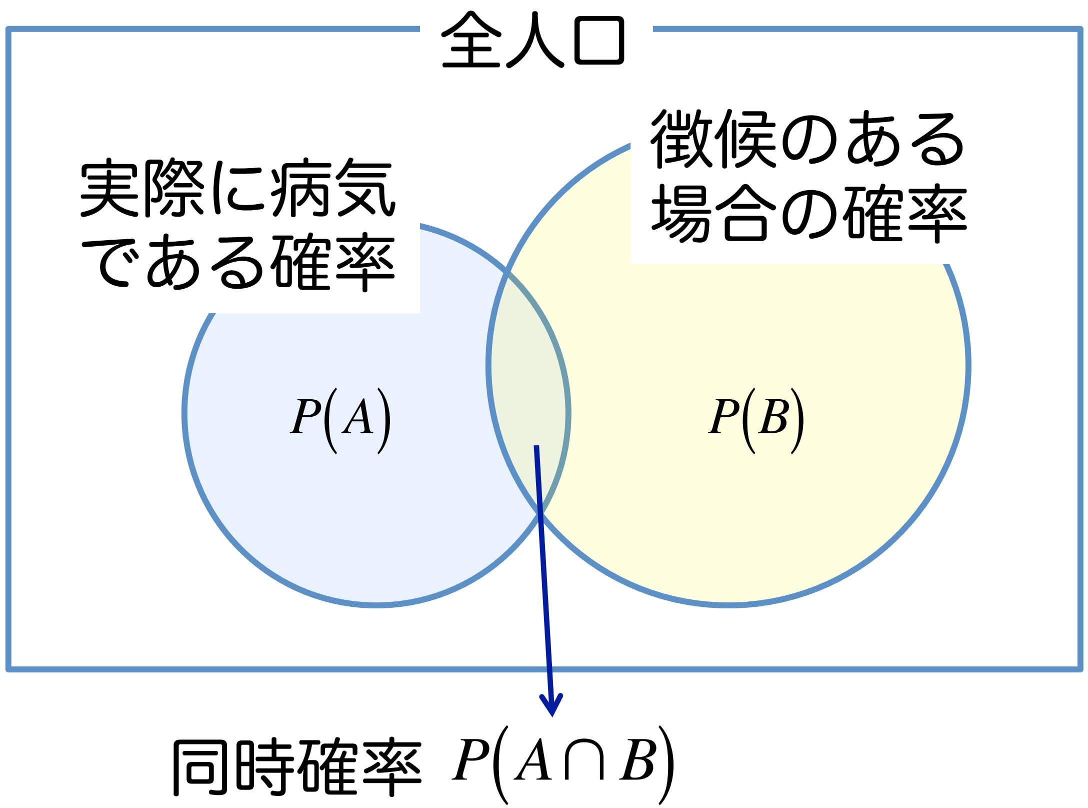
- 病気の徴候がある場合に実際に病気となる確率

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

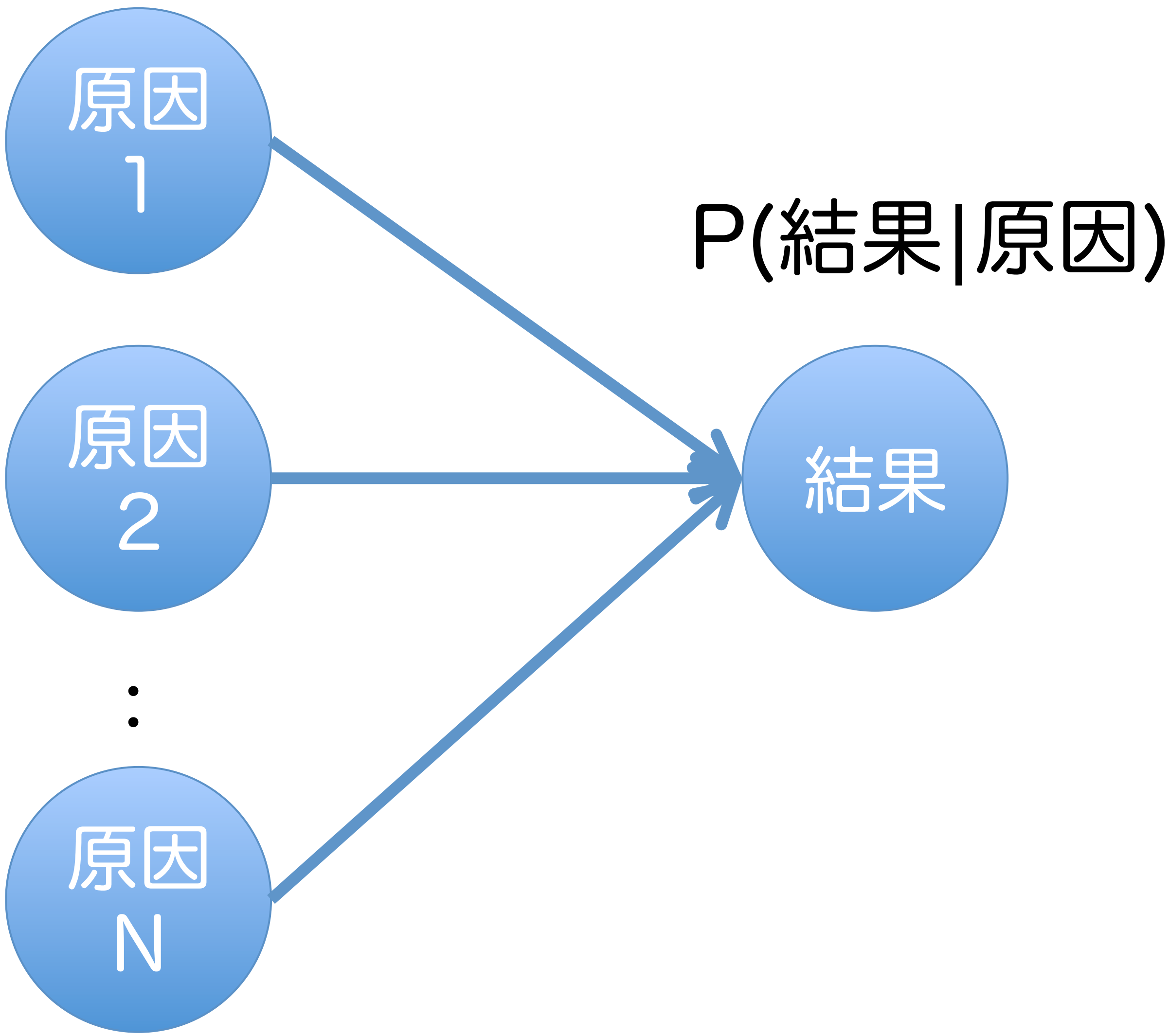


条件付き確率と同時確率

条件付き確率 $P(A|B) = \dfrac{P(B|A)P(A)}{P(B)} = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$



因果関係



スクリーニングテストの例

- 兆候の有無：事象B
  - 兆候がある：B_+、兆候がない：B_-
- 健康状態：事象A
  - 健康である： $A_{健康}$、病気である： $A_{病気}$

健康状態（A）	兆候（B） −	兆候（B） ＋	合計
健康	800	100	900
病気	25	75	100
合計	825	175	1000

スクリーニングテストの例

- 無作為に一人選んだ人が、兆候が＋でかつ病気である確率（同時確率）　$P(A_{病気} \cap B_{+})$
- 無作為に選んだ人が病気である確率（周辺確率）$P(A_{病気})$
- 無作為に選んだ人が兆候が+のとき病気であるである確率（条件付き確率）　$P(A_{病気} | B_{+})$

