

空間モデリング

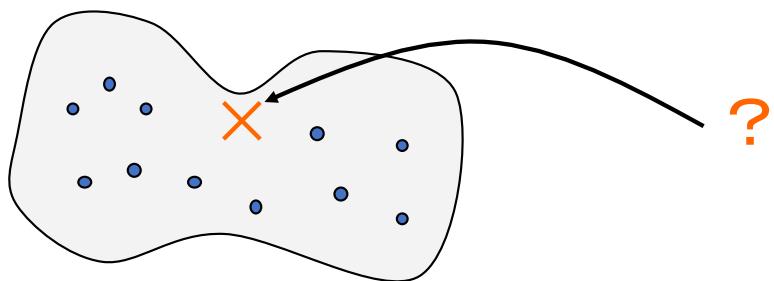
古谷知之

講義内容

- 空間内挿補間
- 逆距離荷重法
- クリギング補間
- セミバリオグラム

空間内挿とは

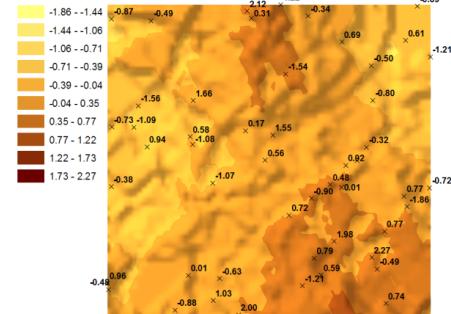
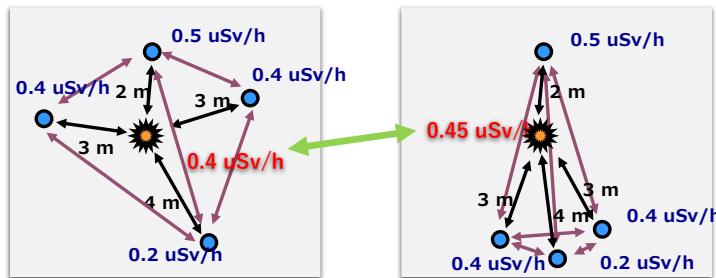
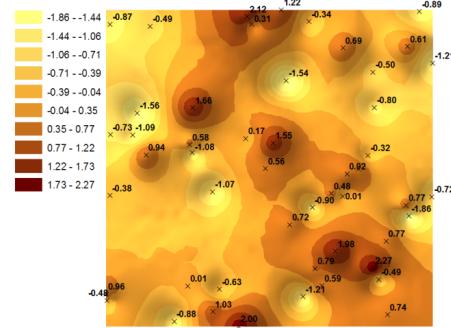
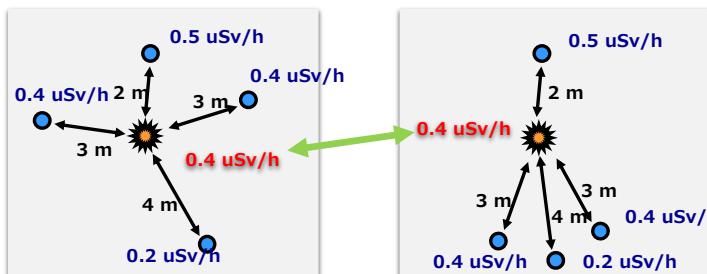
- ・鉱脈を見つけるには？
- ・幾つかの地点をボウリングし、サンプル地点で得られた鉱物含有量の分布と変化、標高などの結果を元に、鉱脈の空間的連続性を予測する。



