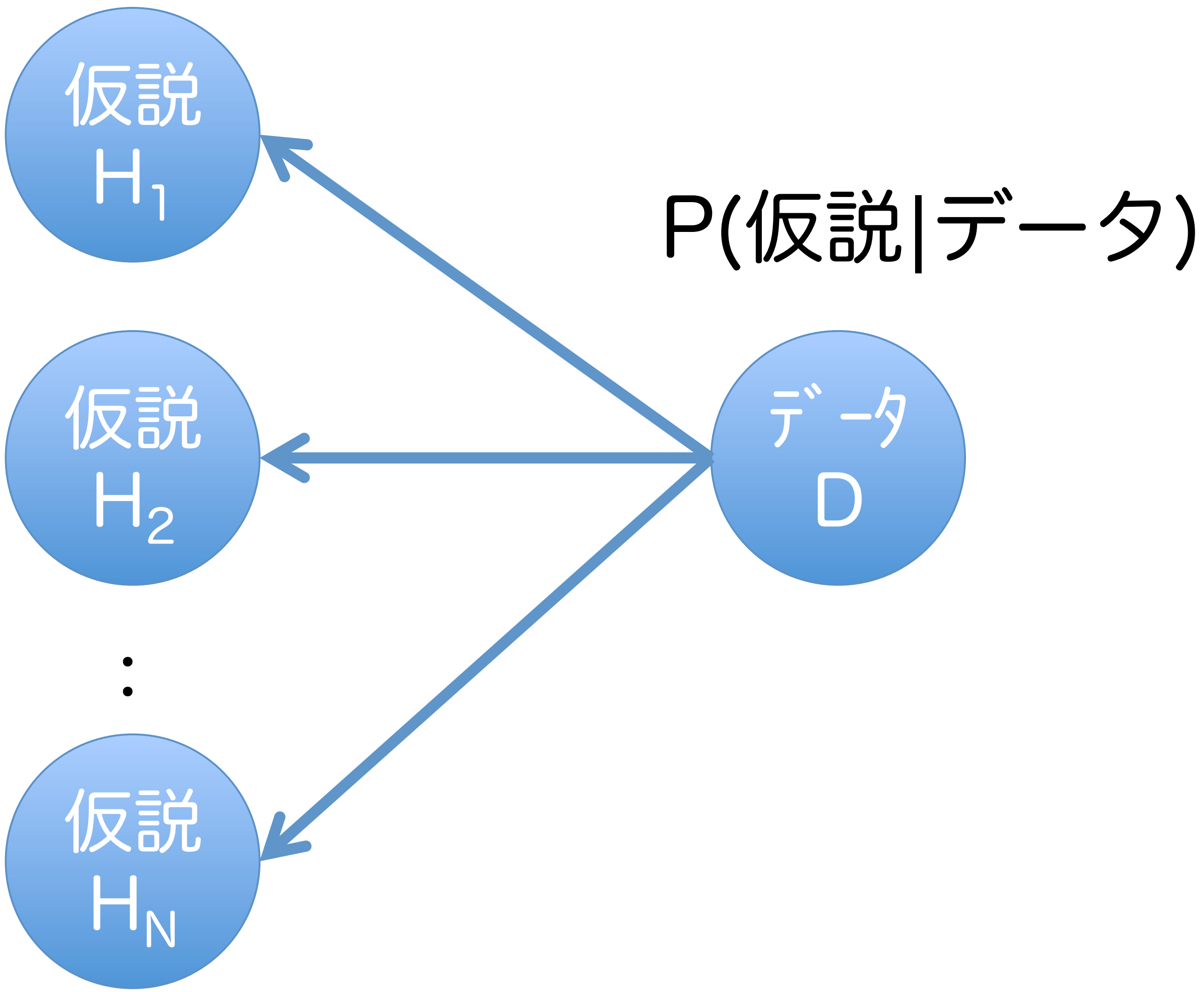
ベイズ統計

古谷知之

講義概要

- ベイズの定理
- ベイズ的意思決定
- ベイズ更新
- 理由不十分の原則
- 事前情報の有無による違いとは

データから仮説（モデル）を推定する



データから仮説（モデル）を推定する

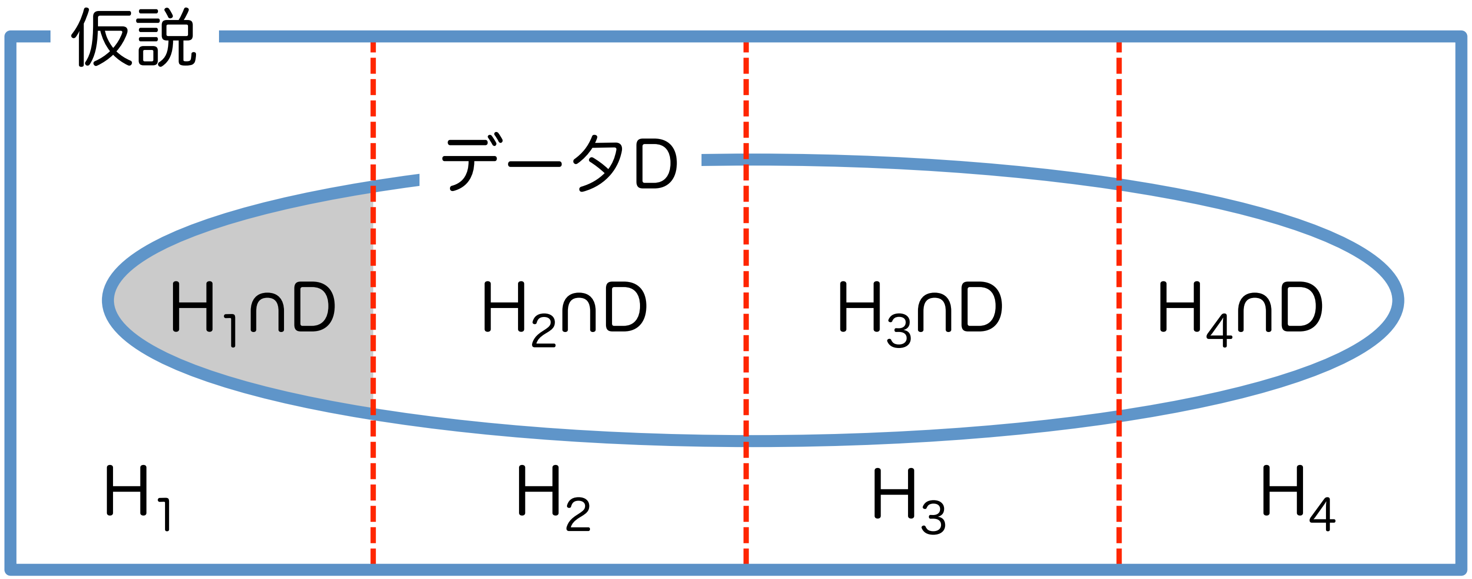
- データDから仮説H_1が成立する確率

$$P(H_1 | D) = \frac{P(D | H_1)P(H_1)}{\sum_{i=1}^{N} P(D \cap H_i)}$$

$$= \frac{P(D | H_1)P(H_1)}{\sum_{i=1}^{N} P(D | H_i)P(H_i)}$$

$$= \frac{P(D | H_1)P(H_1)}{P(D)}$$

データから仮説（モデル）を推定する



ベイズの定理とベイズ統計

- ベイズ統計でのモデル推定は、データが与えられた条件の下で仮定されたモデルの成立する確率P(仮説|データ)を求めていることに他ならない
- 確率的には与えられたデータのもとで様々なモデル（仮説）が成立する可能性がある

尤度（ゆうど）

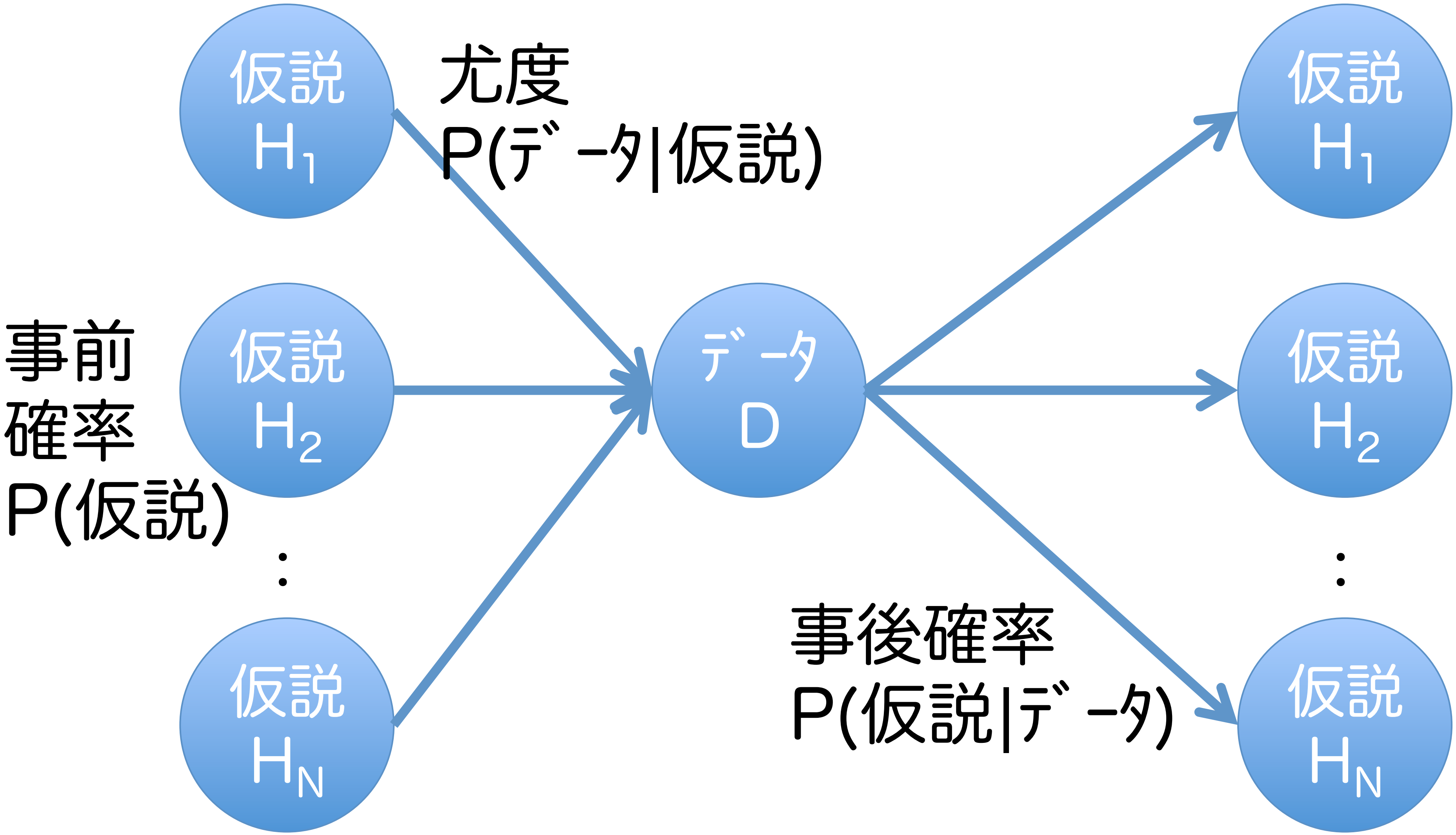
- 原因から結果が生じる確率P(結果|原因)を尤度という
- 原因と結果を、データと仮説（モデル）と読み替えると、
- ある仮説（モデル）を所与としてデータが得られる確率P(データ|仮説)といえる
- 仮説がデータに当てはまる当てはまりやすさ（尤もらしさ）を尤度という