健康状態（A）	兆候（B） −	＋	合計
健康	800	100	900
病気	25	75	100
合計	825	175	1000

S.セン（2005）、p.76

条件付き確率、同時確率、周辺確率

- 同時確率　$P(A_{病気} \cap B_{+})$ =75/1000
- 周辺確率　$P(B_{+})$ =175/1000
- 条件付き確率　$P(A_{病気}|B_{+})$=75/175
- 同時確率＝条件付き確率×周辺確率

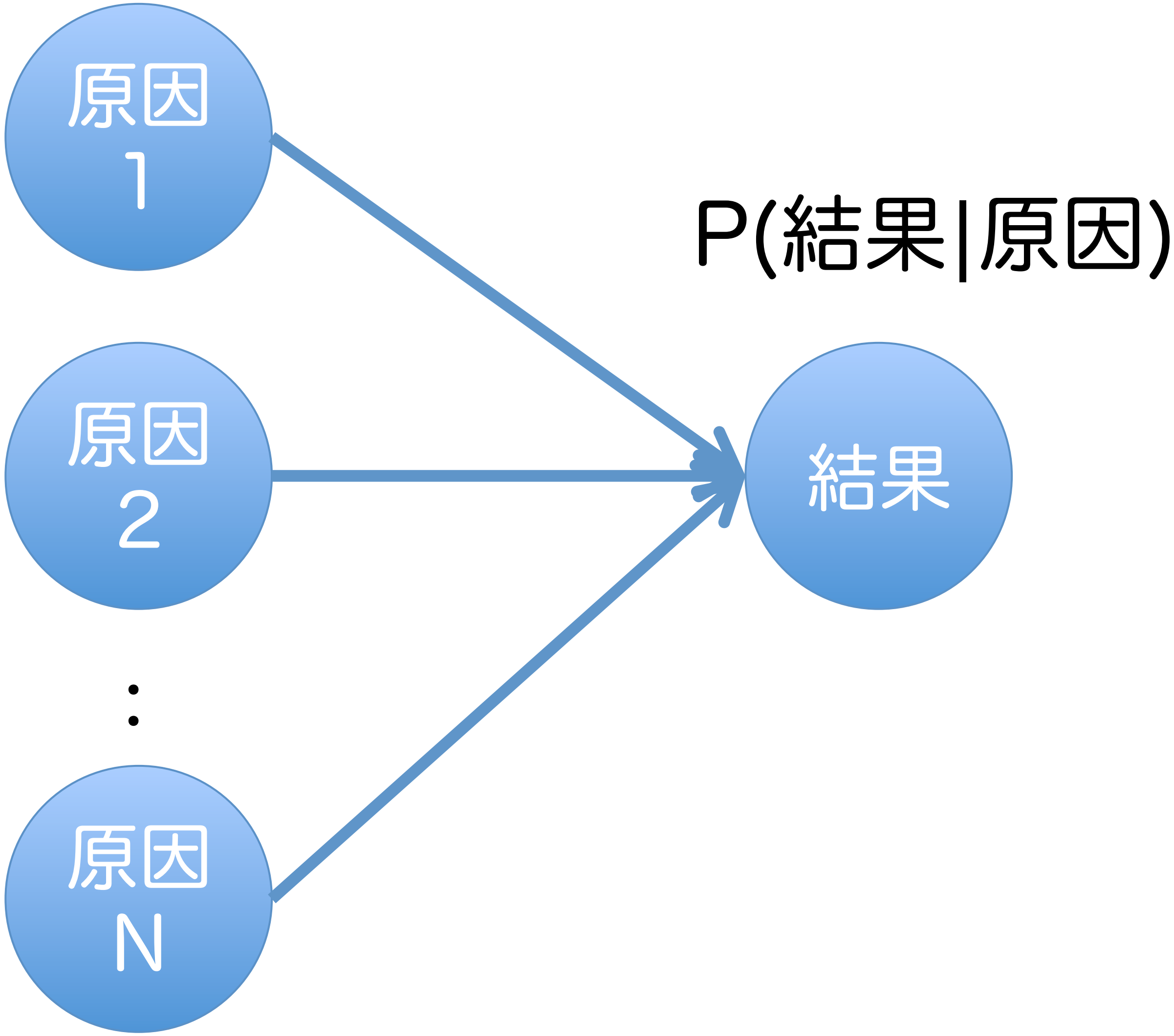
健康状態	兆候（B）		
（A）	ー	＋	合計
健康	800	100	900
病気	25	75	100
合計	825	175	1000