空間内挿とは

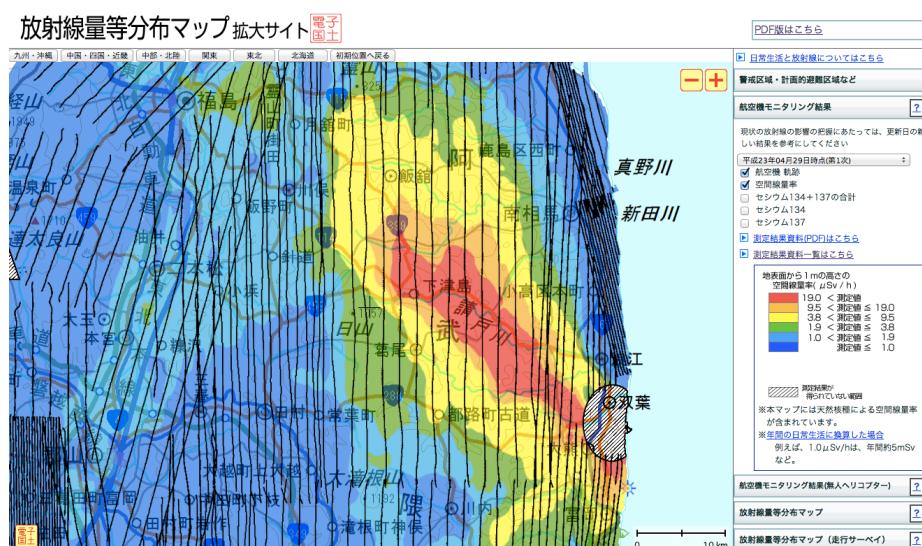
- ・限られた空間標本データから、より広範囲な空間の状況を把握するための技法
- ・離散型補間
 - ・TIN (Triangulated Irregular Network)
 - ・逆距離加重法 (Inverse Distance Weighted: IDW)
- ・連続型補間
 - ・スプライン関数法
 - ・クリギング(Kriging)法

逆距離荷重法(上)とクリギング法(下)



航空機サーベイデータの空間内挿補完

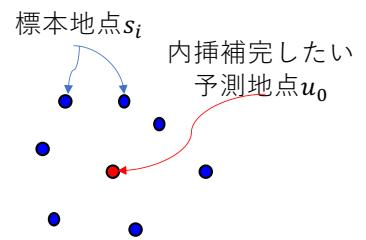
- 国が作成していた航空機サーベイデータを用いた放射線量等分布マップの作成には逆距離荷重法を採用



逆距離荷重法

- 観測地点 s_i での空間属性を $Z(s_i)$ 、観測されなかった地点 u_0 での空間属性推計値を $Z(u_0)$ とする
- 観測された空間属性 $Z(s_i)$ に対する未知の空間属性の推定値 $Z(u_0)$ を、その周辺 n 個の観測値 Z_i の重みつき移動平均により計算

$$Z(u_0) = \sum_{i=1}^n w(s_i) Z(s_i)$$
$$\sum_{i=1}^n w(s_i) = 1$$



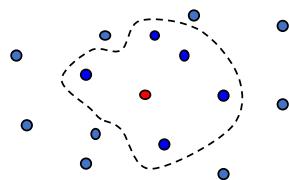
- 重みは地点 s_i と u_0 の距離関数 $w(s_i) = \|s_i - u_0\|^{-p}$

逆距離荷重法の手順

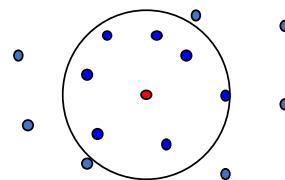
- 距離関数 $w(s_i)$ を決定する
- 予測したい地点からどの範囲の観測地点のデータを用いて予測したいか（検索半径）を指定する
- 検索半径内の観測データを用いて予測地点 u_0 の属性値 $Z(u_0)$ を計算する

IDWにおける検索半径

- 最近隣法（可変検索半径、可変半径法）
 - 対象セルから最も近いポイントを指定された分だけ検索し、それらの値を利用。
- 固定半径法（固定検索半径法）
 - 対象セルから指定された半径内に入るポイントを検索し、それらの値を利用。



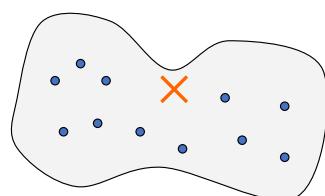
最近隣法



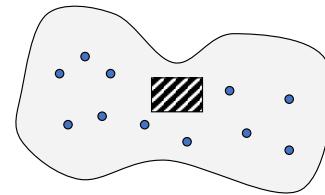
固定半径法

クリギング (Kriging)

- **通常クリギング**
 - ある地点における値を予測



- **普遍クリギング**
 - ある領域における平均値を予測
 - 通常クリギング + 地域トレンド



Kriging法の基本的な考え方

- 観測地点 s_i での空間属性観測値を $Z(s_i)$ 、観測されなかった地点 u_0 での空間属性推計値を $Z(u_0)$ とする
- 観測値 $Z(s_i)$ が独立した k 個の変数 $X_k(s_i)$ を用いて説明できるとする
- 線形回帰モデルを用いて以下のように表せるとする

$$Z(s) = \sum_{k=1}^m X_k(s)\beta_k + \varepsilon(s)$$
$$\varepsilon(s) \sim N(\mu, \sigma^2)$$