事前確率・事後確率・尤度

- ベイズの定理にもとづいて、P(H)を事前確率、P(D|H)を尤度、P(H|D)を事後確率という

$$\overbrace{P(H|D)}^{\text{事後確率}} = \frac{\overbrace{P(D|H)}^{\text{尤度}}\,\overbrace{P(H)}^{\text{事前確率}}}{P(D)}$$

事前確率・尤度・事後確率


尤度
P(データ|仮説)
事前
確率
P(仮説)
仮説
H_1
仮説
H_2
仮説
H_N
データ
D
仮説
H_1
仮説
H_2
仮説
H_N
事後確率
P(仮説|データ)

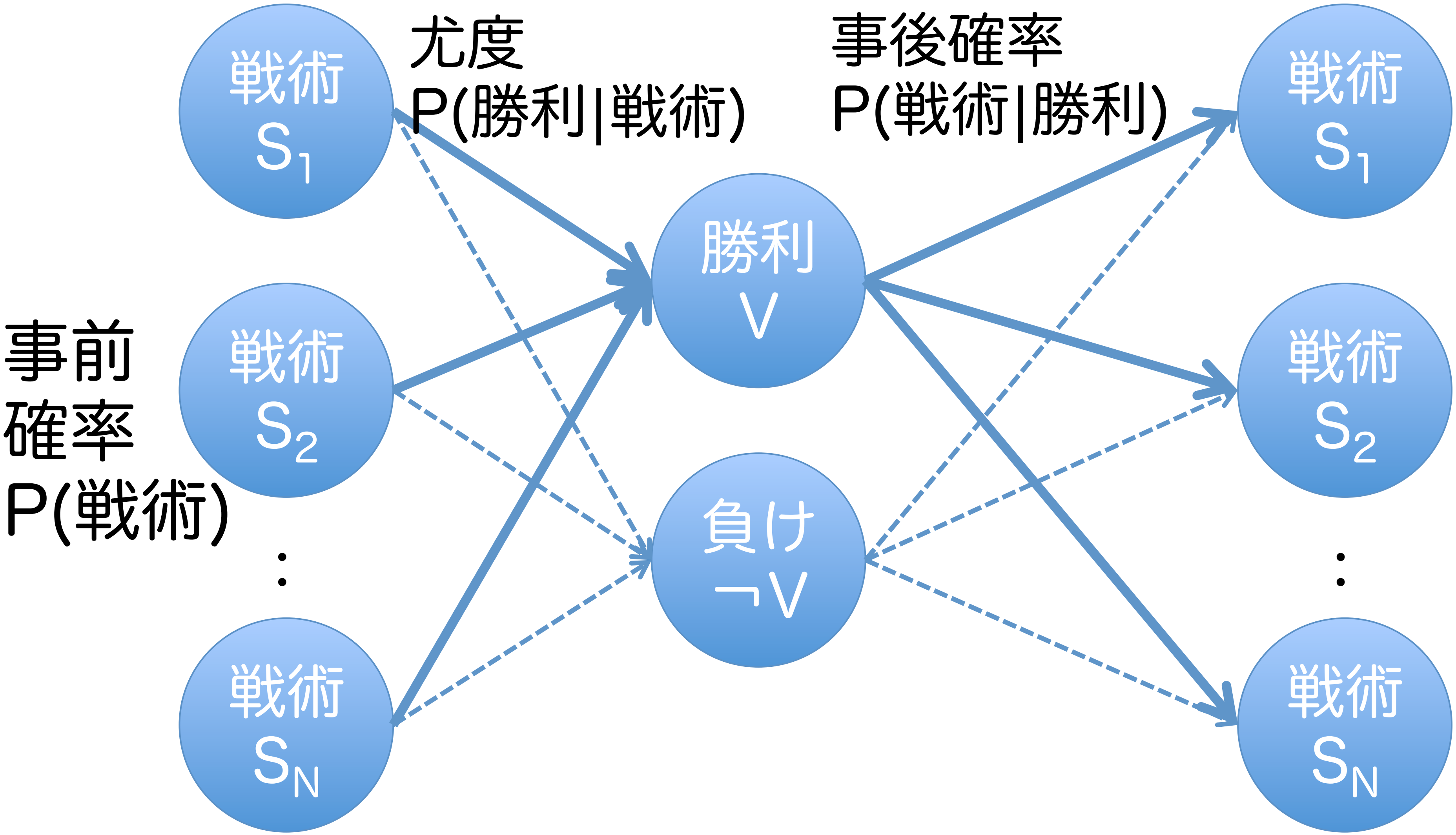
スポーツとベイズ的意思決定

- 野球
  - 投手（捕手）の打者に対する配球
  - 打者の投手に対する配球読み
- サッカー・ラグビー・アメフト・バレー
  - 試合の流れの中での戦術の選択
  - パスコース（パスを出す相手）の選択
- ゴルフ
  - クラブの番手選択
  - スイング・パットの強さ・方向選択

敵を知り己を知れば百戦危うからず（孫子）

- 今あなたは、あるスポーツチームのアナリスト兼作戦立案者である。次に試合をする相手チームとは初めての対戦であるが、そこでの試合の戦い方を検討中である。
- まずあなたは、相手チームが選ぶであろう戦術を考える＝「敵を知る」
- 次に、相手チームの戦術に応じて自チームの戦術を選ぶ＝「己を知る」

相手チームの戦術の検討



相手チームの選ぶ戦術

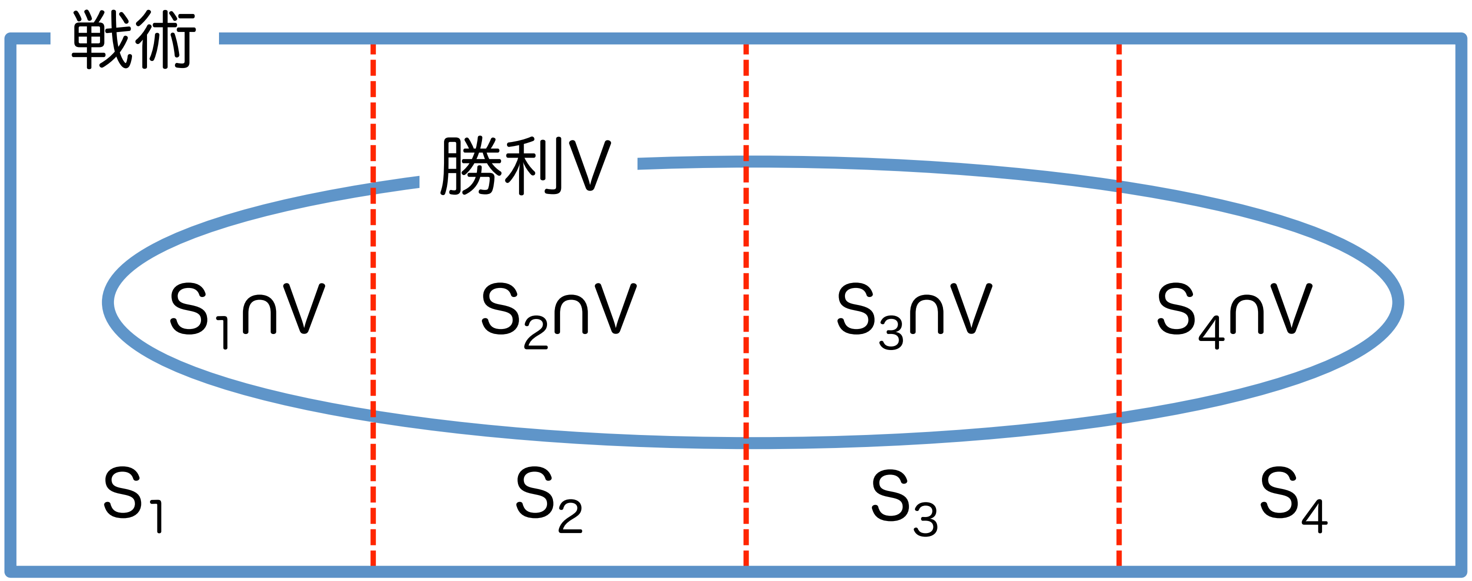
- 相手チームが戦術S_1を選ぶ事後確率は？

$$P\left(S_1 \mid V\right) = \frac{P\left(V \mid S_1\right)P\left(S_1\right)}{P\left(V\right)}$$