S.セン（2005）、p.76

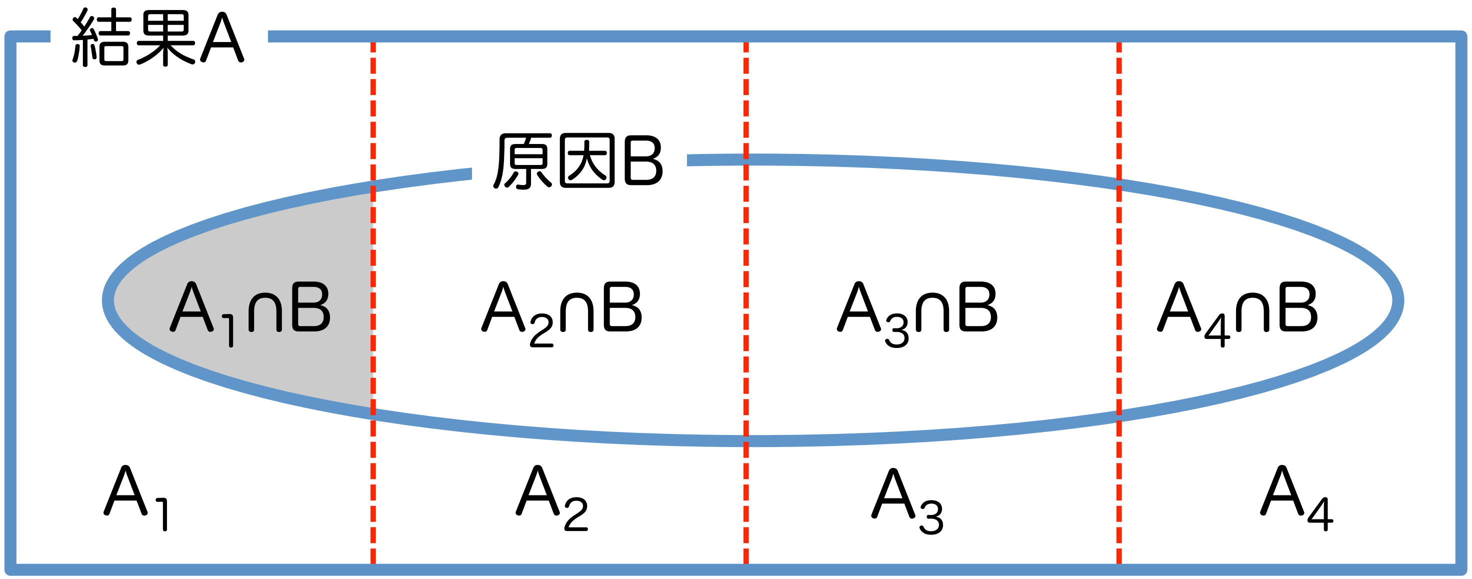
ベイズの定理の導き方

- より一般的に、二つの事象AとBがあるとする
- 同時確率＝条件付き確率×周辺確率
  $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$
  が成立する。
- 同様に、 $P(B \cap A) = P(B|A)P(A)$ が成立する
- $P(A \cap B) = P(B \cap A)$
  $\Leftrightarrow P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$
  $\Leftrightarrow P(A|B) = P(B|A)P(A) / P(B)$
- これが「ベイズの定理」