- β_k は回帰係数、誤差項 $\varepsilon(s)$ は互いに独立な正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従う

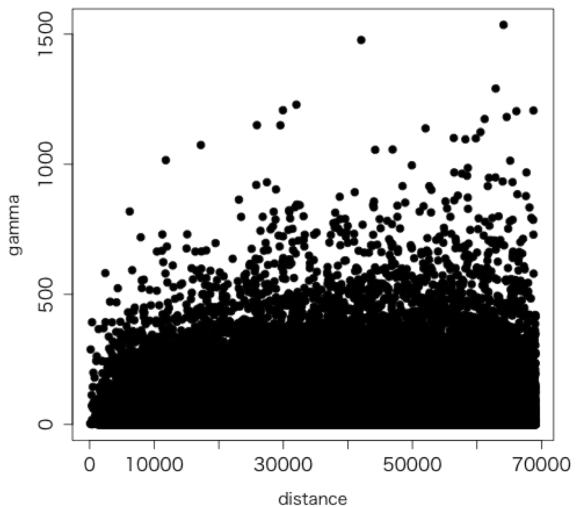
セミバリオグラム

- 観測地点 s_i と s_j の距離を $h_{ij} = \|s_i - s_j\|$ とする
- $Z(s_i)$ と $Z(s_j)$ の共分散 γ を距離 h_{ij} の関数で表すことを考える
$$2\gamma(h_{ij}) = Cov\{Z(s_i), Z(s_j)\}$$
- ここから、セミバリオグラムを次式のように定義する
$$\begin{aligned}\gamma(h_{ij}) &= \frac{1}{2}E\left[\left(Z(s_i) - Z(s_j)\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{2}E\left[\left(Z(s_i) - Z(s_i + h_{ij})\right)^2\right]\end{aligned}$$
- 一般に、地点 s_i から距離 h だけ離れた地点との関係を次式のように表す

$$\gamma(h) = \frac{1}{2}E\left[\left(Z(s_i) - Z(s_i + h)\right)^2\right]$$

バリオグラム雲

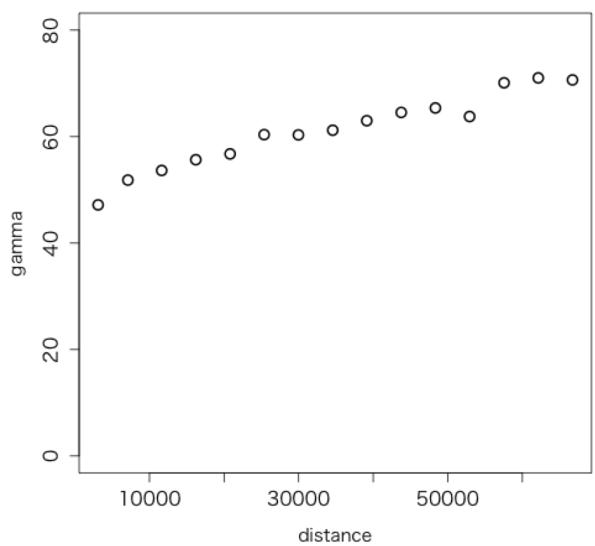
- 標本の組み合わせ（標本対）
全てのバリオグラムと地点間の距離を示したものを、バリオグラム雲という
- 観測データの分布や観測値の非類似性を理解する上で有益



標本バリオグラム

- 地点間の距離 h に対して、階級区分 \tilde{h} 毎に細分化し、バリオグラムの平均値をとった値 $\gamma^*(\tilde{h})$ を標本バリオグラムという
- 地点間の距離が h となる組み合わせの個数を N_h とすると、標本バリオグラムは次式により得られる

