# ベイズ統計

古谷知之

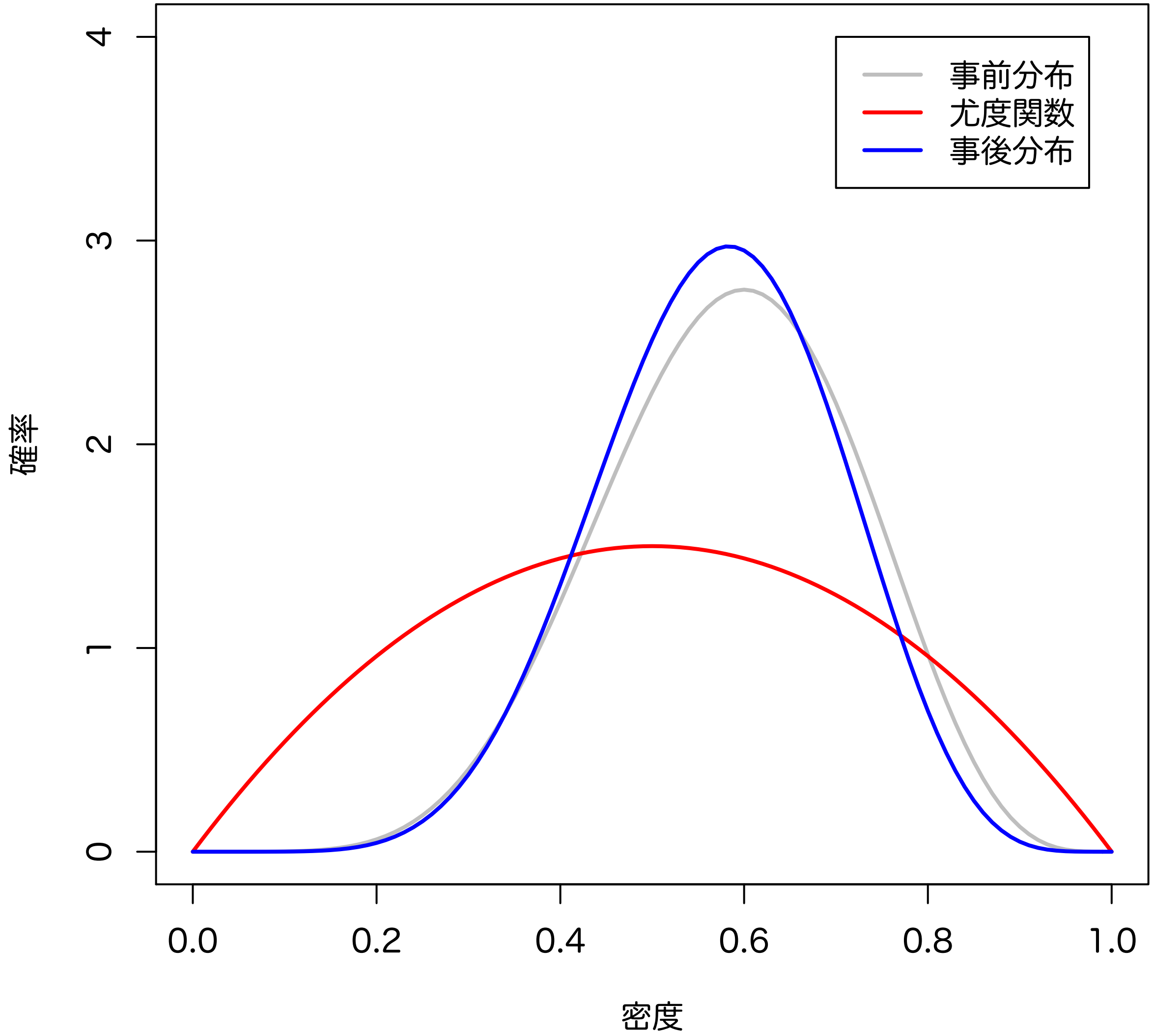
# 講義概要

- R演習：自然共役事前分布
  ①二項分布とベータ分布
  ②ポアソン分布とガンマ分布
  ③正規分布（平均）の推定
  ④正規分布（平均と分散）の推定

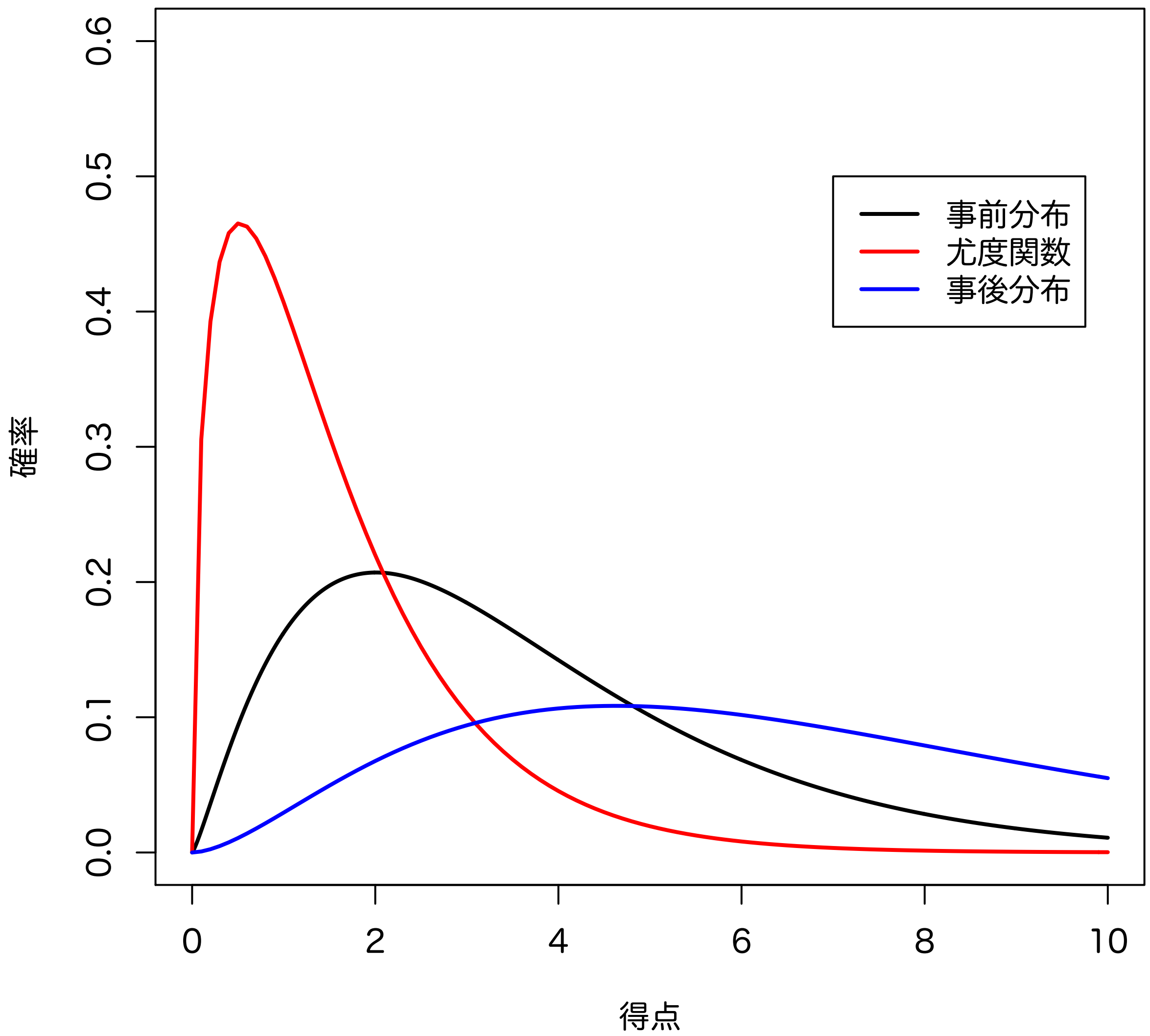
時間があれば…

- 尤度原理
- 継起の法則と理由不十分の原則
- 薬の効用とベイズ推定

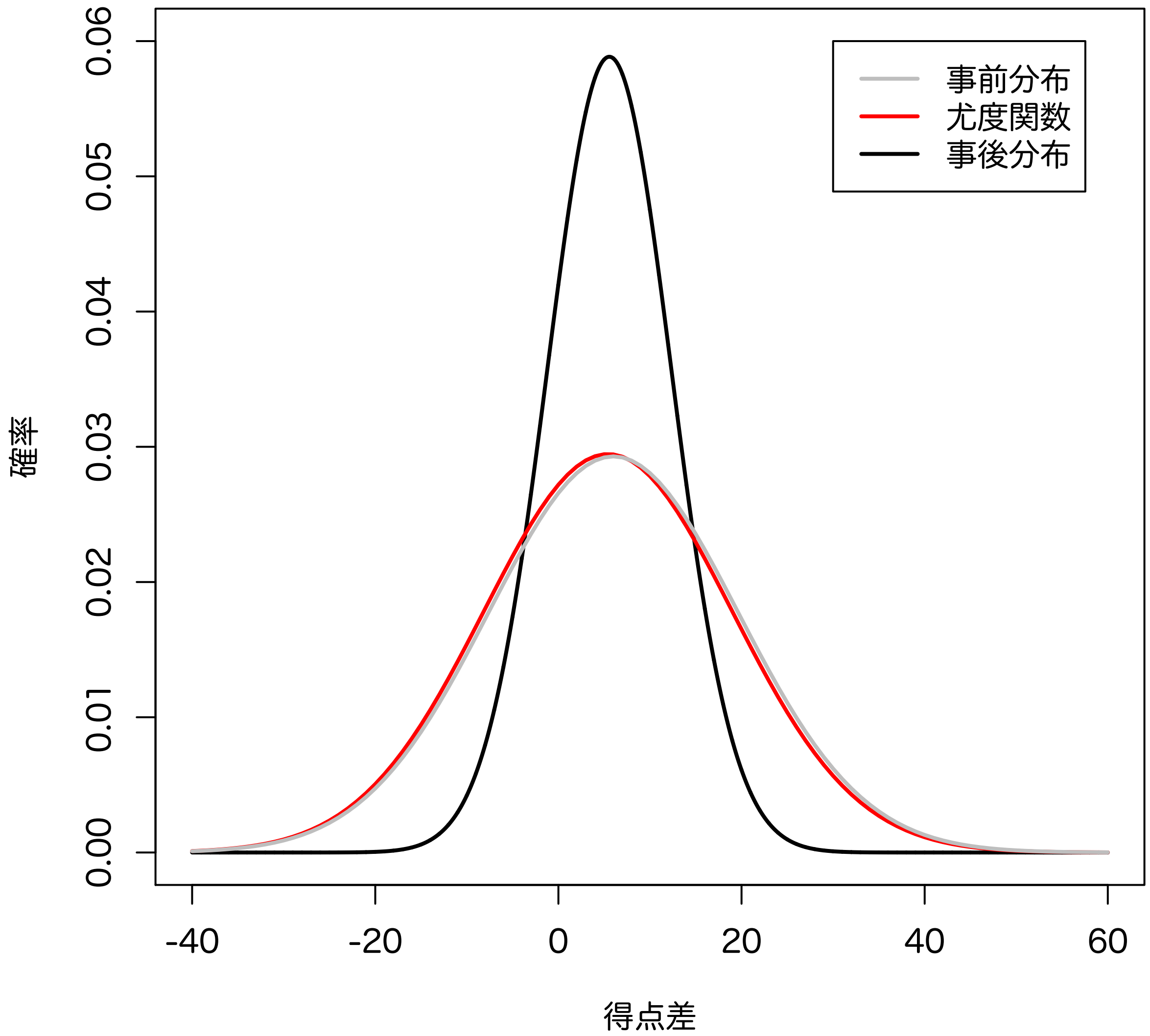
# 自然共役事前分布①
# 二項分布とベータ分布



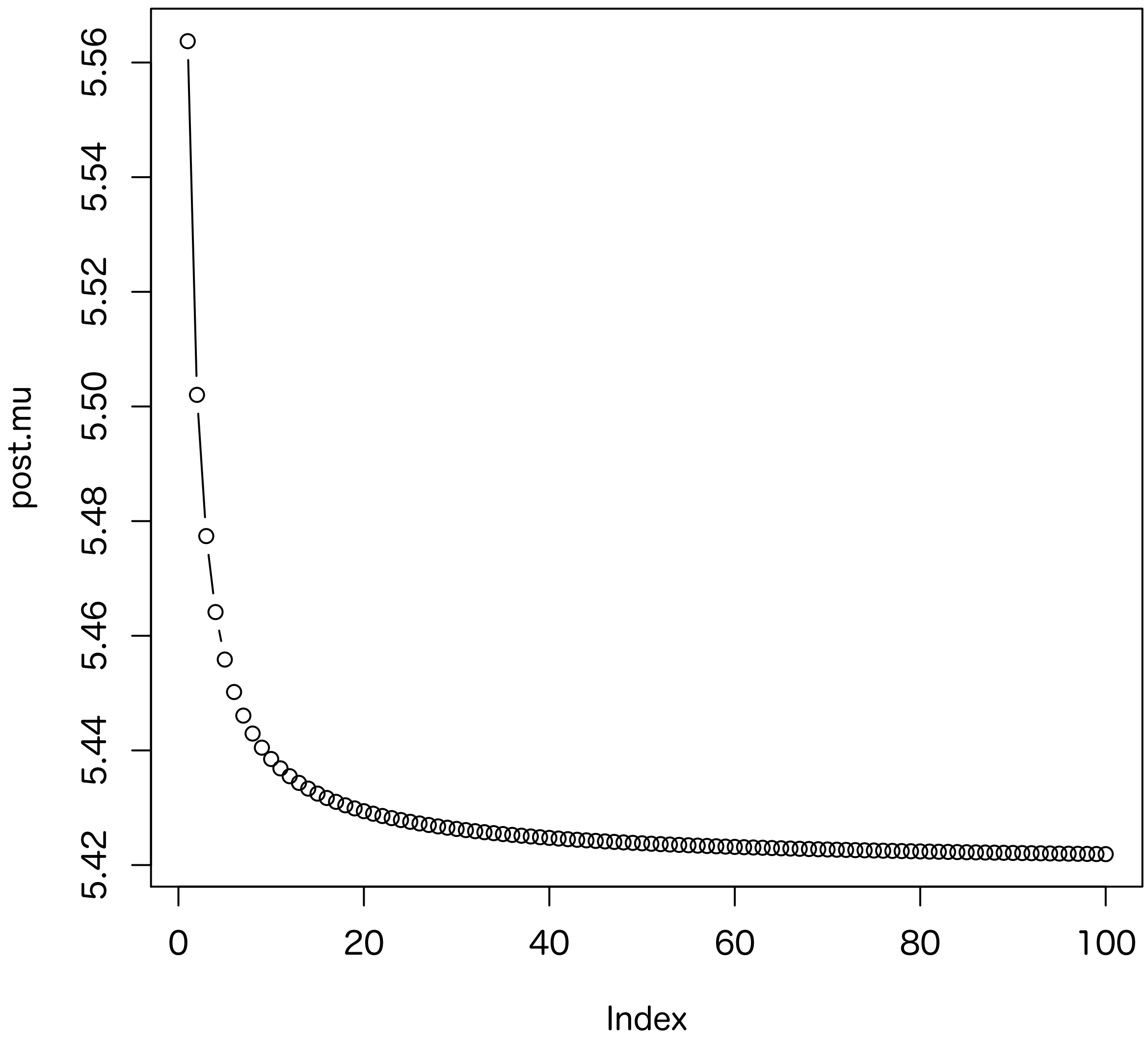
# 自然共役事前分布②
# ポアソン分布とガンマ分布



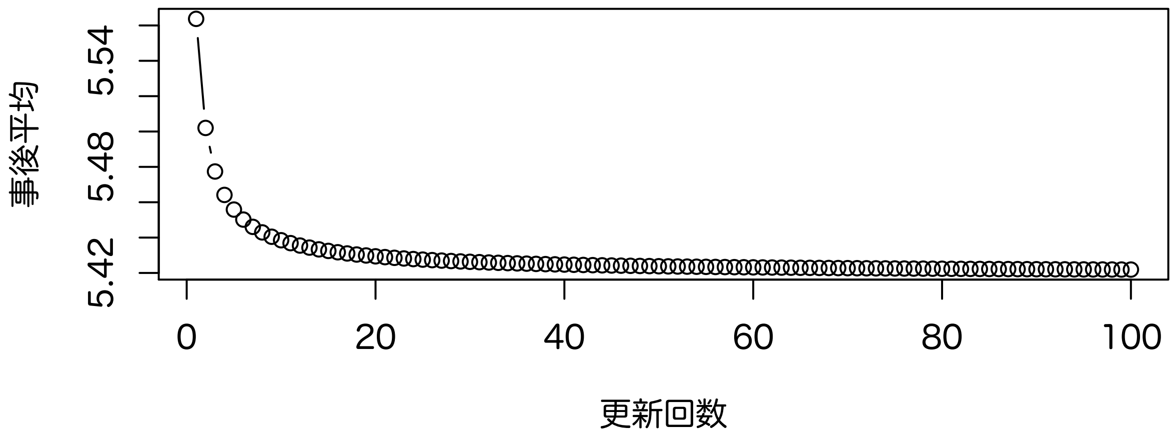
