# 目次

# 第 1 章

# ゲンツェンの自然演繹法

ゲンツェン (Gentzen) の自然演繹 (Natural Deduction) はその名のとおり実際の数学に近い自然な形の形式的証明体系である．本章の第 1 節でゲンツェンの自然演繹を料理との類推等を用いて易しく導入し，第 2 節で証明図と推論図を正確に定義し，第 3 節でゲンツェンの自然演繹で正規形定理が成り立つことを証明し，その定理のいくつかの応用を述べる．

## 1.1　自然演繹法

### 1.1.1　自然演繹の概要

自然演繹による証明が存在すればそれをスリム化して「回り道」の一切ない証明に変形できる．これが正規化定理である．自然演繹には大きく分けて，古典論理版と直観主義論理版のふたつがあるが，NK と NJ のどちらでも正規化定理が成り立つ．本章では，「回り道」として現われる論理式の複雑さに関する帰納法にもとづきを証明する．その後，自然演繹のや直観主義論理の構成的な性質のいくつかを正規形定理の応用として導く．これらの性質はいずれもよく知られた事実であり，できるだけ手短かに述べる．

正規形定理の証明には，**証明図**の概念と**推論規則**の定義が基本的である．証明図は木のような形をした平面図形であり，推論規則は証明図の合成規則である．さらに「回り道」を解消するための証明図**簡約規則**が必要となる．さらに代入操作の定義や変数の束縛条件など，証明論特有の操作や制約をきちんと述べる必要がある．こ

のように自然演繹法の正確な準備は自然さを生かす代償として，他の証明書法にくらべて規則の正確な定義が若干わずらわしいところもある．とはいえ，これらはひとつひとつていねいにやればいずれも難しい概念ではない．

本章の自然演繹の解説については次の著書を参考にした: Prawitz [1], 松本 [7], 前原 [5], 林 [6], Unger [2], 小野 [4]，角田 [3]．本章の正規形定理よりも強く，正規形が存在してしかも唯一であるという事実が強正規形定理として知られている．林 [6] は，この強い形の正規形定理の証明にも使える強力な方法を用いて正規形定理を証明しているが証明は長い．本章では論理式の複雑さに関する帰納法を用いて証明する．角田 [3] はフィッチ (Fitch) 流とよばれる自然演繹体系を用いている．フィッチ流とは，おおざっぱにいえば自然演繹のゲンツェン流の証明図を右まわりに 90 度回転したものである．つまり論理式を上から下へ並べたものであり，論理式を文と思えば横書きの通常の数学書のスタイルにより近い形で証明の木構造を表している．とくに，束縛変数や自由変数の扱いが，プログラミング言語 C の変数宣言や変数参照と自然な類推がつくなどの実践的な特徴がある．実質は本章の自然演繹と同じものと言ってよいだろう．

### 1.1.2　自然演繹のすすめ

自然演繹法では正規形定理が成り立つ．後ほど詳しく説明するが，正規形定理とはどんな証明も必ず無駄のない証明に変形できることを主張する定理である．正規形定理が成り立つということだけでも自然演繹の意義はゆるぎない．しかし自然演繹の意義はそれだけではない．

学生に証明を含む課題を与えると，「解けたが証明の書き方がわからない」という声が返ってくることが少なくない．たしかに証明の書き方を教える科目はない．わざわざ科目として扱わなくとも数学の定理の証明を読んでいるうちに自然に身に付くものと考えられているからであろう．しかし，実際の数学書の証明は分かりやすさや数学らしいアイデアを伝える工夫に忙しいためか，省略が多く ‘証明の文法’ に沿っていないことがめずらしくない．したがって数学書を読むだけでは証明の文法が身に付かず，証明の書き方がわからない，ということであろう．

自然演繹は実際の数学の証明の書き方に忠実な証明の模型である．自然演繹の練習問題を解いているうちに，ひととおりの証明のパターンにふれることができる．

なによりも，推論規則が明確なので実際にどう書けばよいのか明確な指針がたつようになる．もちろん，NK を忠実に実行すると証明が長くなので実用的ではない．しかし，たとえ長くなろうとも確実に証明を書ける方法を知ることは大きい．労をいとわなければ確実に書ける証明さえも思いうかばない状態とは質的にレベルが違うだろう．しかも自然演繹の証明問題にはパズル・ゲーム的な楽しさもあり学習教材としての魅力も備えている．このように，自然演繹は理論体系として意義があるばかりでなく，演繹の訓練の教材としても優れた特徴を持っている．

そこで，自然演繹の勉強法として易しい定理の証明を自然演繹法で自力で見つける訓練を勧めたい．できるだけ易しい定理からはじめるのがコツである．以下で「演習とする」としたところは，紙と鉛筆を用意して，めんどうがらずに実行していただきたい．その効果として，自然演繹法のわずらわしい準備の部分が自然に身に付いているだろう．準備部分がわかってしまえば，本書で述べる正規化定理の証明とその応用は明晰判明に理解できる．自然演繹法は形式的には簡単な規則の集りに過ぎない．しかもよくできた記号ゲームであり，「自然」な演繹の訓練教材である．たんに読み流すだけではもったいない．