$$\gamma^*(\tilde{h}) = \frac{1}{2N_h} \sum_{i=1}^{N_h} \gamma_i(h)$$



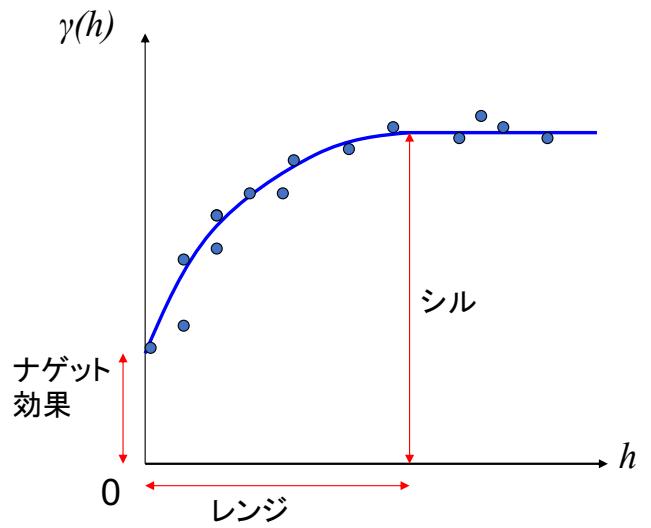
セミバリオグラム（つづき）

- 標本バリオグラムの関係から、セミバリオグラムを以下のように与えることもできる
- 観測地点 s_i の観測値 $Z(s_i)$ と、観測地点 s_i に対して距離 h だけ離れた地点 $s_i + h$ の属性 $Z(s_i + h)$ との差分を考えたとき、次式で表されるセミバリアンス $\hat{\gamma}(h)$ と距離 h との関係を示したものが、セミバリオグラムということもできる

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{2N_h} \sum_{i=1}^{N_h} (Z(s_i) - Z(s_i + h))^2$$

理論バリオグラム

- 標本バリオグラムに理論モデルを当てはめたものを理論バリオグラムという
- ナゲット効果：距離 $h = 0$ のときのセミバリオグラム $\gamma(h = 0)$
- レンジ：バリオグラムが定常状態になる距離＝空間的自己相関がなくなる距離
- シル(sill)： $\lim_{h \rightarrow \infty} \gamma(h)$ となるときの $\gamma(h)$

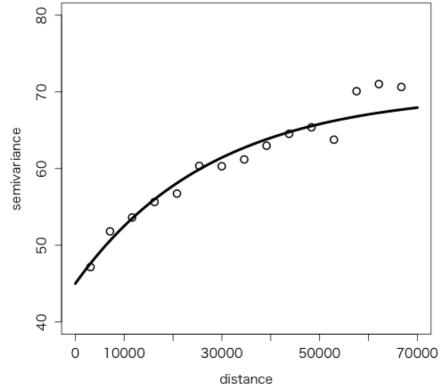


代表的なバリオグラムモデル

- 指数モデル

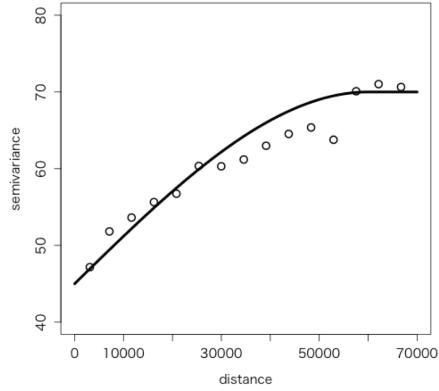
$$\gamma^*(\tilde{h}) = b \cdot \exp\left(-\frac{|\tilde{h}|}{a}\right)$$

$a, b > 0$



- 球形モデル

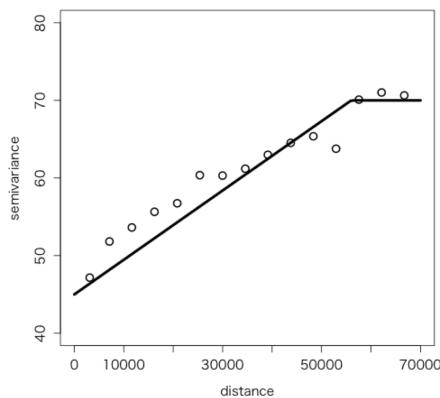
$$\gamma^*(\tilde{h}) = \begin{cases} b\left(1 - \frac{3}{2}\frac{|\tilde{h}|}{a} + \frac{1}{2}\frac{|h|^3}{a^3}\right), & a \geq |\tilde{h}| > 0 \\ b + a, & |\tilde{h}| > a \\ 0, & |\tilde{h}| = 0 \end{cases}$$



代表的なバリオグラムモデル

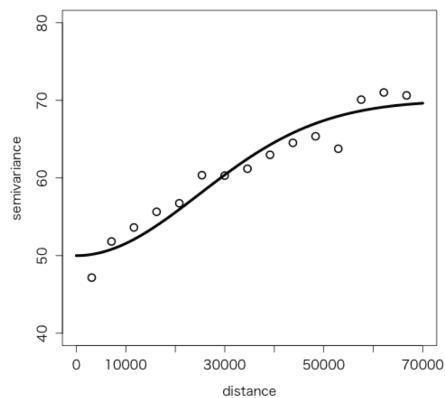
- 線形モデル

$$\gamma^*(\tilde{h}) = \begin{cases} b + a|\tilde{h}|, & |\tilde{h}| > 0, a \geq 0 \\ 0, & |\tilde{h}| = 0 \end{cases}$$



