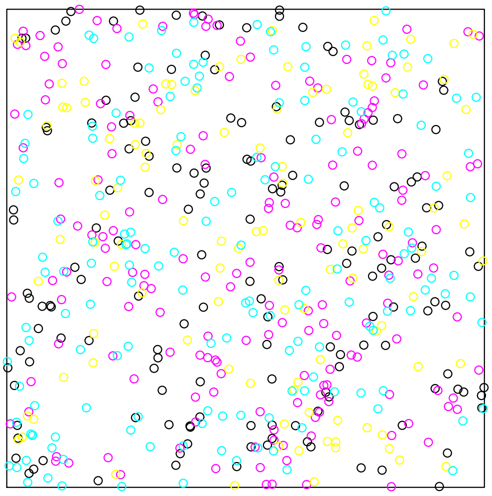
空間モデリング

古谷知之

空間点過程

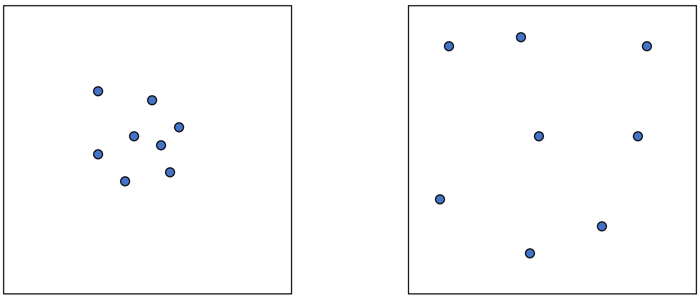
- カーネル密度関数
- 点データ分布のランダム性
  - コドラート法によるχ2検定
  - コルモゴロフ・スミルノフ検定
  - ポアソンモデルを推定する方法
  - F関数、G関数、K関数（L関数）、J関数

空間点過程



「点の度数」と「点の密度」

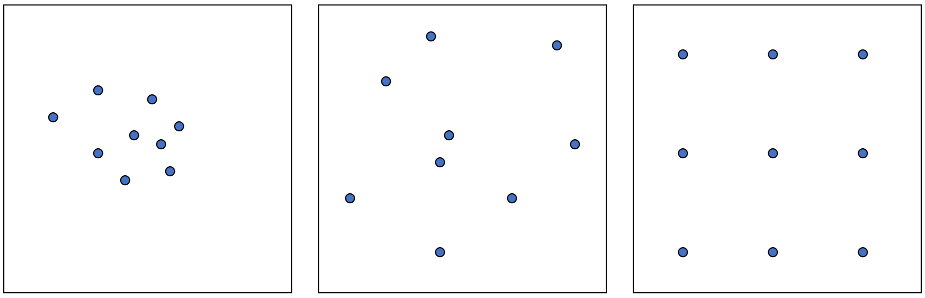
- 点の度数：任意の空間範囲に存在する点の数
- 点の密度：単位面積当たりの点の度数



度数も密度も同じだが，分布パターンが異なる

点の分布パターン

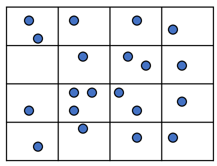
- 典型的な点パターン



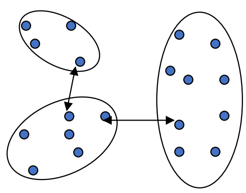
凝集型　ランダム型　均等型

点分布パターン分析の方法

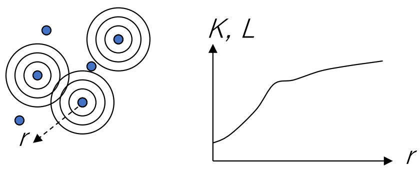
- 区画法（コドラート法）



- 最近隣距離法



- リプリーのK関数・L関数法



区画法（コドラート法）

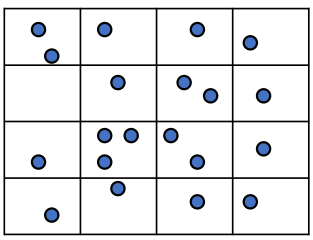
- 点分布パターンのランダム性を検出
- ランダムな点分布がポアソン分布に従う
- ランダム性をχ^2検定する
- 分散平均比