# 自然共役事前分布③
# 正規分布（平均）の推定

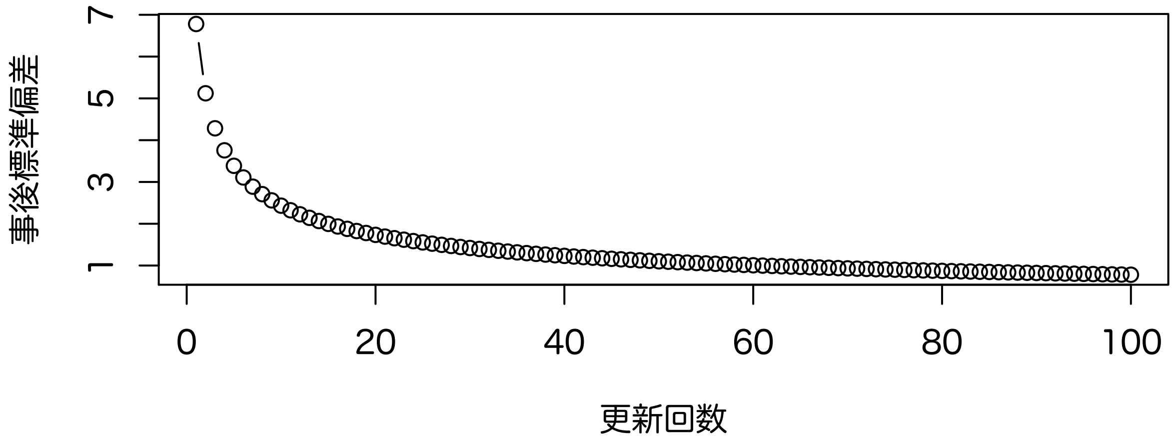


# 自然共役事前分布③
# 正規分布（平均）の推定



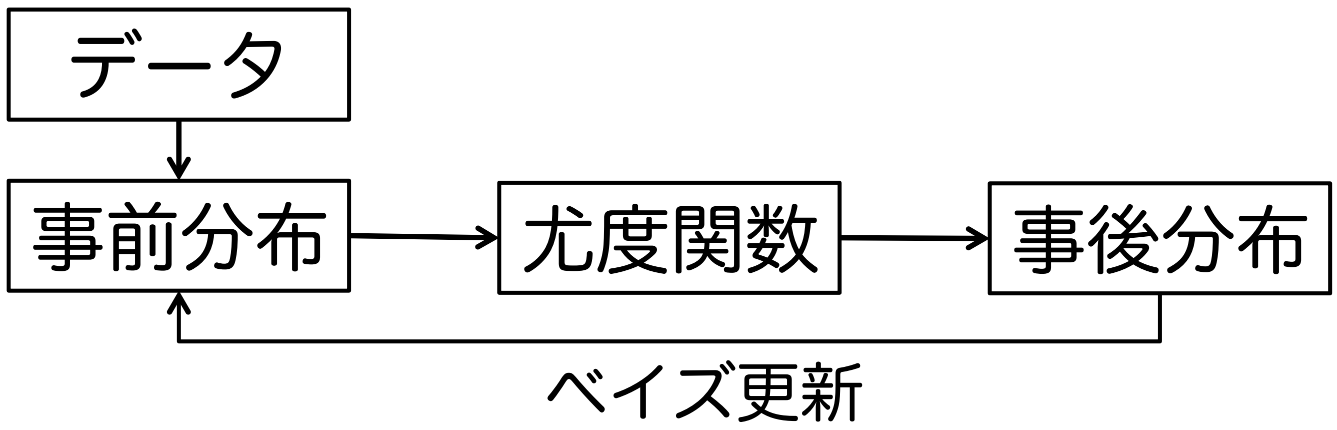
# 自然共役事前分布④
# 正規分布（平均と分散）の推定



# 経験ベイズ推定

- 事前分布をデータから与える方法を経験ベイズ(empirical Bayes)推定という
- 事前分布のパラメータを超パラメータ(hyper parameter)という
  - 事前分布の分散(精度)など



# 精度(precision)

- 正規分布をもちいてベイズ推定する際に、分散の逆数を精度として表すことがある

$$\tau = \frac{1}{\sigma^2}$$

- ベイズ統計では、精度がより重要である
- 分散が小さい⇔精度が高い