- 球形モデル

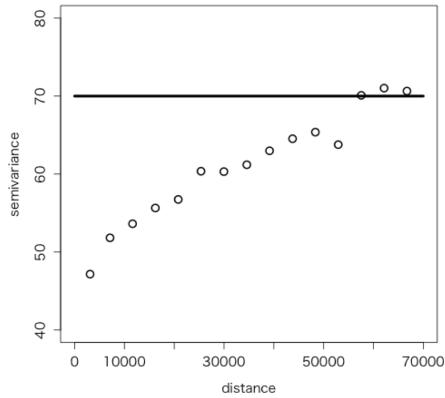
$$\gamma^*(\tilde{h}) = \begin{cases} b - c \cdot \exp\left(-\frac{|\tilde{h}|^2}{a^2}\right), & |\tilde{h}| > 0, a \geq 0 \\ 0, & |\tilde{h}| = 0 \end{cases}$$



代表的なバリオグラムモデル

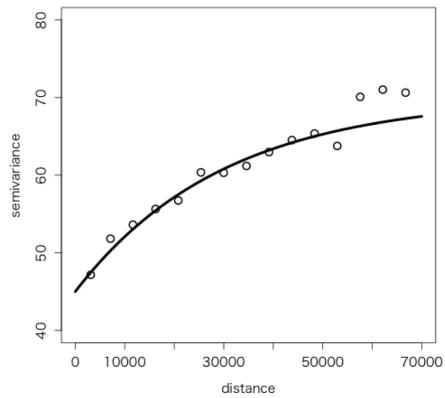
- ナゲット効果モデル

$$\gamma^*(\tilde{h}) = \begin{cases} b, & |h| > 0, b \geq 0 \\ 0, & |h| = 0 \end{cases}$$



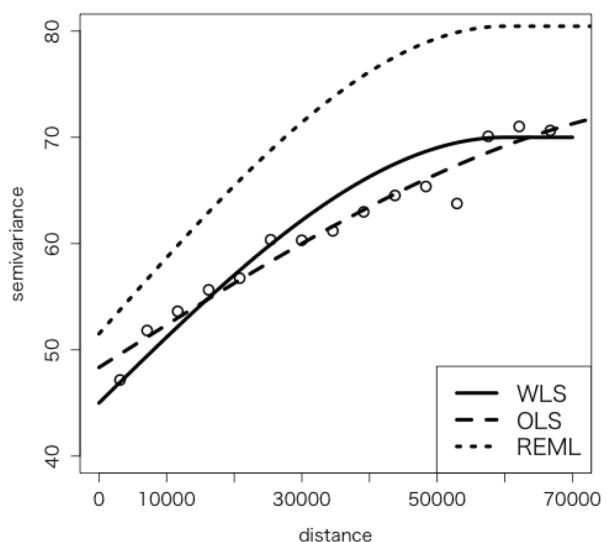
- Matheronモデル

$$\gamma^*(\tilde{h}) = \begin{cases} b + c \left(1 - \frac{1}{2^\nu} \Gamma(\nu) \left(\frac{|h|}{a} \right)^\nu K_\nu \left(\frac{|h|}{a} \right) \right), & |h| > 0, a \geq 0 \\ 0, & |h| = 0 \end{cases}$$



推定法によるバリオグラムの推定結果の違い

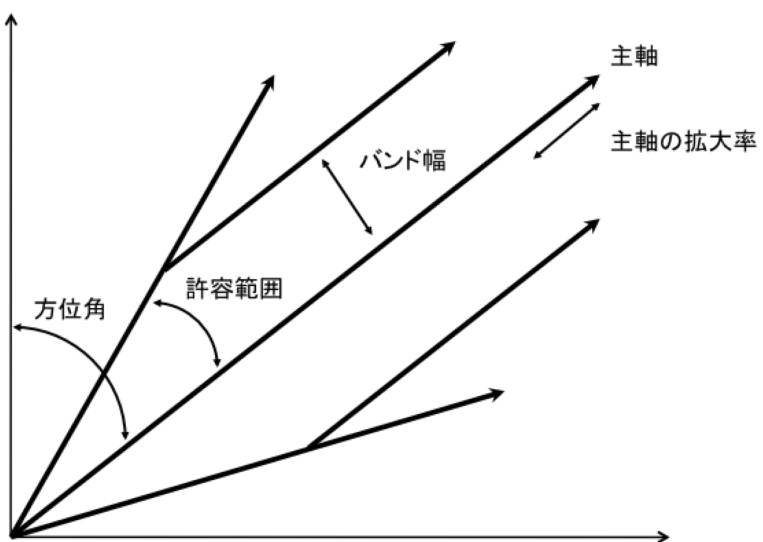
- バリオグラムモデルの推定には、最小二乗法、重み付き最小二乗法、最尤推定法などが用いられる
- 同じバリオグラムでも推定法に寄って推定結果が異なることがある