因果関係と条件付き確率



原因と結果の関係



ベイズの定理

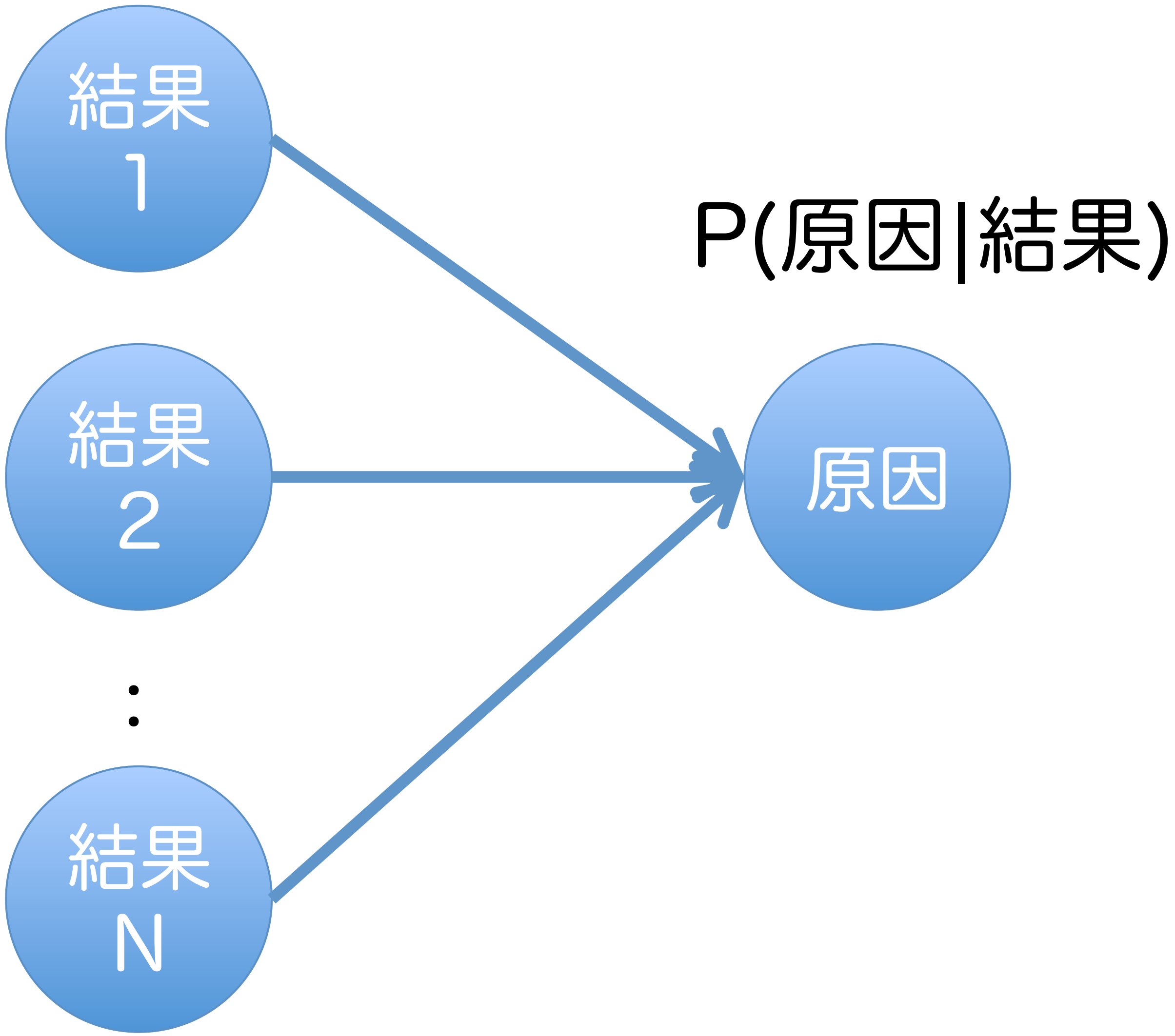
- 原因Bから結果A_1が生じうる確率

$$P(A_1 \mid B) = \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{N} P(B \cap A_i)}$$