χ^2統計量による検定

- 与えられた点分布がランダムかどうかをχ^2検定

$$\chi^2 = \sum_{x=0}^{k} \frac{(O_x - E_x)^2}{E_x}$$

$$E_x = qP(x) = q\,\frac{(\rho a)^x e^{-\rho a}}{x!}$$



- O_x： x個の点を持つ区画の数（実測度数）
- 自由度$k-1$のχ^2分布に従う

ポアソン分布

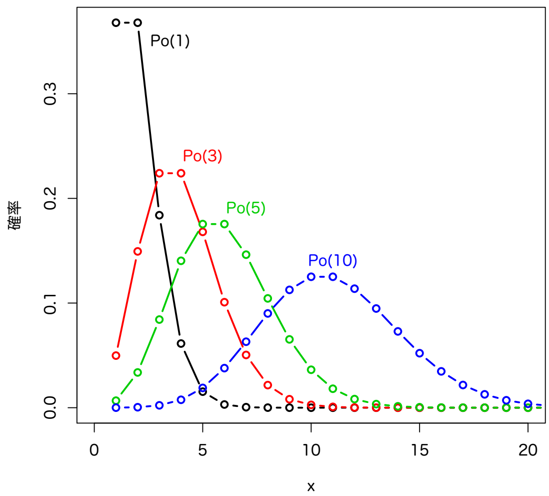
- N個の点が互いに独立して任意の区画に同じ確率で現れる場合，点分布はポアソン分布となる

$$P(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$\lambda = \rho a = (N/A) \cdot (A/q) = N/q$$

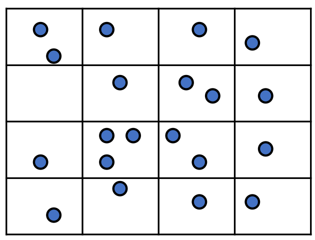
a：区画面積＝対象地域の面積A/区画数q

ρ：単位面積あたりの平均点数（点密度）



例題 1

- 右図のような点パターンについて，ランダム分布がポアソン分布に従うと仮定して，そのχ^2適合度を検定しなさい



$$\chi^2 = (O_0 - E_0)^2/E_0 + (O_1 - E_1)^2/E_1 + (O_2 - E_2)^2/E_2 + (O_3 - E_3)^2/E_3 =$$

点の数x	実測度数 O_x	確率値$P(x)$	理論度数E_x	$(O_x - E_x)^2/E_x$
0	1			
1	11			
2	3			
≧3	1			

分散平均比

- 与えられた点分布がポアソン分布によるランダム分布に従うなら，その分散平均比は１となる

$$I = \frac{s^2}{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{q}(x_i - \bar{x})^2/q}{\sum_{i=1}^{q} x_i/q}$$

- 分散平均比をχ^2検定する

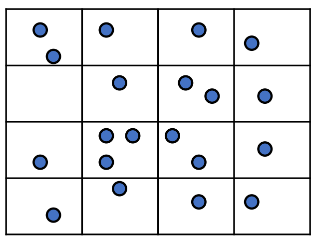
$$\chi^2 = \frac{s^2}{\bar{x}}(q-1)$$

- χ^2統計量は自由度$(q-1)$のχ^2分布に従う

例題２

- 右図のような点パターンについて，分散平均比法をもちいて，ランダム性のχ^2適合度を検定しなさい

$$\bar{x} = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16} x_i =$$



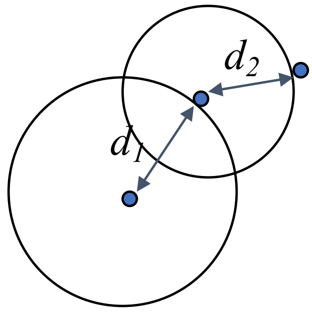
$$s^2 = \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{16}(x_i - \bar{x})^2 =$$