### 1.1.3 証明と推論規則

ふたつの命題 $\langle$ 雨が降る $\rangle\langle$ ならば $\rangle\langle$ 運動会が中止 $\rangle$ と $\langle$ 運動会が中止 $\rangle\langle$ ならば $\rangle\langle$ 授業がある $\rangle$ が仮定として与えられたとする. このふたつの仮定から $\langle$ 雨が降る $\rangle\langle$ ならば $\rangle\langle$ 授業がある $\rangle$ と結論してよい．つまり，一方の仮定の右側が他方の左側と一致するならば，前者の左側と後者の右側を $\langle$ ならば $\rangle$ で結合した命題を導出してよい．

この例が示すように，導出の操作はふたつの文を機械的に操作して新しい文を作りだしているだけである．しかもこの操作は $\langle$ 雨が降る $\rangle$，$\langle$ 運動会が中止 $\rangle$，$\langle$ 授業がある $\rangle$ のみっつの原子文には依存しない．任意の文であってよい． こうして機械的操作で作られた結論は，仮定の文が成り立っている限り成り立っている．

この推論を規則として次のように書いてみる．

$$\frac{A \langle \text{ならば} \rangle B \qquad B \langle \text{ならば} \rangle C}{A \langle \text{ならば} \rangle C}$$

この規則中 $A = \langle$ 雨が降る $\rangle$，$B = \langle$ 運動会が中止 $\rangle$，$C = \langle$ 授業がある $\rangle$ とおけば上例の場合となっている．このような文の操作を述べたものが推論規則である．接続詞 $\langle$ ならば $\rangle$ を記号 $\rightarrow$ で表してさらに規則らしくしてみよう．

$$\frac{A \rightarrow B \quad B \rightarrow C}{A \rightarrow C}$$

これが $\langle$ ならば $\rangle$ という接続詞に関するひとつの推論規則である．ただし，実際にはもっと基本的な推論規則から導ける派生規則である．

さて，$\langle$ 雨が降る $\rangle$ などの原子文や，$\langle$ 雨が降る $\rangle\langle$ ならば $\rangle\langle$ 運動会が中止 $\rangle$ などの複合文を一般に論理式とよんだ．証明とは一般に，**仮定**した論理式から**結論**の論理式を**導き**だす**手続き**あるいはその過程のことであった．もちろん，手続きは**推論規則**にしたがって遂行されなくてはならない．つまり証明するという行為は，与えられた仮定から推論規則だけを使って結論を作りだす記号ゲームである．NK の場合証明の正確な定義には後述のように少し準備が必要であるが，このような記号ゲームの一種であることにはかわりない．

証明という記号ゲームでは，ゲームのルールとしての推論規則が最も重要である．そこで料理のアナロジーを用いて NK の推論規則をひとつひとつ説明してみよう．ただしアナロジーによる説明には限界がある．軽い導入として読み流していただきたい．むしろ推論規則をひとつひとつじっくり眺めつつも，その規則に無理に意味付けしたりせずに，その形式の美しさを感じ取り丸ごと受けいれるという姿勢もよいだろう．形式は力なりである．

与えられた生卵・フライパン・ガスコンロ・ハムを使ってハムエッグを作る具体的方法がレシピに書かれているとする．この場合は生卵・フライパン・ガスコンロ・ハムが仮定であり，ハムエッグが結論の定理であり，そしてレシピが証明である．手の込んだ料理の場合は仮定として他のレシピが含まれることもある．たとえば，カレーの材料・米，さらに，カレーのレシピ，およびごはんのレシピが仮定として与えられているとする．そのふたつのレシピを「結合」してカレーライスを作ることができるだろう．ここまではごくふつうの常識である．ようするに仮定の論理式は食材，結論の論理式は皿に盛られた料理，証明は料理のレシピである．器具だけでなくレシピをも資源として含めるのがこのたとえの鍵である．

もちろん，料理とのたとえ話は万能ではない．都市ガスは有料であるが都市ガス

を燃やすために必要な空気は無料である．空気のようにいつでも無料で使える資源が公理である．公理だけつまり有料の資源を使わずに無料の食材だけを使って作れる料理が定理である．つまり，仮定にも依存せずに成り立つ命題のことである．実際の数学の定理は美しく有用なものであるが，空気だけで作れる料理においしいものがあるとは思えない．したがって論理を料理にたとえてもいろいろほころびが出る．しかし，万能ではないことを承知の上で料理とのたとえをもう少し続けよう．

### 1.1.4　導入規則と除去規則の意味

のとはの構成手続きである．証明図とは，これらの規則によって組み立てられる図形のことである．つまり推論規則の定義とは証明図の定義とは同じことである．推論規則は $\wedge$ や $\forall$ などの論理語が証明図の構成にどう関わるかを規定している．NK のは次の 7 個である．

$$\rightarrow \quad \wedge \quad \vee \quad \neg \quad \forall \quad \exists \quad \bot$$