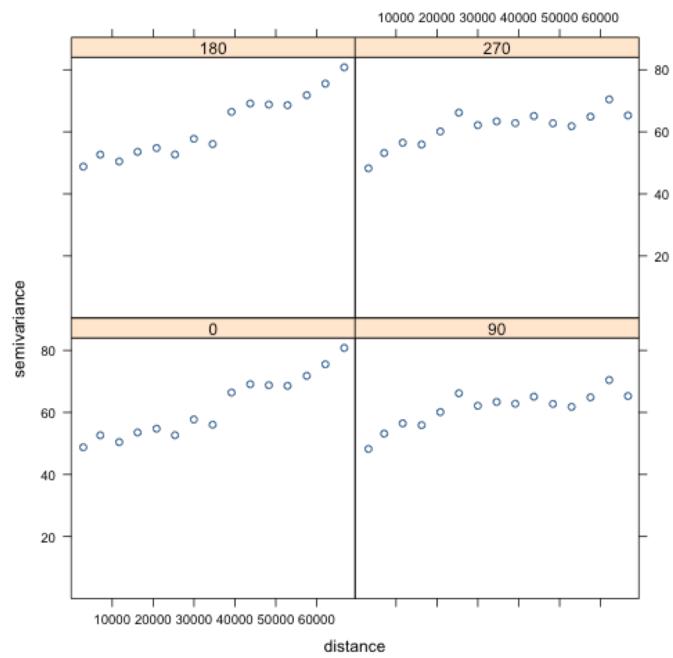
異方性モーリング

- セミバリオグラム：全ての方向で等しい空間変動をモデル化。⇒等方性 (isotropy)
- 特定の方向に対する空間的自己相関を考慮する場合に用いられる。⇒異方性 (anisotropy)
 - Geometric anisotropy: 各方向でセミバリオグラムのsillは一定, rangeが変化。
 - Zonal anisotropy: sillが変化。