$$= \frac{P(B \mid A_1)P(A_1)}{\sum_{i=1}^{N} P(B \mid A_i)P(A_i)}$$

$$= \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}$$

逆確率による原因の推定



逆確率

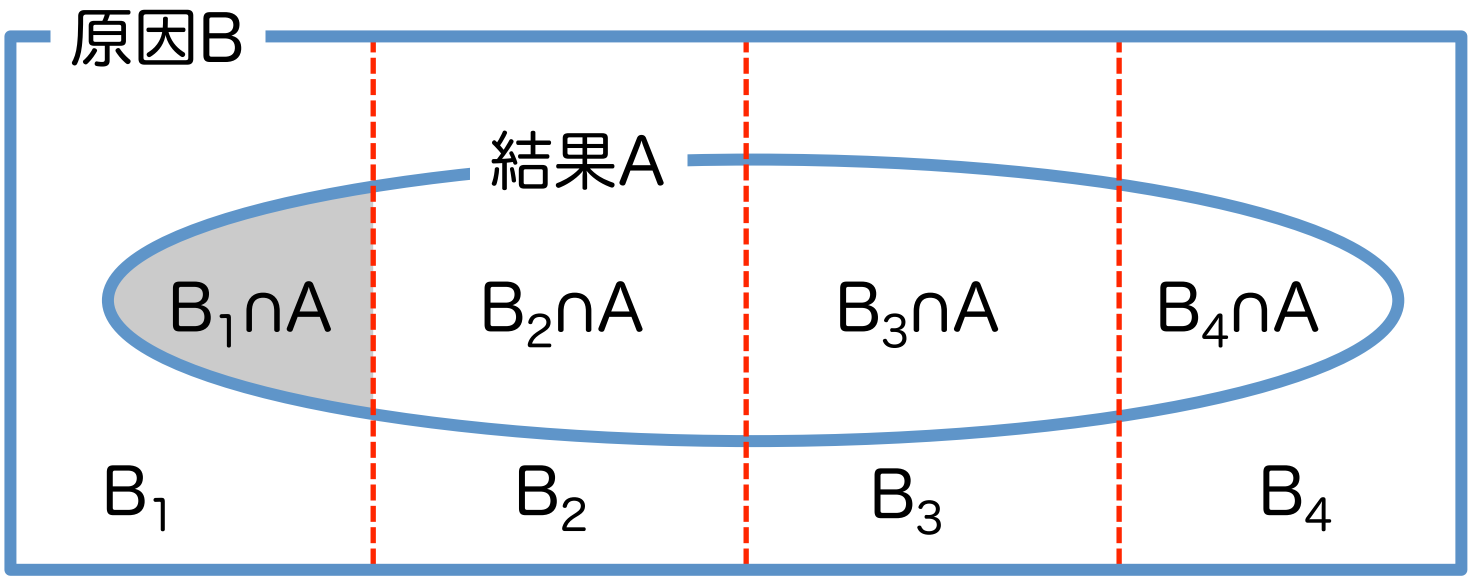
- 結果Aの原因BがB_1でありうる確率

$$P(B_1 \mid A) = \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{N} P(A \cap B_i)}$$