最初のよっつの論理語 $\rightarrow \quad \wedge \quad \vee \quad \neg$ の働きを料理のたとえを使って説明する．混乱を避けるため，NK の原子文や論理語を日本語と区別するために 〈 〉 で囲む．

原子文〈生卵〉は〈生卵〉があってそれが使える状態を意味している．あるいはもっと強く，〈生卵〉を作りだす方法があることと解釈してもよい．他の〈フライパン〉などについても同様である．以下では命題を状態とする解釈で説明するが，命題はその状態を実現する手続きの集合とする強い解釈の方が一貫性はある．

連言文〈生卵〉$\wedge$〈フライパン〉は,〈生卵〉があり，かつ，〈フライパン〉があることを意味する．どちらでも利用できる状態である．両方使うこともできる．選言文〈生卵〉$\vee$〈フライパン〉は〈生卵〉があるかあるいは〈フライパン〉があることを表している．どちらが利用できるのかは分からない状態である．少なくともどちらかは利用できる状態である．含意命題〈生卵〉$\rightarrow$〈目玉焼〉は，〈生卵〉から〈目玉焼〉を作るレシピがあることと解釈する．これはちょっと分かりにくいかもしれない．レシピも料理の資源つまり広い意味で食材と考える．否定命題 $\neg$〈フライパン〉は〈フライパン〉がないことを意味している．より正確にはすぐあとで述べるように,〈フライパン〉から〈矛盾〉を作るレシピがあることと解釈する．

以上の解釈のもとに推論規則を説明する．形式的な定義は後述する．命題〈生卵〉$\wedge$〈フライパン〉が成り立つならば，すなわち生卵とフライパンのどちらも同

時に使える状態ならば $\langle$ 生卵 $\rangle$ がなりたつ．つまり生卵がつかえると結論してよい．これが $\wedge$ の左除去規則の意味である．$\wedge$ の右除去規則も同様である．接続詞 $\wedge$ が結論に含まれていない．つまり除去されているのでこの名がある. ここで，左と右を区別するのは，$A \wedge A$ の場合のように，どちら側の論理式を除去して $A$ を得たのかを明示するための補助情報である．省略しても支障はない．

$$\frac{\langle \text{生卵} \rangle \wedge \langle \text{フライパン} \rangle}{\langle \text{生卵} \rangle} \qquad \frac{\langle \text{生卵} \rangle \wedge \langle \text{フライパン} \rangle}{\langle \text{フライパン} \rangle}$$

生卵があると状態 $\langle$ 生卵 $\rangle$ とフライパンがある状態 $\langle$ フライパン $\rangle$ をどちらも使えるひとつの状態にまとめることができる．まとめた状態を $\langle$ 生卵 $\rangle \wedge \langle$ フライパン $\rangle$ と書く．この規則を $\wedge$ 導入規則という．結論の命題に記号 $\wedge$ が導入されているからである．

$$\frac{\langle \text{生卵} \rangle \qquad \langle \text{フライパン} \rangle}{\langle \text{生卵} \rangle \wedge \langle \text{フライパン} \rangle}$$

$\langle$ 生卵 $\rangle \rightarrow \langle$ 目玉焼 $\rangle$ がなりたち，かつ $\langle$ 生卵 $\rangle$ が成り立つとき，$\langle$ 目玉焼 $\rangle$ を導出してよい．生卵を使って目玉焼を作るレシピがあり，かつ 生卵 があるならば，レシピにしたがって目玉焼を作れるからである．この規則を $\rightarrow$ 除去規則という．記号 $\rightarrow$ が前提から消えて結論に現れていないことからこの名がある．

$$\frac{\langle \text{生卵} \rangle \rightarrow \langle \text{目玉焼き} \rangle \quad \langle \text{生卵} \rangle}{\langle \text{目玉焼き} \rangle}$$

$\langle$ 生卵 $\rangle$ が食材として使える状況であると仮定しよう．さらに，それを使ってあれこれ試行錯誤してその結果 $\langle$ 目玉焼 $\rangle$ が実際に作れたとしよう．その過程をレシピとしてまとめた状態を $\langle$ 生卵 $\rangle \rightarrow \langle$ 目玉焼 $\rangle$　と書く．ここで NK 固有の大切なことがある．レシピが作れたからには，仮定としての食材 $\langle$ 生卵 $\rangle$ もはや必要ない．つまりお役ごめんと $\langle$ 生卵 $\rangle$ は捨てる (discharge)．これが $\rightarrow$ 導入規則である．$\langle$ 目玉焼き $\rangle$ は $\langle$ 生卵 $\rangle$ から作られたのであるが，その操作が抽象化されたレシピとしての $\langle$ 生卵 $\rangle \rightarrow \langle$ 目玉焼 $\rangle$ は，もはや $\langle$ 生卵 $\rangle$ には依存しない．

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\langle\text{生卵}\rangle]_i\\ \vdots\\ \langle\text{目玉焼き}\rangle\end{array}}{\langle\text{生卵}\rangle \to \langle\text{目玉焼き}\rangle}\,i$$