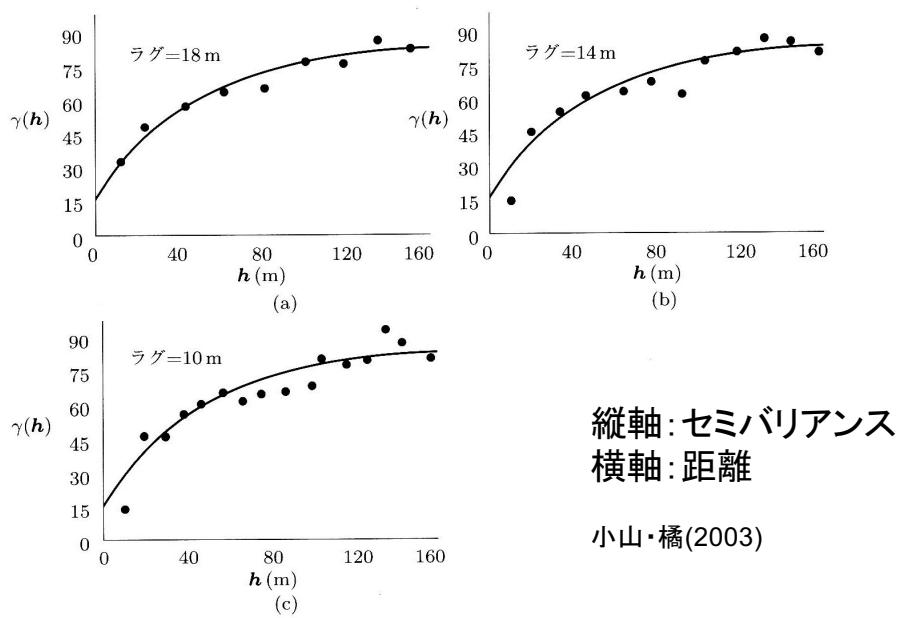
異方性セミバリオグラムで設定する変数



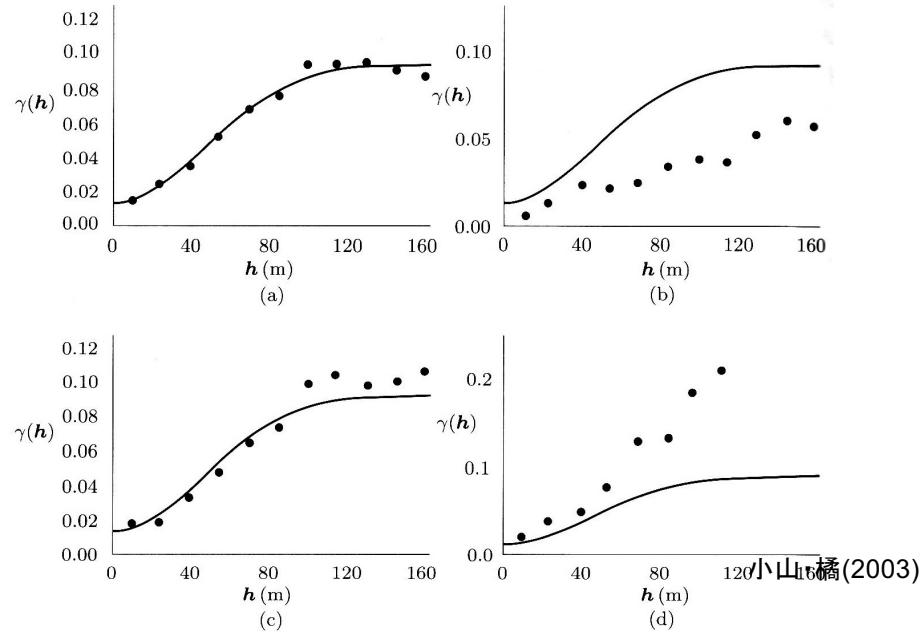
異方性バリオグラムの推定例



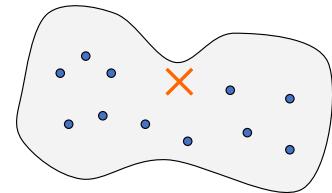
異なる空間ラグの影響



セミバリオグラムの異方性モデル



通常Kriging

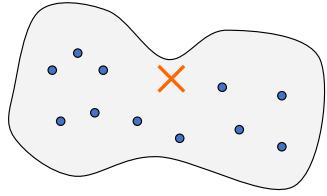


- 通常Krigingは逆距離荷重法の考え方をKrigingに応用している
- 予測地点 u_0 での空間属性の予測値 $Z^*(u_0)$ を得るとき、観測データ $Z(s_i)$ と重み付け係数 $w(s_i)$ を用いて、重み付け平均として予測する

$$Z^*(u_0) = \sum_{i=1}^n w(s_i) Z(s_i)$$

$$\sum_{i=1}^n w(s_i) = 1$$

通常Kriging



- このとき、予測誤差 $\varepsilon(u_0)$ を最小にするような重み係数の組み合わせを計算することが求められる

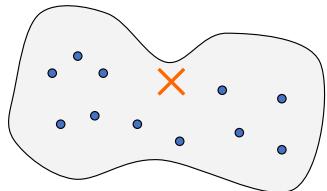
$$\varepsilon(u_0) = Z^*(u_0) - \sum_{i=1}^n w(s_i)Z(s_i)$$

- このことは、平均二乗誤差 $\sigma^2(u_0)$ を最小化することと同じ

$$\sigma^2(u_0) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N w(s_i)w(s_j)\gamma(h_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^N w(s_i)\gamma(h_{i,u_0})$$

- 通常Krigingでは、バリオグラム $\gamma(h_{ij})$ と $\gamma(h_{i,u_0})$ を用いて重み付け係数を用いているといえる

通常Kriging



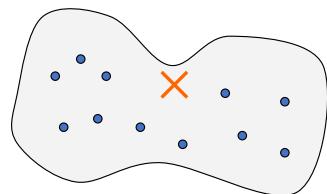
- バリオグラムモデルが得られているとき、観測地点同士のバリオグラム $\gamma(h_{ij})$ と予測地点とのバリオグラム $\gamma(h_{i,u_0})$ とが既知
- 平均最小二乗誤差を最小にするような重み付け係数の組み合は、ラグランジュ乗数 λ を用いて計算できる