$$\chi^2 = \frac{s^2}{\bar{x}}(16-1) =$$

最近隣距離法（１）

- ある地域の任意の点iについて最近隣点を見つけ，最近隣点までの距離d_iを測定
- 地域内のN個の距離の平均値rにより最近隣距離を定義

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i}{N}$$



最近隣距離法（２）

- ランダムに選んだ点を中心にした半径rの円の中に，点が現れない確率

$$P(x=0) = exp(-\pi\rho r^2)$$

- 少なくとも一つ点が現れる確率$F(r)$

$$F(r) = 1 - P(x=0) = 1 - exp(-\pi\rho r^2)$$

- 最近隣距離の確率密度関数$f(r)$

$$f(r) = dF(r)/dr = 2\pi\rho r \cdot exp(-\pi\rho r^2)$$

最近隣距離法（３）

- 最近隣距離の期待値＝平均値

$$E(r) = \int_0^\infty r f(r) dr = \frac{1}{2\sqrt{\rho}}$$

- 最近隣距離の分散

$$Var(r) = E(r^2) - E^2(r) = (4-\pi)/4\pi\rho$$

最近隣指数によるランダム性の検定

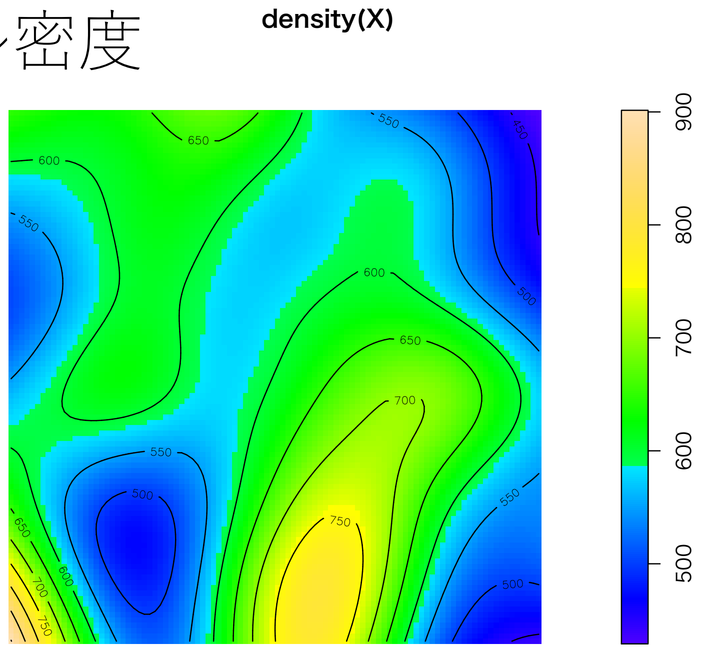
- 最近隣指数R

$$R = \frac{r}{E(r)} = 2r\sqrt{\rho}$$

- 標準化正規確率の限界値との比較

$$Z_R = \frac{r - E(r)}{\sqrt{Var(r)}} = \frac{E(r)(R-1)}{\sqrt{Var(r)}}$$

カーネル密度



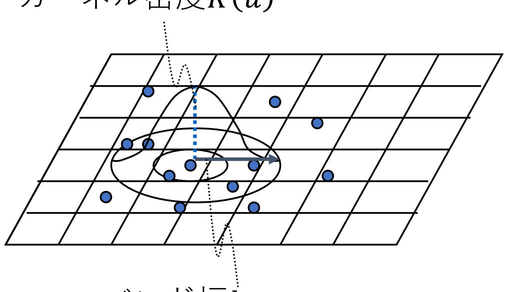
点密度の推定量$\hat{\lambda}(x)$とカーネル密度関数

- 点密度の推定量$\hat{\lambda}(u)$

$$\hat{\lambda}(x) = \frac{1}{h^2 q(u)} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h^2} K\left(\frac{x_i - u}{h}\right)$$

h：バンド幅、 $q(u)$：境界修正

$K\left(\frac{x_i - u}{h}\right)$：カーネル密度関数（単に$K(u)$と表す）

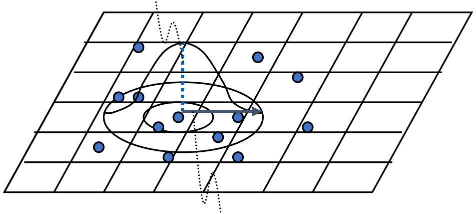


- ガウス関数型のカーネル密度関数

$$K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\mu\sigma}} exp\left(-\frac{\|x_i - \bar{x}\|^2}{2\sigma^2}\right)$$

代表的なカーネル密度関数

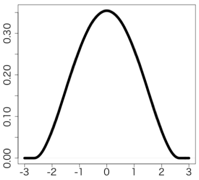
カーネル密度$K(u)$



バンド幅h

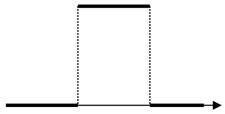
- 四次関数

$$K(u) = \frac{3}{\pi}(1 - u^2)I(|u| \leq 1)$$



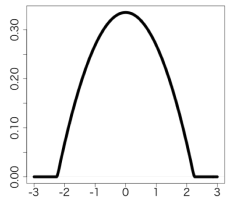
- 一様関数

$$K(u) = I(|u| \leq 1)$$
$$= \begin{cases} 1, |u| \leq 1 \\ 0, |u| > 0 \end{cases}$$