ここで，縦線は「途中省略」を表す．記号 $[\langle\text{生卵}\rangle]_i$ の括弧 [　] は仮定を表す．$i$ は仮定 ⟨ 生卵 ⟩ に付けられたラベルである．横線の右の番号 $i$ は，ラベル $i$ を持つ仮定 ⟨ 生卵 ⟩ がここで落ちることを示す．正式な説明は後述．→ 導入規則は分かりにくいと思うが，易しい証明をいくつかやってみるとすぐに慣れる．習うより慣れよ！

含意 → は論理の重要かつ難所であるが，日常言語の意味にあまりとらわれずに，最初はゲームとしてわりきってつきあうことをおすすめする．

∨ 除去規則は場合分けの規則である．⟨ リンゴ ⟩ → ⟨ ジュース ⟩ および　⟨ ミカン ⟩ → ⟨ ジュース ⟩ が成り立っているとする．つまり ⟨ リンゴ ⟩ から ⟨ ジュース ⟩ を作るレシピと ⟨ ミカン ⟩ から ⟨ ジュース ⟩ を作るレシピと両方のレシピを持っているとする．さらに ⟨ りんご ⟩∨⟨ ミカン ⟩ が成り立っているとする．二つのレシピがあり，かつ，⟨ リンゴ ⟩ または ⟨ ミカン ⟩ がある状態である．これらの前提があればそのとき ⟨ ジュース ⟩ が作れる．なぜならば，⟨ リンゴ ⟩ から ⟨ ジュース ⟩ を作るレシピがあり，かつ，⟨ ミカン ⟩ から ⟨ ジュース ⟩ を作るレシピがあるので，⟨ リンゴ ⟩ と ⟨ ミカン ⟩ のどちらがあってもそれに応じて ⟨ レシピ ⟩ を適用すれば ⟨ ジュース ⟩ が作れるからである．証明が終われば場合分けのふたつの仮定 ⟨ リンゴ ⟩ と ⟨ ミカン ⟩ を消す．

$$\dfrac{\langle\text{リンゴ}\rangle\vee\langle\text{ミカン}\rangle \qquad \begin{array}{c}[\langle\text{リンゴ}\rangle]_i\\ \vdots\\ \langle\text{ジュース}\rangle\end{array} \quad \begin{array}{c}[\langle\text{ミカン}\rangle]_j\\ \vdots\\ \langle\text{ジュース}\rangle\end{array}}{\langle\text{ジュース}\rangle}\,i,j$$

⟨ リンゴ ⟩ があれば ⟨ リンゴ ⟩∨⟨ ミカン ⟩ を導出してよい．この規則が ∨ 左導入規則である．同様に ⟨ ミカン ⟩ があれば ⟨ リンゴ ⟩∨⟨ ミカン ⟩ を導出してよい．この規則が ∨ 右導入規則である．意味は明きらかだろう．

$$\dfrac{\langle\text{リンゴ}\rangle}{\langle\text{リンゴ}\rangle\vee\langle\text{ミカン}\rangle} \qquad \dfrac{\langle\text{ミカン}\rangle}{\langle\text{リンゴ}\rangle\vee\langle\text{ミカン}\rangle}$$

最後に否定 (¬) であるが，これには適当な類推がとくに難しい．まず，否定の説明には矛盾概念が必要になる．矛盾は記号で ⊥ と書く．矛盾を打ち出の小槌にたとえてみよう．矛盾とはなんでも作れる仮想的な〈 打ち出の小槌 〉のことだとしてみよう．つまりなんでも作れる魔法のレシピである．

$$\frac{\langle \text{ 打ち出の小槌 } \rangle}{\langle \text{ なんでも } \rangle}$$

ここで〈 なんでも 〉は文字どうり任意の料理メニュを表す．　するとと ¬〈 オーブン 〉の意味は〈 オーブン 〉から〈 打ち出の小槌 〉を作るレシピを表していると解釈される．この解釈にしたがえば，〈 オーブン 〉を使って〈 打ち出の小槌 〉を作るレシピが書けるならレシピ ¬〈 オーブン 〉が作れる．これが ¬ 導入規則である．このとき〈 オーブン 〉は discharge される．その理由は上の → 導入規則と全く同じである．なぜならば，¬〈 オーブン 〉を〈 オーブン 〉→〈 打ち出の小槌 〉と定義したからである．〈 オーブン 〉から〈 打ち出の小槌 〉つまり矛盾が作れてしまうことをもってして，〈 オーブン 〉が存在しないことの確認とする．これが ¬ 導入規則の意味である．つまり，命題を否定するということはその命題から矛盾を導きだしてみせるということである．

$$\frac{\begin{array}{c}[\langle \text{ オーブン } \rangle]_i \\ \vdots \\ \langle \text{ 打ち出の小槌 } \rangle\end{array}}{\neg\langle \text{ オーブン } \rangle}\,i$$