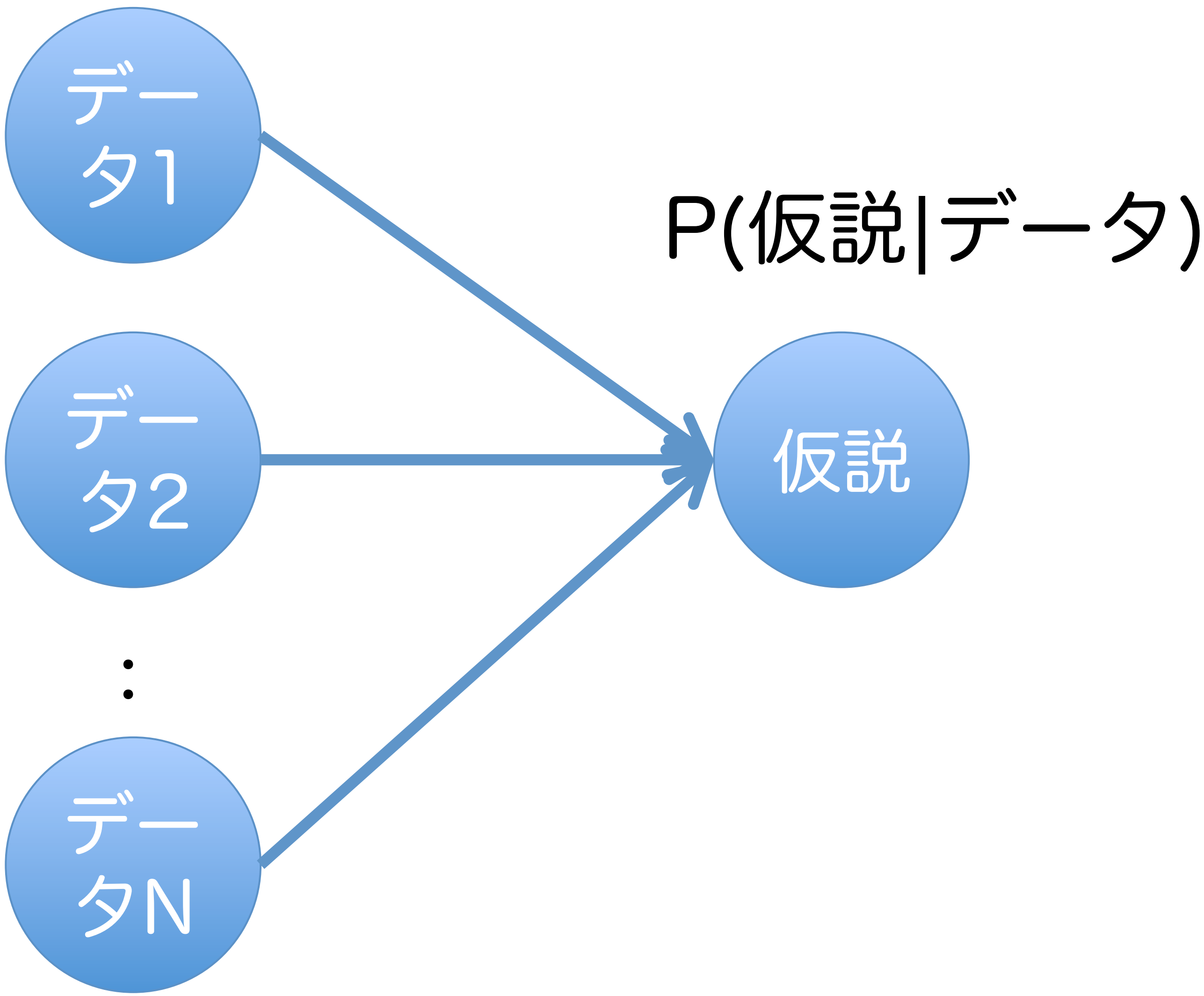
$$= \frac{P(A \mid B_1)P(B_1)}{\sum_{i=1}^{N} P(A \mid B_i)P(B_i)}$$