- 相手の戦術選択確率（事前確率）、各戦術の下での勝率（尤度）、相手の勝率がわかれば事後確率がわかる

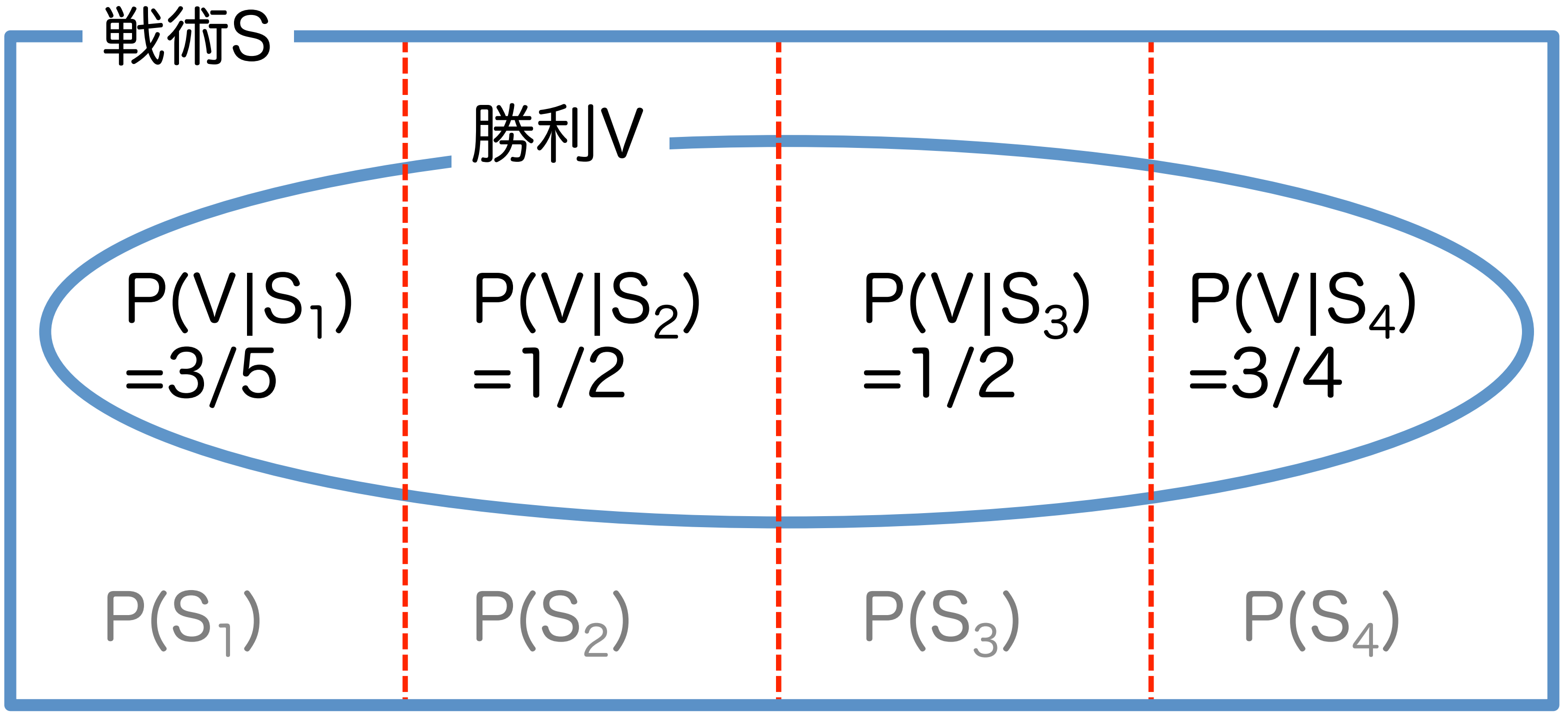
戦術の検討

- この競技では主に４つの戦術（戦術S_1、戦術S_2、戦術S_3、戦術S_4）が試合に使われている。



一般的な戦術選択確率

- 過去の試合などで各チームが選んだ戦術と勝敗との関係を知っているとき



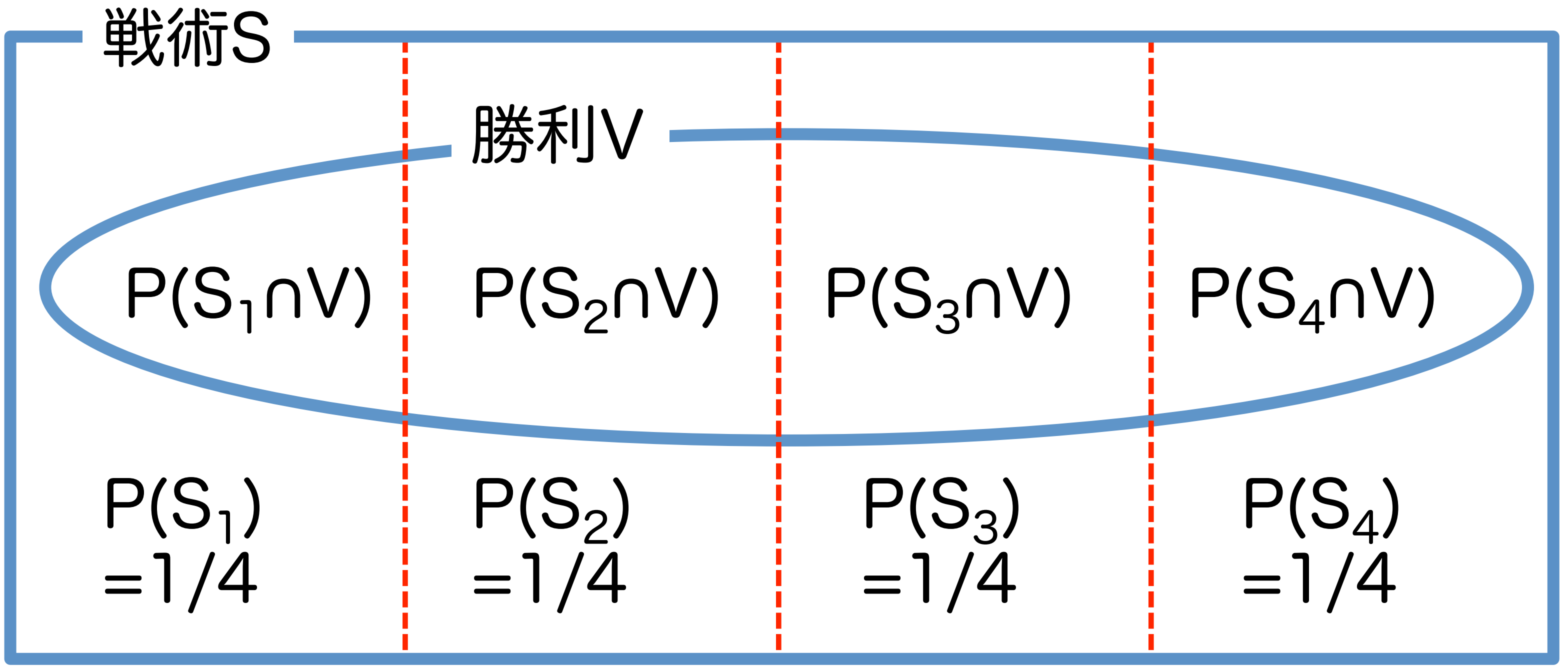
相手チームの戦術の検討

以下のような状況下で、どのように相手チームの戦術を検討すればよいだろうか？

1) 相手チームの戦術に関する情報が全く無いが、相手チームの勝率や一般的に各戦術が選ばれる確率は把握しているとき
2) 過去の対戦経験から相手チームの戦術と勝率との関係を把握しているとき

相手チームの情報がないとき

- 相手の戦術選択確率を等しいと考える
＝「理由不十分の原則」という



相手チームの勝率

- 各戦術を選択した条件下での勝率（尤度）と戦術選択率の合計＝勝率

$$P(V) = \sum_{i=1}^{N} P(V \mid S_i) P(S_i)$$

$$= \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}$$

$$= 0.5875$$

相手チームの情報がないとき

- 「理由不十分の原則」に基づく事後確率
  ⇒$P(S_1)=P(S_2)=P(S_3)=P(S_4)=1/4$

$$P\left(S_1 \mid V\right) = \frac{P\left(V \mid S_1\right) P\left(S_1\right)}{P\left(V\right)}$$

$$= \frac{\left(3/5\right) \cdot \left(1/4\right)}{0.5875} \approx 0.255$$

相手チームの情報がないとき

- 「理由不十分の原則」に基づく事後確率

$$P\left(S_1 \mid V\right) \approx 0.255$$

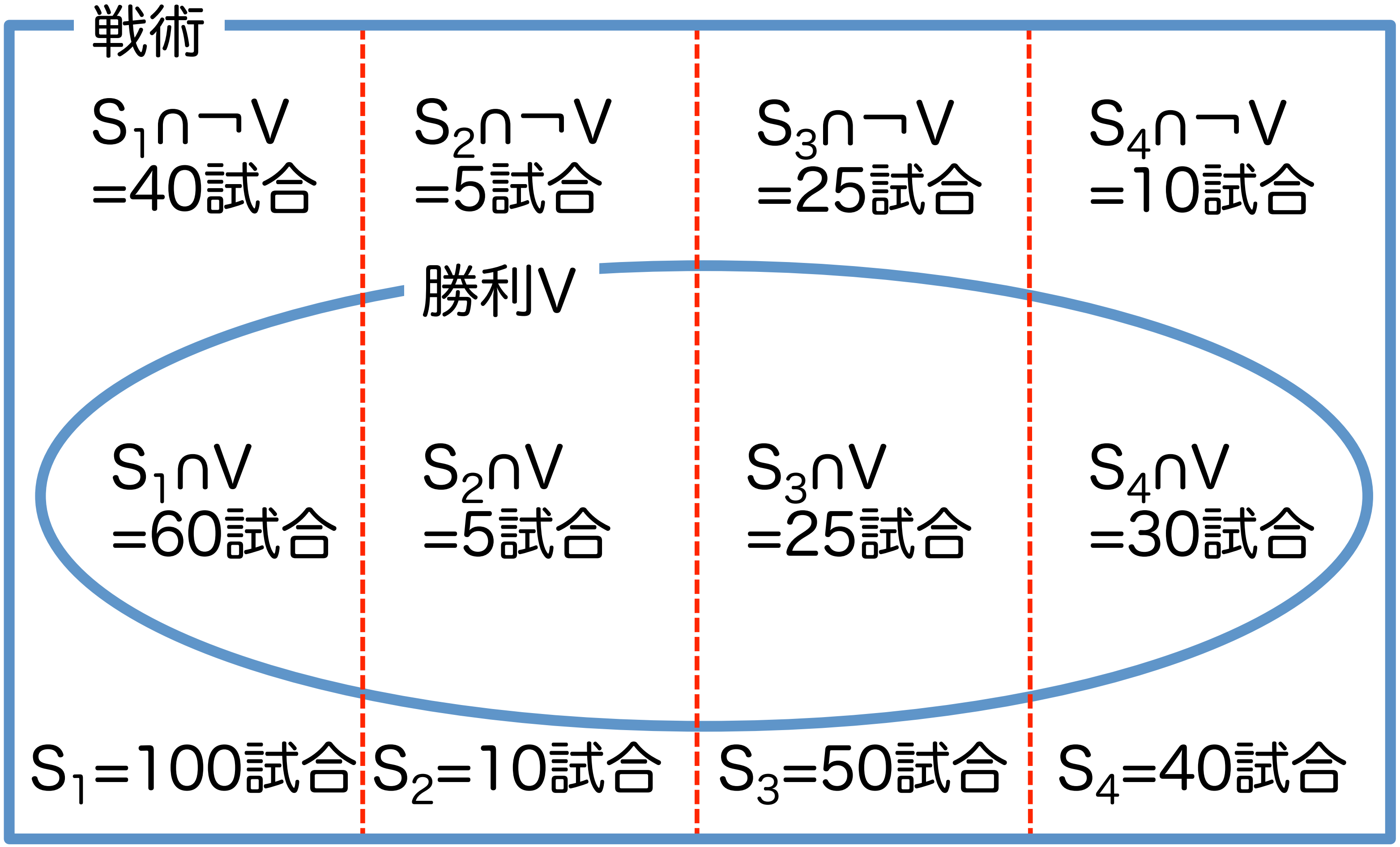
$$P\left(S_2 \mid V\right) \approx 0.213$$