仮定〈 オーブン 〉は落ちる．

残るは ¬ 除去規則のみである．〈 オーブン 〉と ¬〈 オーブン 〉がともにあるとする．後者は〈 オーブン 〉から〈 打ち出の小槌 〉を作るレシピであったから，このレシピにしたがって〈 オーブン 〉から〈 打ち出の小槌 〉が作れてしまう．つまり矛盾が出た．〈 オーブン 〉と ¬〈 オーブン 〉から〈 打ち出の小槌 〉を作りだせるというこの規則を ¬ 除去規則という．〈 オーブン 〉と ¬〈 オーブン 〉から矛盾を導く規則である．否定記号 ¬ が前提にあって結論にはない，すなわち除去されているのでこの名がある．

$$\frac{\langle\,\text{オーブン}\,\rangle \qquad \neg\langle\,\text{オーブン}\,\rangle}{\langle\,\text{打ち出の小槌}\,\rangle}$$

**直観主義論理の意味論**

上述の類推による説明は直観主義論理の論理式の解釈 [**?**] を参考にした．それによれば，命題は状態を表し，状態はその状態を実現する具体的手段（レシピ）の集りであるとして，構成的に解釈される．さらに，論理結合子は命題を入力として命題を出力する合成する手続きとして解釈される．たとえば，$\langle$ フライパン $\rangle \wedge \langle$ 生卵 $\rangle$ は，フライパンを作る手段と生卵を作る手段との順序対の集りとして解釈される．つまり連言文演算 $\wedge$ は集合の直積演算となる．他の結合子の意味も同様に明快であるが，詳しい説明は省略しなければならない．

### 1.1.5　証明の構成法

論理式の証明をみつけるには，結論から仮定へと逆にたどる探索が分かりやすくかつ有効である．次のように進む．まず，与えられた論理式を結論とする推論規則を探す．次にその推論規則の横線の上，すなわち前提の論理式を並べる．次に副目標としてこれらの論理式のひとつひとつを証明する．つまり再帰的に繰り返す．単純であるが，多くの場合この方針だけで証明がみつかるだろう．

たとえば，論理式 $A \to (B \to C)$ の証明図はどう構成したらよいか？　ここで $A, B, C$ は一般の論理式とする．方針は単純である．まず，$A$ と $B$ のふたつを仮定としておく．次にそれを使って $C$ を導く証明図を構成できないかを試す．それが成功したならば，あとは，仮定 $B$ と $A$ を順に落とせば証明図は完成である．一般に，$A_1 \to A_2 \to \cdots \to A_n \to C$ の形の論理式の証明は，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ を仮定とおいてそれらから $C$ を導く証明図を作り，その後 $A_n, \cdots, A_2, A_1$ の順に仮定を落とせばよい．本章にある含意形の論理式の証明例はすべてこの方針で見つかる．

たとえば三段論法式 $(X \to Y) \to (Y \to Z) \to (X \to Y)$ をこの方針にしたがって証明してみよう．上の説明の記号でいえば，$n = 4$ の場合であり，$A_1 = (X \to Y)$，

$A_2 = (Y \to Z)$，$A_3 = X$，$A_4 = Z$ である．方針により，$A_1, A_2, A_3$ を仮定とおく．すると，$X \to Y$ と $X$ から $\to$ 除去により，$Y$ を得る．得られた $Y$ と仮定

$Y \to Z$ から $Z$ を得る．こうして，入れ子になった含意式の最右の部分式 $A_4$ としての $Z$ が得られたので，あとは使用したみっつの仮定 $Z, Y \to Z, X \to Y$ を $\to$ 導入規則により順に落とせば目標の論理式 $(X \to Y) \to (Y \to Z) \to (X \to Z)$ を結論とする証明図が完成する．

命題論理の NK に関しては証明図の存在は決定可能である．しかし限量子を含む一般の論理式については，NK の証明図が存在するかどうかを決定する手続きは存在しないことが知られている．

### 1.1.6 原始論理

論理語は含意 $\to$ だけという論理をとよぶ．原始論理の証明図と推論規則を定義する．論理式とその証明については，前者を料理のメニュに，後者をそのレシピにたとえてすでに説明した．そのアイデアを原始論理に対して適用して記号化する．正確な定義はその他の論理語と一緒に後述する．ここでは正確さよりも分かりやすさを優先させる．

**定義 1.1.1 (含意の推論規則)**

$$\frac{A \to B \quad A}{B}\ (\to \mathrm{E}) \qquad\qquad \frac{\begin{matrix}[A]_i \\ \vdots \\ B\end{matrix}}{A \to B}\ i(\to \mathrm{I})$$

左の規則は $\to$ **除去規則**とよばれ，記号で $\to \mathrm{E}$ と略記される．論理式 $A \to B$ をこの規則の**主論理式**という．$A \to B$ と $A$ とから $B$ を導く規則を表している．Modus Ponens ともよばれ，古来最も知られた推論規則である．