- 事後正規分布の精度は、事前正規分布の精度とデータの精度の和
- 事後正規分布の平均は、事前正規分布の精度とデータの精度の平均

# 正規分布の分散のベイズ推定

- 正規分布のベイズ推定における尤度関数

$$\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i \mid \mu, \sigma^2\right) \propto \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\left(x_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

$$\propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

- ここで $\alpha = n/2 - 1,\ \lambda = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2 \big/ 2$ と置き換えると、

$$\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i \mid \mu, \sigma^2\right) \propto \left(\frac{1}{\sigma^2}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\lambda \cdot \frac{1}{\sigma^2}\right)$$

# 正規分布の分散のベイズ推定

- さらに、$1/\sigma^2$を精度$\tau$で置き換えると

$$\prod_{i=1}^{n} f\left(x_i \mid \mu, \sigma^2\right) \propto \left(\tau\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\lambda \cdot \tau\right)$$

- これはガンマ関数Ga($\alpha$, $\lambda$)に比例する

$$\mathrm{Ga}\left(\alpha, \lambda\right) \propto \left(\tau\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\lambda \cdot \tau\right)$$

- すなわち事前分布の精度$\tau$に対して、自然共役事前分布としてガンマ分布を用いることと同じ意味を持つ

# ガンマ関数

- ガンマ関数は次式で表される

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

$$\alpha > 0$$

- ガンマ関数は以下のような性質を持つ

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

# ガンマ分布

- ガンマ分布の確率密度関数とその性質は次式のようになる

$$f(x) = \Gamma(\alpha, \lambda) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, \ x \geq 0$$

$$E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, \ V(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

# 正規分布の分散のベイズ推定

- さらにいえば、事前分布の分散$\sigma^2$に対する自然共役事前分布として、逆ガンマ分布を用いることと同じ意味である。
- 逆ガンマ分布は、正規分布のベイズ推定にはよく用いられる