$$P\left(S_3 \mid V\right) \approx 0.213$$

$$P\left(S_4 \mid V\right) \approx 0.319$$

相手チームの情報があるとき

- 過去の戦績から、各戦術の選択率と勝率との関係は以下のとおりであった。



相手チームの勝率

- 各戦術を選択した条件下での勝率（尤度）と戦術選択率の合計＝勝率

$$P(V) = \sum_{i=1}^{N} P(V \mid S_i) P(S_i)$$

$$= \frac{60}{100} \cdot \frac{100}{200} + \frac{5}{10} \cdot \frac{10}{200}$$

$$+ \frac{25}{50} \cdot \frac{50}{200} + \frac{30}{40} \cdot \frac{40}{200}$$

$$= 0.6$$

相手チームの情報があるとき

- 戦術S_1を選ぶ事後確率

$$P(S_1 | V) = \frac{P(V | S_1) P(S_1)}{P(V)}$$

$$= \frac{(3/5) \cdot (1/2)}{0.6} = 0.5$$

相手チームの情報があるとき

- 各戦術を選ぶ事後確率

$$P\left(S_1 | V\right) = 0.5$$

$$P\left(S_2 | V\right) \approx 0.042$$

$$P\left(S_3 | V\right) \approx 0.208$$

$$P\left(S_4 | V\right) \approx 0.250$$

事後確率の比較

- 相手チームの情報がないとき

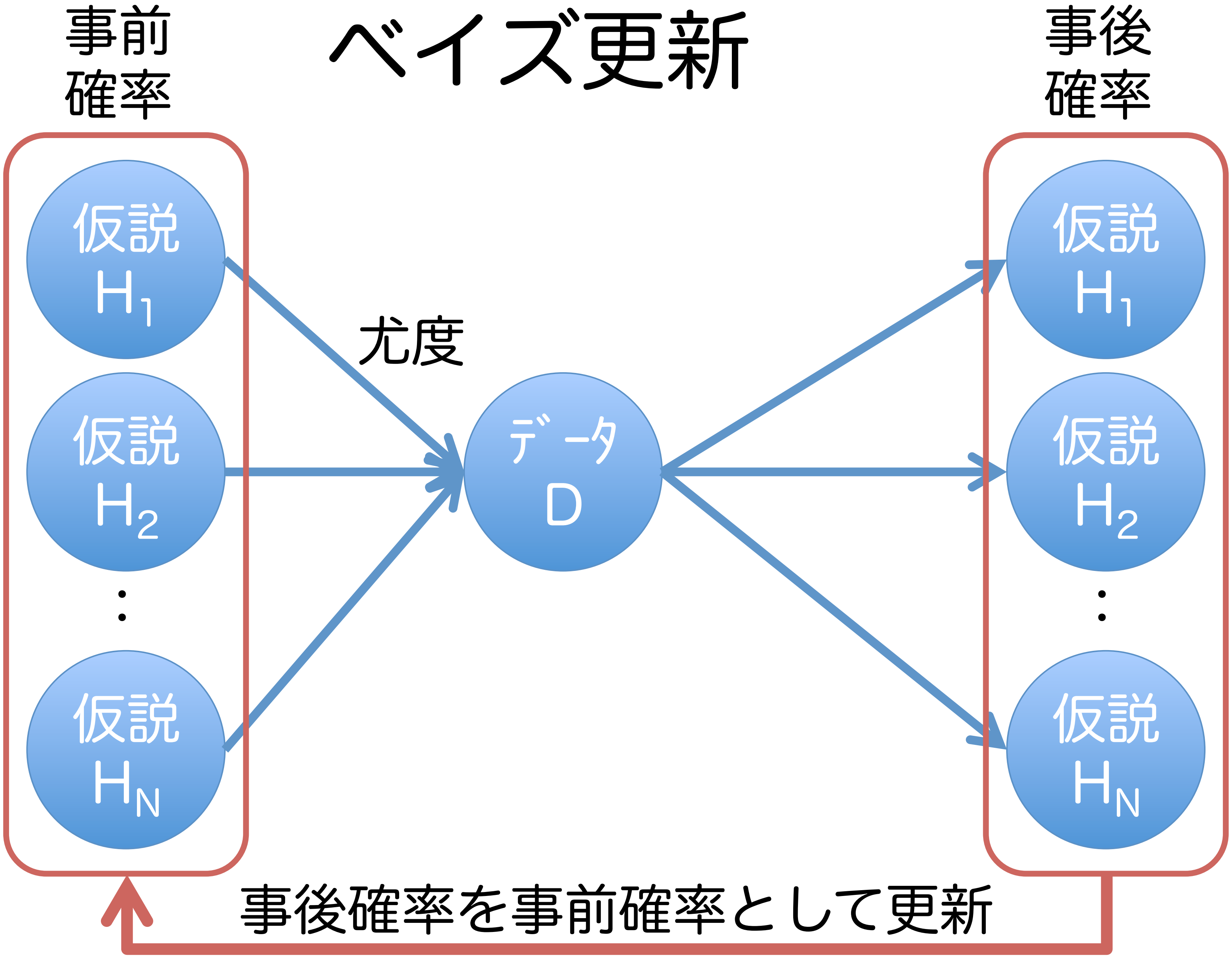
$$P\left(S_1 \mid V\right) \approx 0.255$$

- 相手チームの情報があるとき

$$P\left(S_1 \mid V\right) = 0.5$$

- 相手チームの情報の有無によって事後確率が異なるのはおかしくないか？

ベイズ更新



事前確率
事後確率
仮説 H_1
仮説 H_2
仮説 H_N
尤度
データ D
仮説 H_1
仮説 H_2
仮説 H_N
事後確率を事前確率として更新

ベイズ更新

- 事後確率(0)＝尤度×事前確率(0)
- 事前確率(1)＝事後確率(0) ←更新1回目
- 事後確率(1)＝尤度×事前確率(1)
- 事前確率(2)＝事後確率(1) ←更新2回目
- 事後確率(2)＝尤度×事前確率(2)

:

- 事前確率(n)＝事後確率(n-1) ←更新n回目
- 事後確率(n)＝尤度×事前確率(n)