**例 1.1.1** ($\to$ E) 〈 雨が降る 〉→〈 地面が濡れる 〉 が成り立ち　かつ 〈 雨が降る 〉 が成り立つ．ゆえに命題 〈 地面が濡れる 〉 が成り立つ．

一方，導入推論規則 $\to$ I は，論理式 $A$ を仮定して $B$ が導けたとき, $A \to B$ が成り立つと結論する．言い換えると仮定 $A$ を使って $B$ を実際に導けたという記しが $A \to B$ である．　$B$ は $A$ を仮定して導けたので $B$ は $A$ 依存している．しかし含意式 $A \to B$ はもはや $A$ には依存していない．仮定 $A$ は落ちている．この**仮定が落ちる** (discharge される) という概念が NK 独特である．

この含意の導入・除去規則を用いて次の命題を証明してみよう．($\langle$ 雨が降る $\rangle$ $\langle$ ならば $\rangle$ $\langle$ 運動会が中止 $\rangle$) $\langle$ ならば $\rangle$ (($\langle$ 運動会が中止 $\rangle$ $\langle$ ならば $\rangle$ $\langle$ 授業がある $\rangle$) $\langle$ ならば $\rangle$ ($\langle$ 雨が降る $\rangle$ $\langle$ ならば $\rangle$ $\langle$ 授業がある $\rangle$))．証明はつぎのとおり．

1. $\langle$ 雨が降る $\rangle$　(仮定 1)
2. $\langle$ 雨が降る $\rangle \to \langle$ 運動会が中止 $\rangle$　(仮定 2)
3. $\langle$ 運動会が中止 $\rangle \to \langle$ 授業がある $\rangle$　(仮定 3)
4. $\langle$ 運動会が中止 $\rangle$　(1 と 2 に ($\to$ E)-規則を適用)
5. $\langle$ 授業がある $\rangle$　(4 と 3 に ($\to$ E)-規則を適用)
6. $\langle$ 雨が降る $\rangle \to \langle$ 授業がある $\rangle$　(1 と 5 に ($\to$ I)-規則を適用; 仮定 1 を除去)
7. ($\langle$ 運動会が中止 $\rangle \to \langle$ 授業がある $\rangle$)$\to$($\langle$ 雨が降る $\rangle \to \langle$ 授業がある $\rangle$)　(3 と 6 に $\to$ I 規則を適用; 仮定 3 を除去)
8. ($\langle$ 雨が降る $\rangle \to \langle$ 運動会が中止 $\rangle$)$\to$(($\langle$ 運動会が中止 $\rangle \to \langle$ 授業がある $\rangle$)$\to$($\langle$ 雨が降る $\rangle \to \langle$ 授業がある $\rangle$))　(2 と 7 に $\to$ I 規則を適用; 仮定 2 を除去)

3 つの仮定はすべて落ちている．　もっと見やすくするために，$R = \langle$ 雨が降る $\rangle$, $U = \langle$ 運動会が中止 $\rangle$, $J = \langle$ 授業がある $\rangle$, $\to\ = \langle$ ならば $\rangle$ とおこう．すると証明すべき命題は $(R \to U) \to ((U \to J) \to (R \to J))$ となり上の証明を書き換えると次のとおりである．

1. $R$　(仮定 1)
2. $R \to U$　(仮定 2)
3. $U \to J$　(仮定 3)
4. $U$　(1 と 2 に $\to$ E を適用)
5. $J$　(4 と 3 に $\to$ E を適用)
6. $R \to J$　(1 と 5 に $\to$ I を適用, 仮定 1 を除去)
7. $(U \to J) \to (R \to J)$　(3 と 6 に $\to$ I を適用, 仮定 3 除去)
8. $(R \to U) \to ((U \to J) \to (R \to J))$　(2 と 7 に $\to$ I 規則を適用, 仮定 2 除去)

証明図は次のとおりである．

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[R]_1 \quad [R \to U]_2}{U}(\to \mathrm{E}) \qquad [U \to J]_3}{J}(\to \mathrm{E})}{\dfrac{R \to J}{(U \to J) \to (R \to J)}\,3(\to \mathrm{I})}\,1(\to \mathrm{I})}{(R \to U) \to ((U \to J) \to (R \to J))}\,2(\to \mathrm{I})
$$

証明された論理式 $(R \to U) \to ((U \to J) \to (R \to J))$ はトートロジーである．実際，$R, U, J$ にどのように真偽値を割り当てようとも全体の式の値が真となることが真理表を使ってすぐ確かめられる．

### 1.1.7　論理積の推論規則

**定義 1.1.2 (論理積の推論規則)**

$$
\frac{A \wedge B}{A}\,(\wedge^r\mathrm{E}) \qquad \frac{A \wedge B}{B}\,(\wedge^l\mathrm{E}) \qquad \frac{A \quad B}{A \wedge B}\,(\wedge\mathrm{I})
$$

$\wedge$ 除去規則の $A \wedge B$ をこの規則の主論理式という．$A \wedge B$ の証明とはそもそも $A$ の証明と $B$ の証明の順序対であったから，$A$ の証明を示すにはその順序対の左の要素を取り出せばよい．一方の $\wedge$I 規則は，$A \wedge B$ を証明するためには $A$ と $B$ がそれぞれ証明できればよいという規則である．まさに記号 $\wedge$ を導入するための規則と実感できる規則である．なお $\wedge^r$E と $\wedge^l$E の $l$ と $r$ は右側を取り出すのか左側を取り出すのかを明示したい場合に付ける．

**例 1.1.2** ($\wedge$E)　$\langle$ 雨が降り $\rangle \wedge \langle$ 風がふく $\rangle$. ゆえに $\langle$ 雨が降る $\rangle$.

**例 1.1.3** ($\wedge$I)　$\langle$ 雨が降る $\rangle$ かつ $\langle$ 風がふく $\rangle$. ゆえに $\langle$ 雨が降る $\rangle \wedge \langle$ 風がふく $\rangle$.