例題：通常Kriging

- ボーリングにより3地点での地下水の深さが図のように既知であるとする。井戸の深さ、井戸間の距離及びセミバリオグラムが表のように与えられた場合の、地点Pでの地下水の深さをクリギングにより予測せよ。 (© Dorse, 1997)



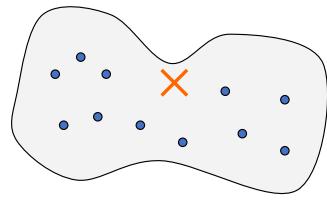
通常Krigingの計算例



- 3つの観測地点 $i = 1, 2, 3$ の観測データ $Z(s_i)$ から、地点 u_0 の値を計算する
- 重み付け係数とラグランジュ乗数を未知数とする目的関数 $f(w(s_1), w(s_2), w(s_3), \lambda)$ は次式のようになる

$$f(w(s_1), w(s_2), w(s_3), \lambda) = - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w(s_i) w(s_j) \gamma(h_{ij}) + 2 \sum_{i=1}^3 w(s_i) \gamma(h_{i,u_0})$$

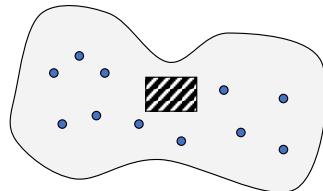
通常Krigingの計算例



- 目的関数 $f(w(s_1), w(s_2), w(s_3), \lambda)$ を重み付け係数とラグランジュ乗数について偏微分すると、以下の連立方程式が得られる

$$\begin{bmatrix} \gamma(h_{11}) & \gamma(h_{12}) & \gamma(h_{13}) & 1 \\ \gamma(h_{21}) & \gamma(h_{21}) & \gamma(h_{23}) & 1 \\ \gamma(h_{31}) & \gamma(h_{32}) & \gamma(h_{33}) & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s_1) \\ w(s_2) \\ w(s_3) \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma(h_{1,u_0}) \\ \gamma(h_{2,u_0}) \\ \gamma(h_{3,u_0}) \\ 0 \end{bmatrix}$$

普遍Kriging



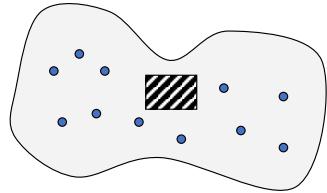
- 観測データ $Z(s_i)$ が以下の線形回帰式で与えられるとする

$$Z(s) = \sum_{k=1}^m X_k(s)\beta_k + \varepsilon(s)$$

$$\varepsilon(s) \sim N(\mu, \sigma^2)$$
- 未知パラメータに対する不偏推定量 $\hat{\beta}_k$ が与えられたとき、地点 u_0 での不偏推定量 $\hat{Z}(u_0)$ は次式のように与えられる

$$\hat{Z}(u_0) = \sum_{k=1}^m X_k(u_0)\hat{\beta}_k$$

普遍Kriging



- 不偏推定量 $\hat{Z}(u_0)$ と通常Krigingの予測値 $Z^*(u_0)$ との間での普遍性を確保すると、次式のようになる

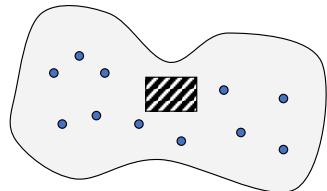
$$E[\hat{Z}(u_0) - Z^*(u_0)] = 0$$

- すると、次の2式が得られる

$$\sum_{k=1}^m X_k(u_0) \hat{\beta}_k - \sum_{i=1}^n w(s_i) Z(s_i) = 0$$

$$\sum_{k=1}^m \hat{\beta}_k \left(X_k(u_0) - \sum_{i=1}^n w(s_i) Z(s_i) \right) = 0$$

普遍Kriging



- ここで $\hat{\beta}_k \neq 0$ より、次式の普遍性条件が得られる

$$X_k(u_0) - \sum_{i=1}^n w(s_i) Z(s_i) = 0$$

- このモデルについて、平均二乗予測誤差 $\sigma^2(u_0)$ を最小にするような重み付け係数の組み合わせを求めることにより、普遍型クリギングの推定結果が得られる
- $m = 1$ かつ $X_1(u_0) = 1$ としたときに通常Krigingとなる
- 何らかの理由で不偏推定量 $\hat{\beta}_k$ が既知であるとき、これを用いて得られる予測結果が単純型Krigingと呼ばれる