ベイズ更新の計算例

- １回目

更新回数

$$P^{(1)}(S_1) = P^{(0)}(S_1 | V) \approx 0.255$$

$$P^{(1)}(S_1 | V) = \frac{P(V | S_1) P^{(1)}(S_1)}{P^{(1)}(V)} \approx 0.253$$

$$P^{(1)}(S_2 | V) \approx 0.176$$

$$P^{(1)}(S_3 | V) \approx 0.176$$

$$P^{(1)}(S_4 | V) \approx 0.395$$

ベイズ更新の計算例

- ２回目

更新回数

$$P^{(2)}(S_1) = P^{(1)}(S_1 | V) \approx 0.253$$

$$P^{(2)}(S_1 | V) = \frac{P(V | S_1) P^{(2)}(S_1)}{P^{(2)}(V)} \approx 0.243$$

$$P^{(2)}(S_2 | V) \approx 0.141$$

$$P^{(2)}(S_3 | V) \approx 0.141$$

$$P^{(2)}(S_4 | V) \approx 0.475$$

ベイズ更新の計算例

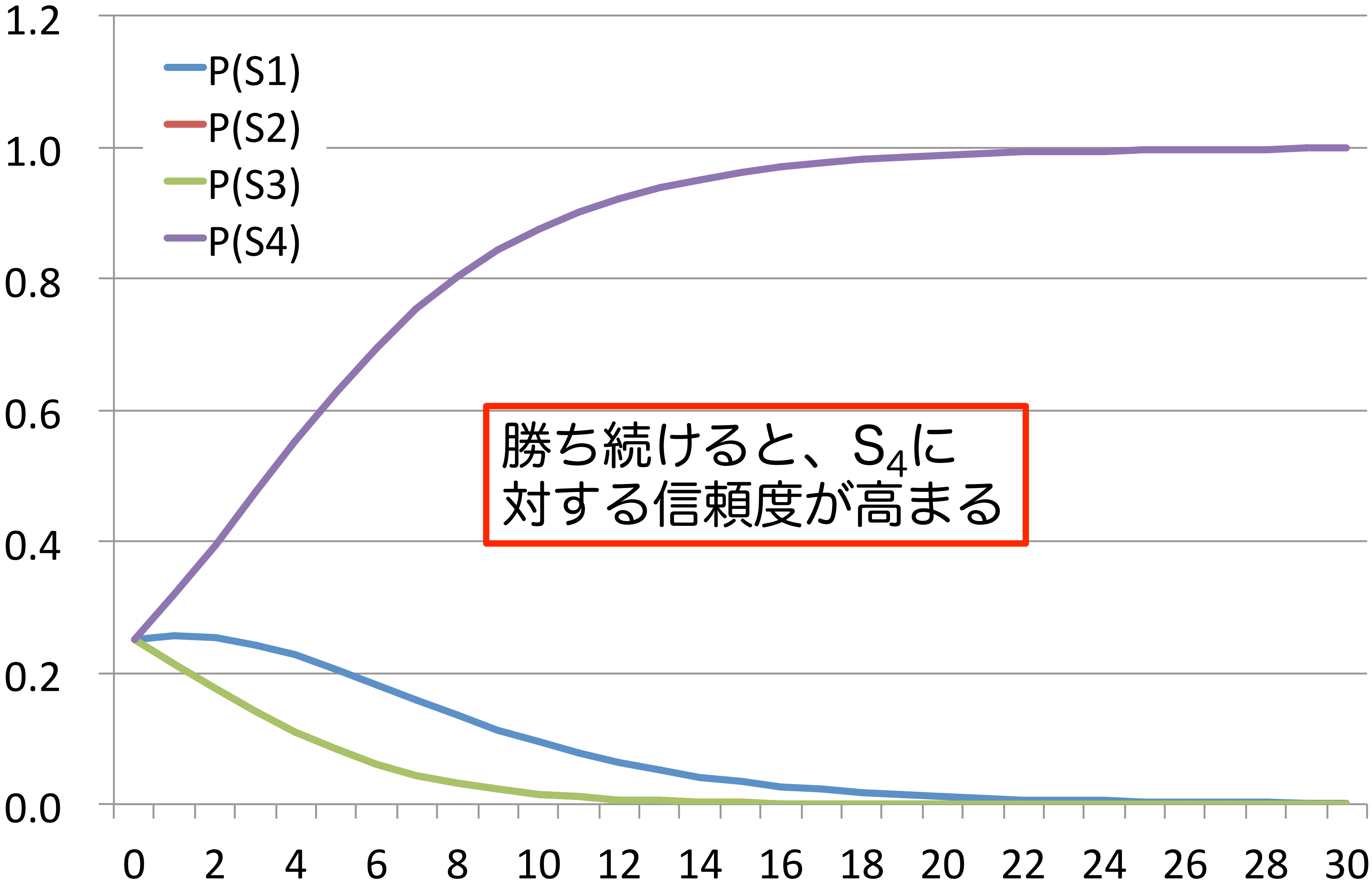
- 相手チームが勝ち続けていれば、戦術S_4が選ばれる確率が高くなる

尤度			
$P(V\|S_1)$	$P(V\|S_2)$	$P(V\|S_3)$	$P(V\|S_4)$
0.60	0.50	0.50	0.75

勝ち続けるとS_4への信頼度が高まる

更新回数	事前確率				勝率	事後確率			
	$P(S_1)$	$P(S_2)$	$P(S_3)$	$P(S_4)$	$P(V)$	$P(S_1\|V)$	$P(S_2\|V)$	$P(S_3\|V)$	$P(S_4\|V)$
0	0.250	0.250	0.250	0.250	0.588	0.255	0.213	0.213	0.319
1	0.255	0.213	0.213	0.319	0.605	0.253	0.176	0.176	0.395
2	0.253	0.176	0.176	0.395	0.624	0.243	0.141	0.141	0.475
3	0.243	0.141	0.141	0.475	0.643	0.227	0.109	0.109	0.554
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
29	0.002	0.000	0.000	0.998	0.750	0.001	0.000	0.000	0.999
30	0.001	0.000	0.000	0.999	0.750	0.001	0.000	0.000	0.999

ベイズ更新の計算例



1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
P(S1)
P(S2)
P(S3)
P(S4)
勝ち続けると、S_4に
対する信頼度が高まる

ベイズ更新の計算例

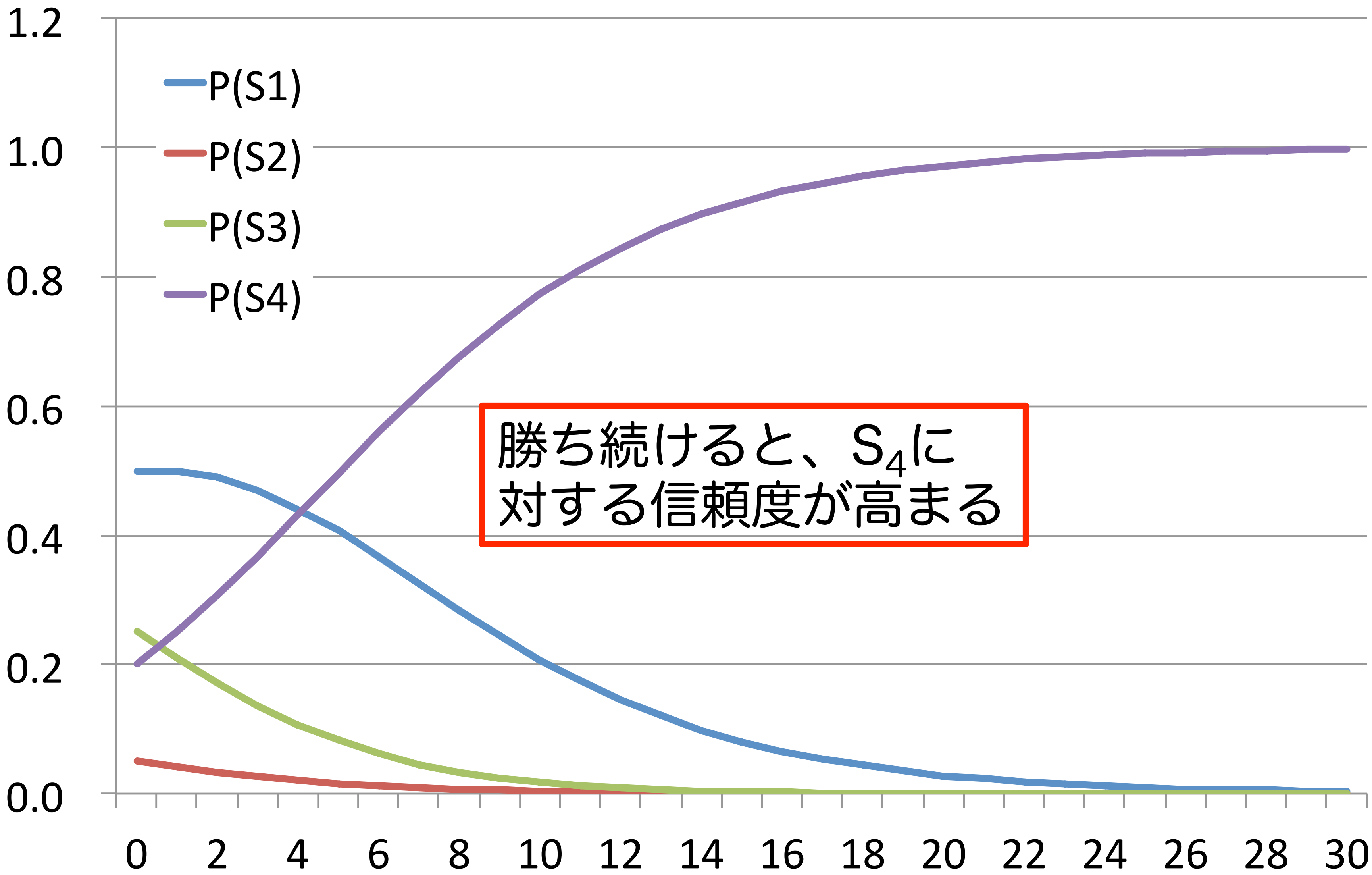
- 相手チームの情報があるとき
- 戦術S_4が選ばれる確率が高くなる

尤度			
$P(V\|S_1)$	$P(V\|S_2)$	$P(V\|S_3)$	$P(V\|S_4)$
0.60	0.50	0.50	0.75

勝ち続けると、S_4に対する信頼度が高まる

更新回数	事前確率				勝率	事後確率			
	$P(S_1)$	$P(S_2)$	$P(S_3)$	$P(S_4)$	$P(V)$	$P(S_1\|V)$	$P(S_2\|V)$	$P(S_3\|V)$	$P(S_4\|V)$
0	0.500	0.050	0.250	0.200	0.600	0.500	0.042	0.208	0.250
1	0.500	0.042	0.208	0.250	0.613	0.490	0.034	0.170	0.306
2	0.490	0.034	0.170	0.306	0.626	0.470	0.027	0.136	0.367
3	0.470	0.027	0.136	0.367	0.639	0.441	0.021	0.106	0.431
:	:	:	:	:	:	:	:	:	:
29	0.004	0.000	0.000	0.996	0.749	0.003	0.000	0.000	0.997
30	0.003	0.000	0.000	0.997	0.750	0.002	0.000	0.000	0.998

ベイズ更新の計算例



1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
P(S1)
P(S2)
P(S3)
P(S4)
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
勝ち続けると、S_4に
対する信頼度が高まる