　まだふたつの論理記号 $\to$ と $\wedge$ についての推論規則しか説明していないが，これより先に進むためには**仮定**という用語をきちんと定義しなければならない．

# 1.2　証明図と推論規則

## 1.2.1　仮定

$a$ を**ラベル**, $A$ を論理式とする. 式 $a : A$ を**ラベル付き論理式**という. $[A]_a$ とも書く:

$$a : A = [A]_a.$$

ラベルは区別がつくものであればなんでもよい. ここではラベルとして自然数を採用する. ふたつの仮定が等しい，つまり

$$a : A = b : B$$

とは $a = b$ かつ $A = B$ のこととする. $a \neq b$ あるいは $A = B$ のとき, $a : A$ と $b : B$ は**整合的**という. ラベル付き論理式からなる集合 $\Gamma$ は, その任意の二つの要素が整合的であるとき**整合的**であるという.

**例 1.2.1** $A$ と $B$ を相異なる論理式とする. ラベル付きの論理式 $3 : A$ と $4 : B$ は整合的である. $3 : A$ と $4 : A$ も整合的である. 一方，$3 : A$ と $3 : B$ は整合的ではない.

**例 1.2.2** $A \neq B$ として, $\{1 : A, 2 : A, 3 : B\}$ は整合的である. $\{2 : A, 2 : B, 3 : A\}$ は整合的でない.

ラベル付き論理式からなる整合的な集合を**仮定集合**と呼ぶ. ここで $a : A$ を仮定集合 $S$ に付け加えても整合的であるようなラベル $a$ が存在するとき，$A$ は $S$ に**追加可能**という.

## 1.2.2　NK の推論規則と証明図

証明とは，与えられた**仮定 (assumptions)** を使い, 許された**推論規則 (inference rules)** を適用して**結論**を得る道筋であった．つまり，証明を作るための規則が推論規則である．個々の推論規則は，規則が適用可能かどうか，どんな場合でも明確に判定できるほどに十分単純でなければならない．仮定の正確な定義が終わったので，いよいよ証明の概念を正確に定義できる．証明を可視化した２次元的図形を**証明図**

**(proof figure)** という．証明図と証明とは厳密には異なる概念であるが，説明の便宜上，同一視する．

証明図は仮定から結論が導かれる道筋を表している．つまり水道のパイプのようなものである．葉を水源として結論に向かって合流していく川の流れのイメージである．結論を根とし仮定を葉とする木構造にたとえることもできる．

証明図は結論が仮定にどのように依存して導かれているかを表している．とくに仮定集合が空の場合は，結論が仮定なしで—すなわち無条件に—成り立つことを意味している． このように仮定集合が空，すなわち仮定が全部落ちた証明図の結論となる論理式のことを**定理**とよぶ．定理とはすべての仮定を使いきって証明された論理式である．

自然演繹の証明図は，限量子による変数の束縛や仮定が落ちるという動的な現象をも扱うため，その定義は意外と複雑である．自然演繹の証明図の大事な属性は**仮定集合**である．仮定集合は空の場合もある．証明図は**結論**を必ずひとつだけ持つ．結論がない証明図はない．また複数の結論をもつ証明図も考えない．証明図の仮定集合は，後述のとおり証明図の構造に関する帰納法によって定義される．

さて，証明論の対象は証明とその表現である証明図である．証明が主人公である．推論規則とはその証明図を作りあげる方法，あるいは与えられた図形が証明図であることを確認する手段にすぎない．しかし，今までの例でもわかるように，そもそも証明図であるかどうかは推論規則のみによって保証された．こうしてみると，証明図を定義するときの構成手続きのことを推論規則とよぶのが自然であろう．以下この立場で NK の推論規則を定義する．

証明図の推論規則の一般形は，「これこれが証明図であれば，これこれも証明図である」という形をとる．つまりひとつの推論規則は，横線を一本，その下に**結論**の論理式をひとつ，上に**前提**の証明図をいくつかならべた図形と，その図形内の要素が満たすべき制約条件のふたつから成る．簡単にいえば，推論規則とは証明図の再帰的定義法に現れる定義規則のことである．