$$= \frac{P(A \mid B)P(B)}{P(A)}$$

逆確率における原因と結果の関係



データから仮説（モデル）を推定する



データから仮説（モデル）を推定する

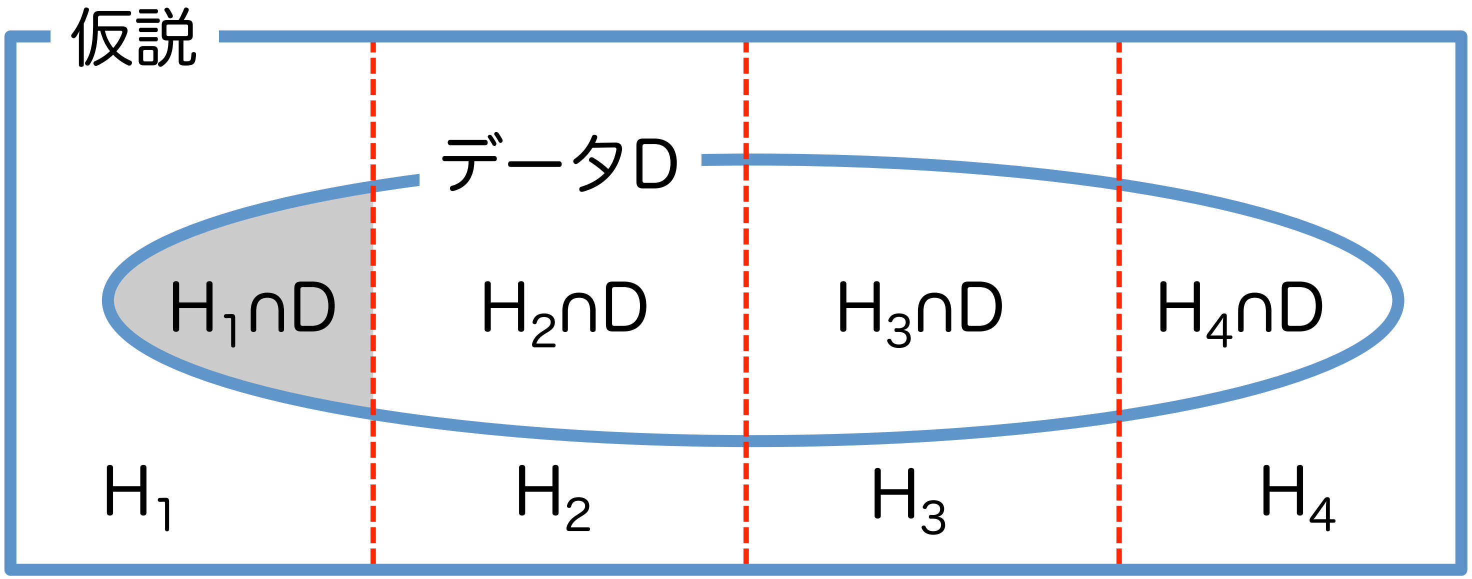
- データDから仮説H_1が成立する確率

$$P\left(H_1 \mid D\right) = \frac{P\left(D \mid H_1\right)P\left(H_1\right)}{\sum_{i=1}^{N} P\left(D \cap H_i\right)}$$

$$= \frac{P\left(D \mid H_1\right)P\left(H_1\right)}{\sum_{i=1}^{N} P\left(D \mid H_i\right)P\left(H_i\right)}$$

$$= \frac{P\left(D \mid H\right)P\left(H\right)}{P\left(D\right)}$$

データから仮説（モデル）を推定する



ベイズの定理とベイズ統計

- ベイズ統計でのモデル推定は、データが与えられた条件の下で仮定されたモデルの成立する確率P(仮説|データ)を求めていることに他ならない
- 確率的には与えられたデータのもとで様々なモデル（仮説）が成立する可能性がある

尤度（ゆうど）

- 原因から結果が生じる確率P(結果|原因)を尤度という
- 原因と結果を、データと仮説（モデル）と読み替えると、
- ある仮説（モデル）を所与としてデータが得られる確率P(データ|仮説)といえる
- 仮説がデータに当てはまる当てはまりやすさ（尤もらしさ）を尤度という

事前確率・事後確率・尤度

- ベイズの定理にもとづいて、P(H)を事前確率、P(D|H)を尤度、P(H|D)を事後確率という

尤度　　　　事前確率

事後確率

$$P(H \mid D) = \frac{P(D \mid H)\, P(H)}{P(D)}$$

事前確率・事後確率・尤度

- データや仮説が複数（たくさん）あるとき、事前確率、事後確率、尤度はデータや仮説の値に対応した確率値をとる