相手チームの戦術選択

ベイズ更新による計算の結果、

- 相手チームの情報がないとき
- 相手チームの情報があるとき

いずれの場合でも相手チームは戦術S_4を選び続けることで勝利Vに対する信頼度が高まり、戦術S_4を選択する確率が高くなることがわかった。

あなたのチームの戦術選択

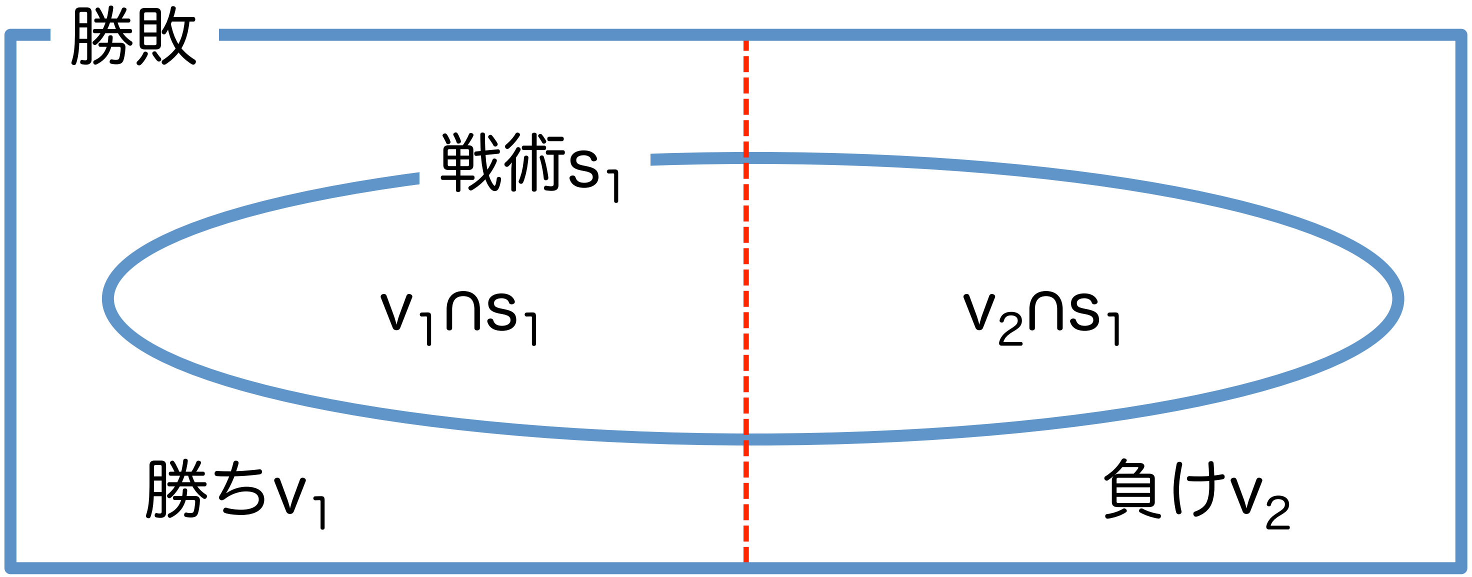
- 相手チームの戦術がわかったら、次はあなたのチームが戦術を考える番です。
- あなたのチームも4つの戦術(s_1, s_2, s_3, s_4)を使い分けることができる。
- アナリスト兼作戦立案者であるあなたは、ある作戦をとった条件下で試合に勝利する確率P(勝利|戦術)が最も高い作戦を選びたいと考えている。

あなたのチームの戦術選択

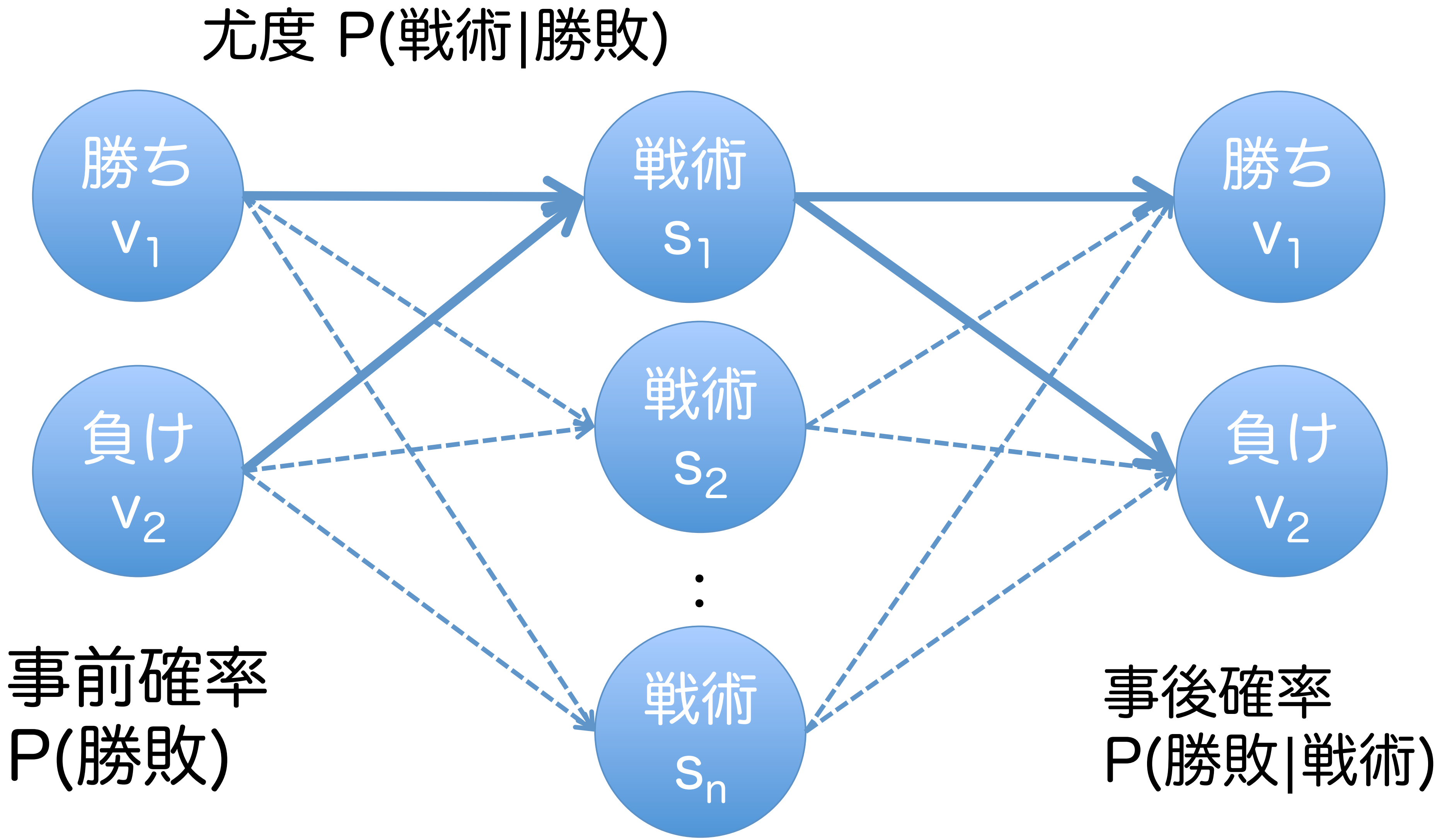
- 相手チームとは次の試合で初めて対戦することになるため、あなたのチームと相手チームの戦術の組み合わせによる勝敗に関するデータはありません。
- しかしこれまで他チームとの対戦経験で、相手チームが戦術S_4を選択したときに、あなたのチーム戦術に応じた勝敗数が分かっています。

あなたのチームの戦術選択

- あなたのチームが戦術s_1を選択した場合に試合に勝利(v_1)する事後確率$P(v_1|s_1)$



あなたのチームの戦術の検討



他チームとの対戦実績

- あなたのチームのこれまでの戦略別勝率は以下のとおりだとします。
- 全体としては勝ち試合数がやや上回っているものの、どの戦略も勝率は似たり寄ったりです。

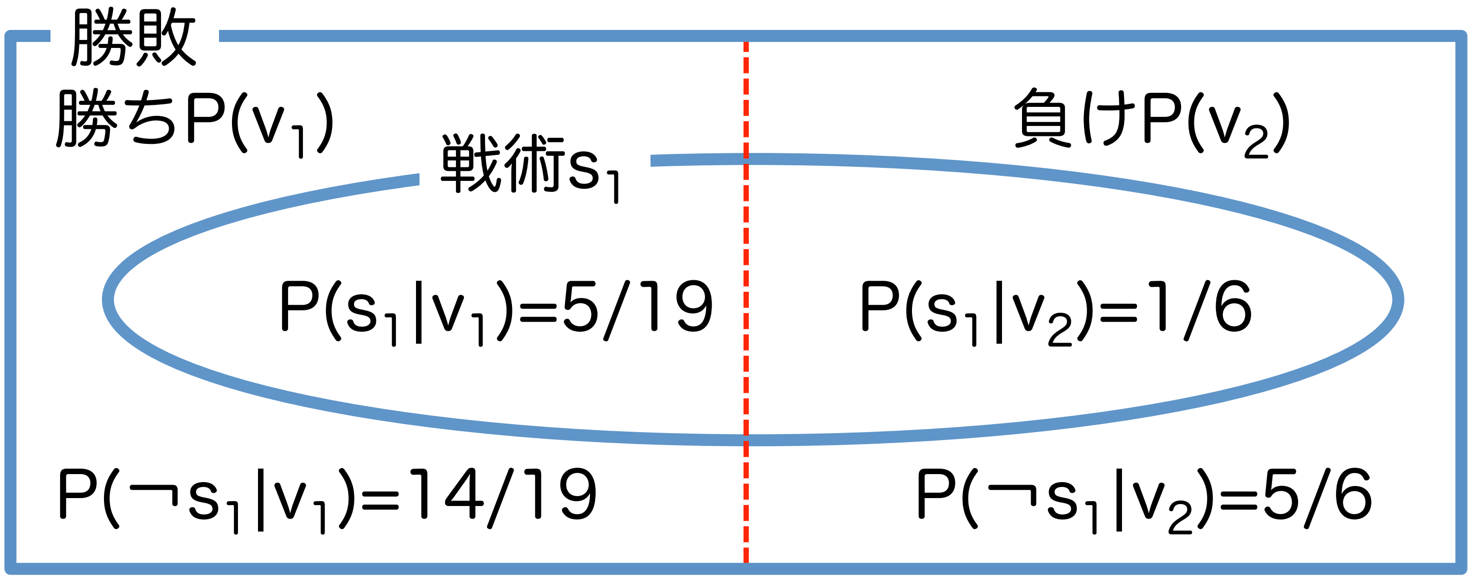
	s_1	s_2	s_3	s_4	合計
勝ちv_1	25	10	25	35	95
負けv_2	15	15	20	40	90
合計	40	25	45	75	185

あなたのチームの戦術選択

- 初めて対戦する相手とは勝敗の可能性はわからない。
- 他チームとは戦術を選んだ時の勝率はわかっている。
- これまでは戦術s_4を多く選んできたが、比較的勝率の高いs_1を選ぼうかと迷っている。
- 戦術s_4に対する信頼度は戦術s_1に対して高いといえるだろうか？