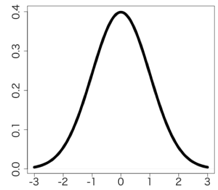
- イパクニコフ関数

$$K(u) = (1 - u^2)I(|u| \leq 1)$$



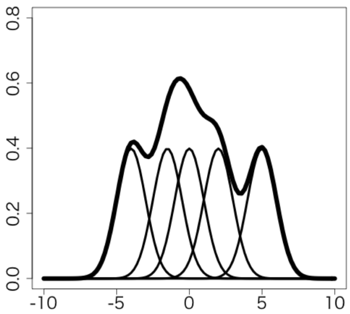
- ガウス関数

$$K(u) = exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$$

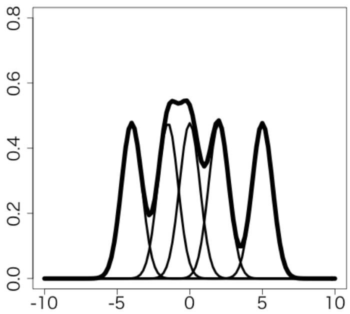


バンド幅を変更した場合のカーネル密度の変化

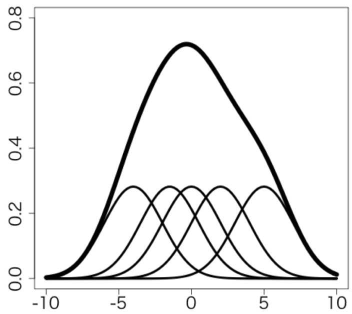
- ガウス関数型の場合



バンド幅=0.7



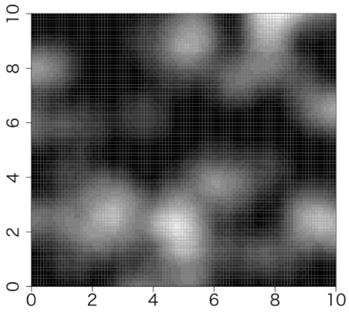
バンド幅=1



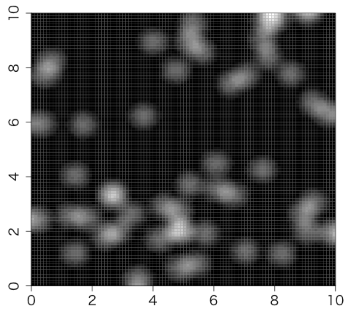
バンド幅=2

バンド幅を変更した場合のカーネル密度の変化

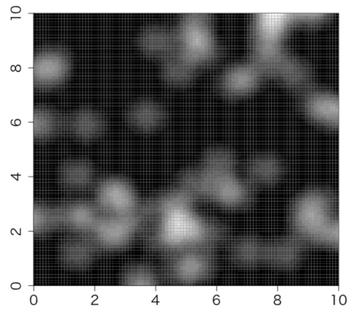
- 四次関数型の場合



バンド幅=1



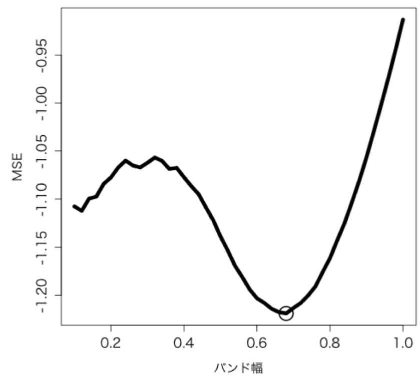
バンド幅=0.7



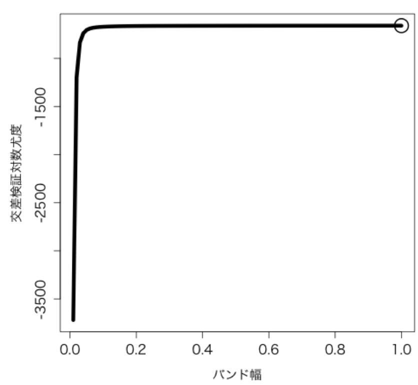
バンド幅=0.5

バンド幅$\boldsymbol{h}$の決定方法

- 点密度推定量$\hat{\lambda}(u)$の平均最小二乗誤差(MSE)の積分を考え、積分値を最小にするようにバンド幅hを決定する方法



- マーク付き点過程を用いる場合、交差検証対数尤度関数を用いて、対数尤度を最大にするようなバンド幅hを決定する方法がある



K関数法（１）

- Repley (1977, 1981)により提案
- 区画法の点密度と距離パラメータを併用
- K関数：ランダムに選んだ点を中心とした半径dの円内に含まれる点の数に関する平均の，全地域の点密度に対する比率
- ポアソン分布の場合のK関数

$$K(d) = \pi d^2$$

$$\because \rho K(d) = \rho a = \rho \pi d^2$$

K関数法（２）

- 与えられた点分布において，任意の点x_iに対する半径dの円内に含まれる他の点の個数$N_i(d)$ は，

$$N_i(d) = \sum_{i \neq j} I\left(\|x_i - x_j\| \leq d\right)$$

$$I\left(\|x_i - x_j\| \leq d\right) = \begin{cases} 1, \|x_i - x_j\| \leq d \\ 0, \|x_i - x_j\| < d \end{cases}$$

- $K(d)$の推定量は，

$$\widehat{K}(d) = \sum_{i \neq j} \sum_{j \neq i} I\left(\|x_i - x_j\| \leq d\right)$$