- もっとも、事前分布の分散の事前分布として逆ガンマ分布を用いず、単に分散の逆数などとして与える場合もある=無情報事前分布

# 逆ガンマ分布

- 逆ガンマ分布

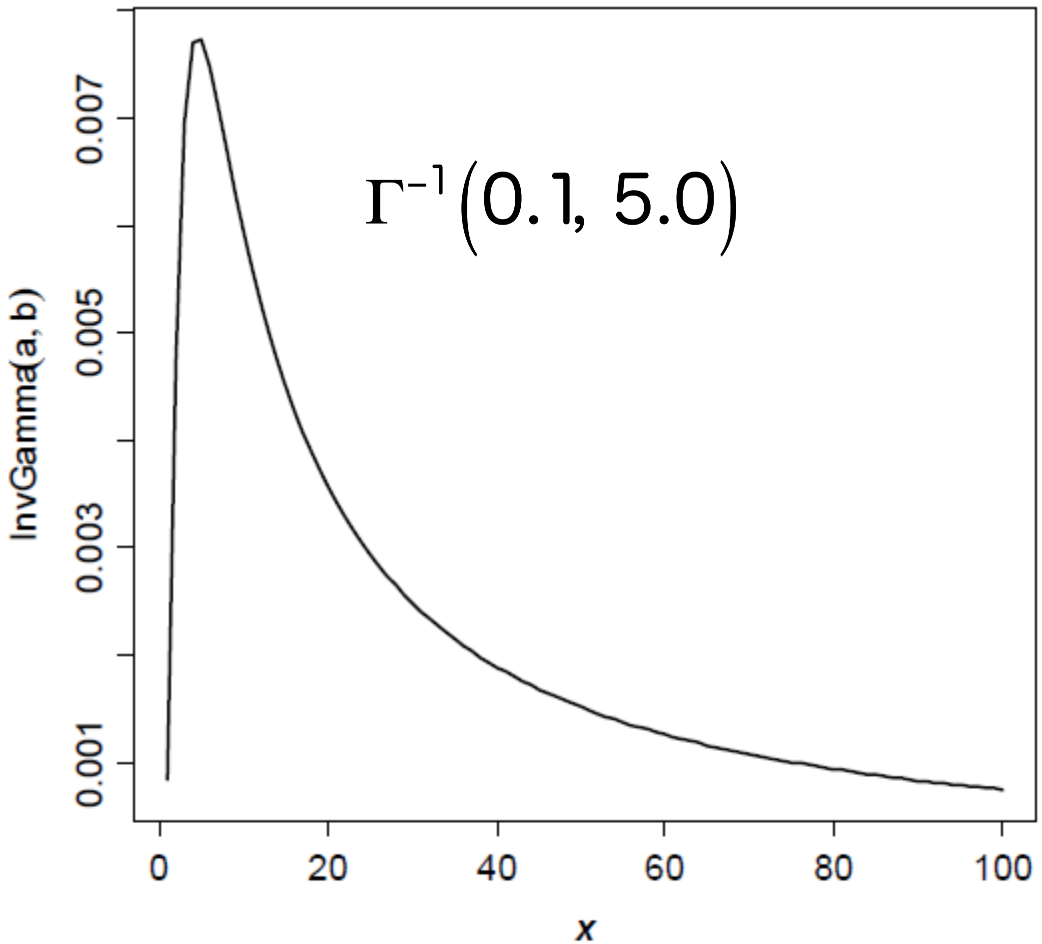
  $$\Gamma^{-1}(\alpha,\lambda) = \left(x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}\right)^{-1}$$

- 性質
  - 平均

    $\lambda/(\alpha-1),\ \alpha > 1$
  - 分散

    $$\frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\lambda-1)},$$

    $\alpha > 2,\ \lambda > 1$



# 階層ベイズ推定

- 事前分布をベイズ推定する方法を階層ベイズ(hierarchical Bayes)推定という
- 事前分布の超パラメータをベイズ推定する
  - 事前正規分布の分散(逆ガンマ分布に従う)の超パラメータのベイズ推定