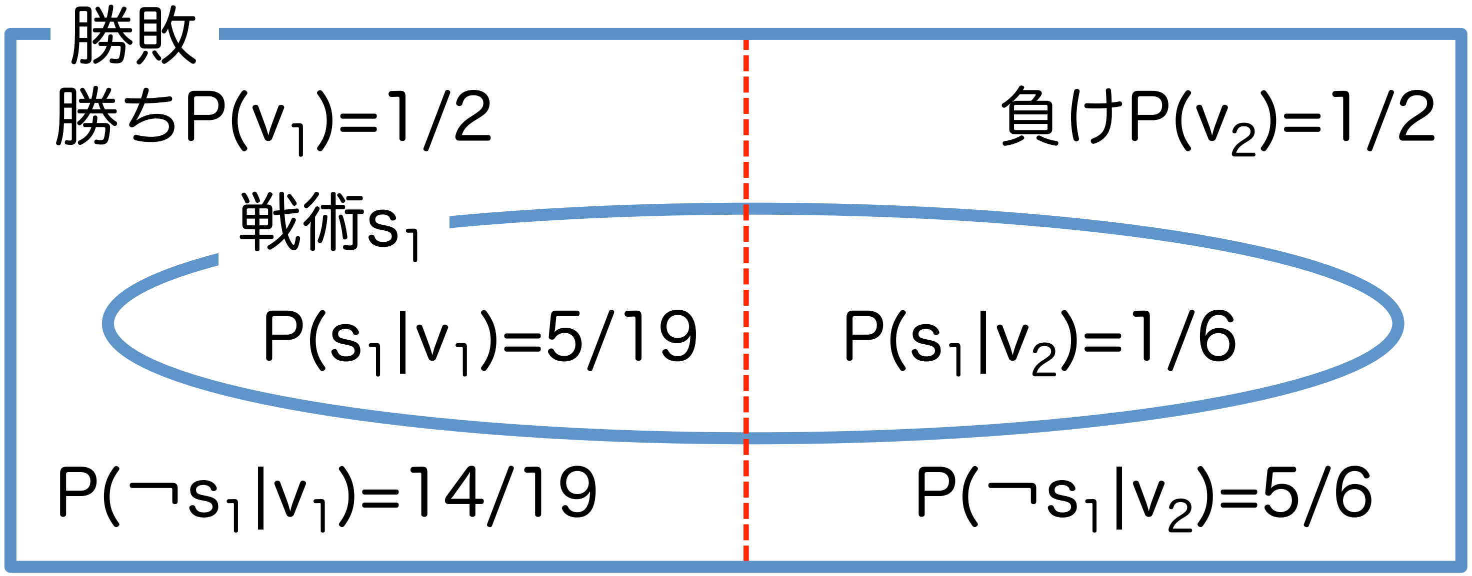
あなたのチームの戦術選択

- 初めて対戦する相手とは勝敗の可能性はわからない。
- 他チームとは戦術s_1を選んだ時の勝率はわかっている。



対戦実績がないとき

- 初めて対戦する相手とは勝敗の可能性はわからない。
- 「理由不十分の原則」を適用する
- $P(v_1)=P(v_2)=1/2$



対戦実績がないとき

- 「理由不十分の原則」での事後確率は？

$$P(v_1 \mid s_1) = \frac{P(s_1 \mid v_1)P(v_1)}{P(s_1)}$$

$$= \frac{P(s_1 \mid v_1)P(v_1)}{P(s_1 \mid v_1)P(v_1) + P(s_2 \mid v_2)P(v_2)}$$

$$= \frac{(5/19)\cdot(1/2)}{(5/19)\cdot(1/2) + (1/6)\cdot(1/2)} \approx 0.612$$

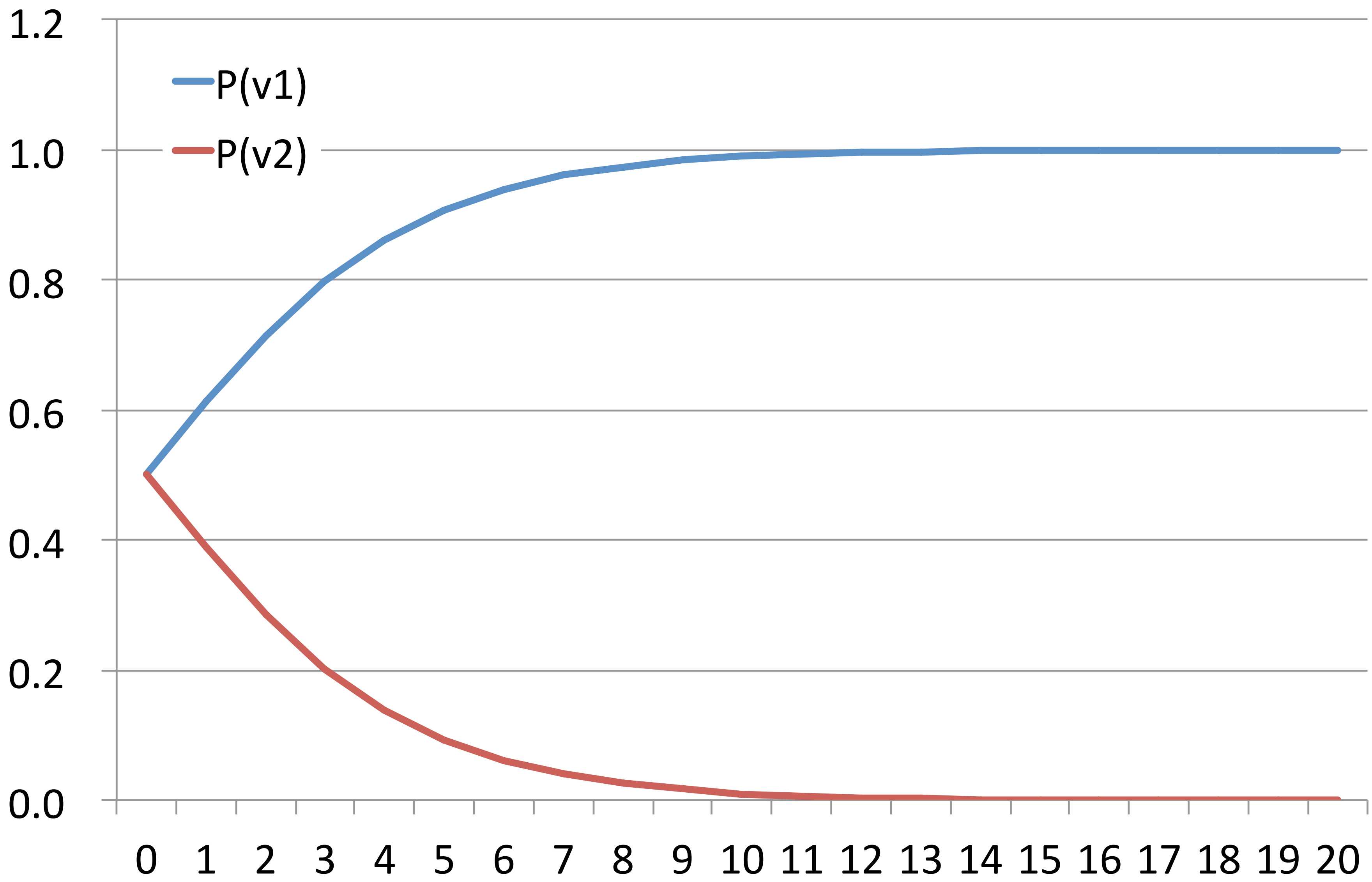
ベイズ更新の計算例

- 勝敗の実績がないとき
- 戦略s_1を選び続けると勝利に対する信頼度が高まる

尤度	
$P(s_1\|v_1)$	$P(s_1\|v_2)$
0.263	0.167

更新回数	事前確率		選択率	事後確率	
	$P(v_1)$	$P(v_2)$	$P(s_1)$	$P(v_1\|s_1)$	$P(v_2\|s_1)$
0	0.500	0.500	0.215	0.612	0.388
1	0.612	0.388	0.226	0.714	0.286
2	0.714	0.286	0.236	0.797	0.203
3	0.797	0.203	0.244	0.861	0.139
:	:	:	:	:	:
16	0.999	0.001	0.263	1.000	0.000
17	1.000	0.000	0.263	1.000	0.000

ベイズ更新の計算例



1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
P(v1)
P(v2)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

他チーム との対戦実績に基づくと

$$P\left(v_1 \mid s_1\right) = \frac{P\left(s_1 \mid v_1\right) P\left(v_1\right)}{P\left(s_1\right)}$$

$$= \frac{P\left(s_1 \mid v_1\right) P\left(v_1\right)}{P\left(s_1 \mid v_1\right) P\left(v_1\right) + P\left(s_2 \mid v_2\right) P\left(v_2\right)}$$

$$= \frac{\left(5/19\right) \cdot \left(95/185\right)}{\left(5/19\right) \cdot \left(95/185\right) + \left(1/6\right) \cdot \left(90/185\right)}$$

$$\approx 0.725$$

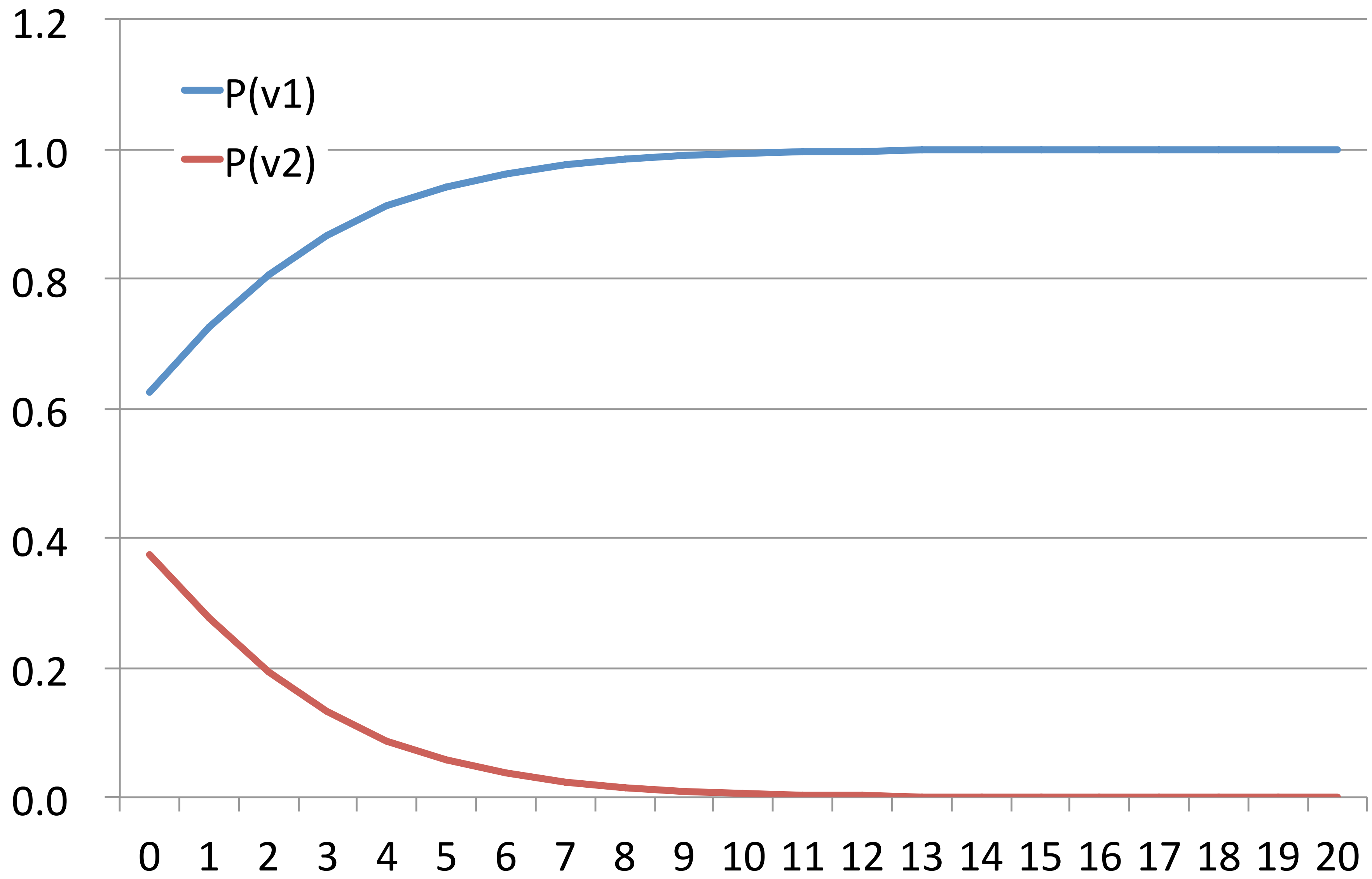
ベイズ更新の計算例

- 勝敗の実績があるとき
- 戦略s_1を選び続けると勝利に対する信頼度が高まる

尤度	
$P(s_1 \| v_1)$	$P(s_1 \| v_2)$
0.263	0.167

更新回数	事前確率		選択率	事後確率	
	$P(v_1)$	$P(v_2)$	$P(s_1)$	$P(v_1 \| s_1)$	$P(v_2 \| s_1)$
0	0.625	0.375	0.227	0.725	0.275
1	0.725	0.275	0.237	0.806	0.194
2	0.806	0.194	0.244	0.868	0.132
3	0.868	0.132	0.250	0.912	0.088
:	:	:	:	:	:
15	0.999	0.001	0.263	1.000	0.000
16	1.000	0.000	0.263	1.000	0.000

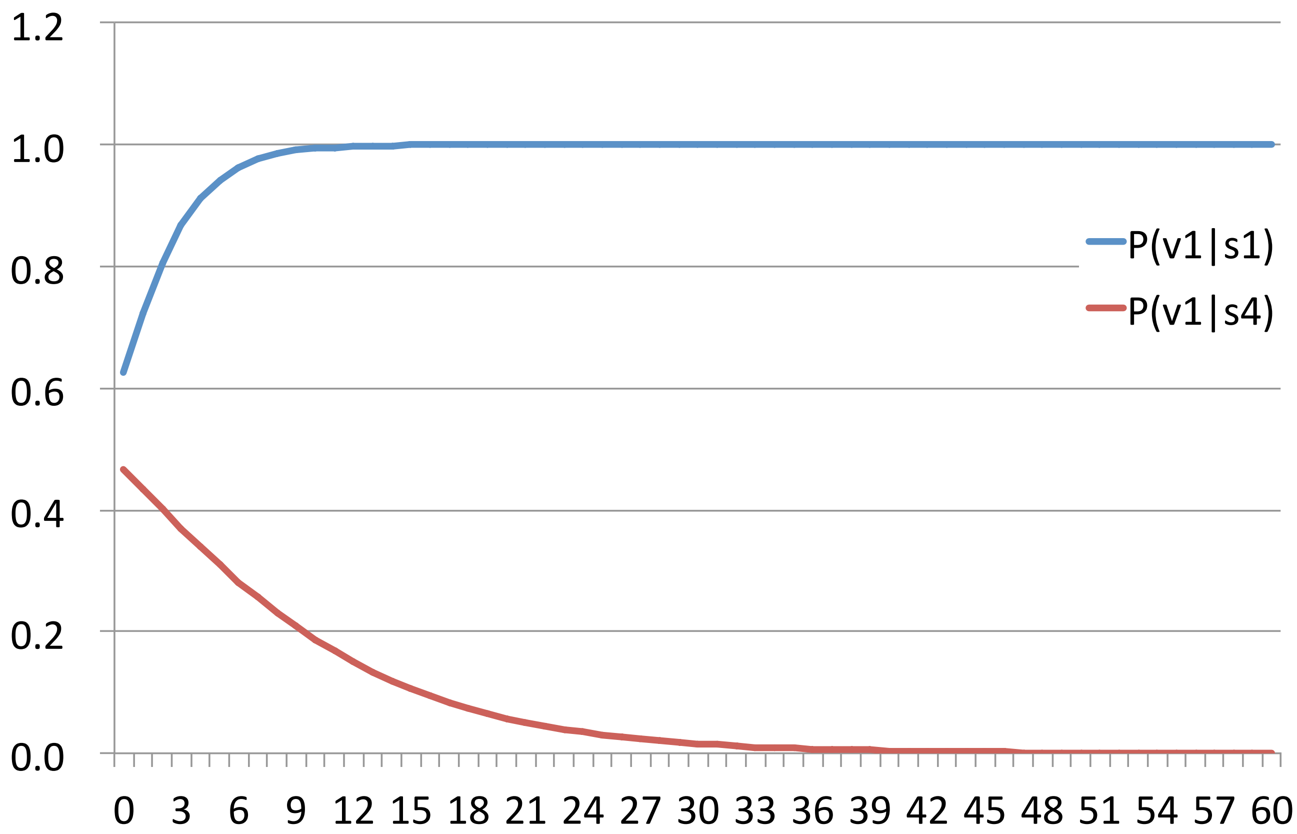
ベイズ更新の計算例



1.2
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
P(v1)
P(v2)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

戦術感の信頼度比較

- 戦術s_1に対して戦術s_4の信頼度は高いといえるだろうか？



実際に対戦すると…

- 実際の試合では、同じ戦術を選択しつづけるチームも、勝ち続けるチームもない
- 相手チームが戦術S_4を選択し続けるとして、あなたのチームは試行錯誤をすることとし、５試合で以下の戦術を取るとする。

$$s_1 \cdot \neg s_1 \cdot \neg s_1 \cdot s_1 \cdot s_1$$

- あなたは作戦立案者として、戦略s_1に対する勝利への確信度は薄らぐだろうか？

戦術s_1以外の尤度

- これまでは戦術s_1だけを選択し試合に勝つことだけを考えてきた
- 良い作戦立案者であるあなたは、
  - 試合に負ける場合
  - 他の戦術を選択した場合の勝敗
- についても検討するはず。

s_1の尤度		s_1以外の尤度	
$P(s_1 \| v_1)$	$P(s_1 \| v_2)$	$P(\neg s_1 \| v_1)$	$P(\neg s_1 \| v_2)$
0.263	0.167	0.737	0.833

５回の対戦結果によるベイズ更新

- １回戦（＝更新回数０回）：戦術s_1

$$P^{(0)}(v_1 \mid s_1) = \frac{P(s_1 \mid v_1)P^{(0)}(v_1)}{P(s_1 \mid v_1)P^{(0)}(v_1) + P(s_1 \mid v_2)P^{(0)}(v_2)}$$

$$\approx \underline{0.612}$$

$$P^{(0)}(v_2 \mid s_1) = 1 - P^{(0)}(v_1 \mid s_1) \approx \underline{0.388}$$

勝利することで戦術s_1に
対する信頼度が高まった

５回の対戦結果によるベイズ更新

- ２回戦（＝更新回数１回）：$\neg s_1$

$$P^{(1)}\left(v_1 \mid \neg s_1\right) = \frac{P\left(\neg s_1 \mid v_1\right)P^{(1)}\left(v_1\right)}{P\left(\neg s_1 \mid v_1\right)P^{(1)}\left(v_1\right) + P\left(\neg s_1 \mid v_2\right)P^{(1)}\left(v_2\right)}$$

$$\approx \underline{0.583}$$

$$P^{(1)}\left(v_2 \mid \neg s_1\right) = 1 - P^{(1)}\left(v_1 \mid s_1\right) \approx \underline{0.417}$$

勝率が下がることで戦術s_1以外の選択に対する信頼度が下がる

５回の対戦によるベイズ更新

- 戦術を変更することで勝率（勝利に対する信頼）が下がる。戦術を戻すと勝率（勝利に対する信頼）が上がる。

試合回数	更新回数	戦術	事前確率		選択率	事後確率	
			$P(v_1)$	$P(v_2)$	$P(s_1)$	$P(v_1\|s_1)$	$P(v_2\|s_1)$
1	0	s_1	0.500	0.500	0.215	0.612	0.388
2	1	$\neg s_1$	0.612	0.388	0.774	0.583	0.417
3	2	$\neg s_1$	0.583	0.417	0.777	0.552	0.448
4	3	s_1	0.552	0.448	0.220	0.661	0.339
5	4	s_1	0.661	0.339	0.230	0.755	0.245

ベイズ更新からベイズ統計へ

- ベイズ更新は迷惑メールのフィルタリングなどに用いられる。
- 変数（データ）が多く存在するとき、事前確率や尤度は離散的な確率分布だけでなく、連続的な確率分布になる。
- 統計データのモデル推定にベイズ更新を応用したものがベイズ統計である。