証明図に現れる横線の右端には，この規則で**落ちる**仮定の番号がすべて書かれる．落ちる仮定がなければ書かない．わかり易さのための補助情報として規則の名称が書かれる．

$$\dfrac{\boxed{\text{証明図 1}} \quad \boxed{\text{証明図 2}} \quad \cdots \quad \boxed{\text{証明図 n}}}{\text{結論の論理式}}\ \text{仮定の番号リスト} + [(\text{規則の名称})]$$

証明図はギリシア大文字 $\Pi, \Pi', \Pi'', \Pi_1, \Pi_2, \Delta$ などで表す．証明図 $\Pi$ の結論が $A$ ならば，そのことを強調するために

$$\begin{array}{c}\Pi\\ A\end{array}$$

と書く．$\Pi$ と $A$ の間に横線は書かない．さらに $\Pi^A$ とも書く．両者は証明図としては同一である:

$$\Pi \ = \ \Pi^A \ = \begin{array}{c}\Pi\\ A\end{array}$$

**定義 1.2.1 (自然演繹の証明図)**

1. 仮定 $a : A$ はそれ自身証明図である. $[A]_a$ とも書く．ここで, $a$ はラベル, $A$ は論理式である. この証明図の仮定集合はシングルトン $\{a : A\}$ であり，結論は $A$ である．つまり仮定は $a : A$ のみでありラベルを除いた論理式 $A$ が結論である.
2. $\Pi_1^A$ と $\Pi_2^B$ を証明図とする. $\Pi_1^A$ の仮定を $S_1$, $\Pi_2^B$ の仮定を $S_2$. さらに仮定の集合 $S_1 \cup S_2$ は整合的とする. そのとき次の図形 $\Pi$ は証明図であり, $\Pi$ の仮定は $S_1$ と $S_2$ の和集合であり, $\Pi$ の結論は論理式 $A \wedge B$ である.

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2\\ A & B\end{array}}{A \wedge B}$$

3. $\wedge$ 除去規則による合成の定義．$\Pi^{A\wedge B}$ が証明図なら次の二つの図形はそれぞれ $A$ と $B$ を結論とする証明図であり，仮定集合は $\Pi$ の仮定集合そのものである．

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ A \wedge B\end{array}}{A} \qquad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ A \wedge B\end{array}}{B}$$

4. $\Pi^B$ を仮定集合を $S$ とする証明図とする. $a : A$ が $S$ に追加可能ならば，すぐ下の左の図形 $\Pi'$ は結論 $A \to B$ の証明図であり $\Pi'$ の仮定集合は $S$ から仮定 $a : A$ を除いた集合である: $S \setminus \{a : A\}$. ($S$ が $a : A$ を含まなければ $\Pi'$ の仮定は $S$ のままである. ) $\Pi'$ は下の右の図形として書かれることもある.

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ B\end{array}}{A \to B}\, a(\to \mathrm{I}) \qquad\qquad \dfrac{\begin{array}{c}[A]_a \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\, a(\to \mathrm{I})$$

**$A \wedge B \to A$ の証明図**

$$\dfrac{\dfrac{[A \wedge B]_1}{A}\,(\wedge \mathrm{E})}{A \wedge B \to A}\, 1(\to \mathrm{I})$$

**$A \to A$ の証明図**　次は証明図でありその結論は $A \to A$ である．ゆえに $A \to A$ は定理である．

$$\dfrac{[A]_1}{A \to A}\, 1(\to \mathrm{I})$$

もっと詳しくみてみよう．仮定 $[A]_1$ は定義によりそれ自身が証明図でありその結論は $A$，仮定集合は $\{[A]_1\}$ であった．つまり仮定 $[A]_1$ 自身が証明図であり，$[A]_1$ を仮定として $A$ を導いている．あきらかにこの証明図の仮定集合 $\{[A]_1\}$ に仮定 $[A]_1$ を追加することが可能である．したがって次の図

$$\dfrac{[A]_1}{A \to A}\, 1(\to \mathrm{I})$$

は最後に $\to \mathrm{I}$ 規則が適用された証明図の定義条件を満たしており，しかも仮定 $[A]_1$ は落ちている．ゆえに $A \to A$ は定理である．なお $\to \mathrm{I}$ の定義によれば次も証明図である．

$$\dfrac{[A]_1}{A \to A}$$

ただし証明図であるが仮定 $[A]_1$ は落ちずに残っている．新しいラベル 2 をつけた仮定 $[A]_2$ は落ちたが，もとの仮定 $[A]_1$ は残っている場合である．同様に，

$$\dfrac{[A]_1}{B \to A}$$

も証明図である．さらに仮定 1 を $\to$ I により落とせば，命題論理の重要な定理 $A \to (B \to A)$ を得る．

$$\cfrac{\cfrac{[A]_1}{B \to A}}{A \to (B \to A)}\, 1(\to \mathrm{I})$$

ここで $B$ は仮定集合 $\{[A]_1\}$ に追加可能であることに注意する．これらの簡単な例からも証明図を正確に定義する必要性が納得できるだろう．なお，本項の定義は林 [6] を参考にした．

一度に複数の仮定を落とす推論規則もあり，その場合はそれらの仮定のラベルをすべて横棒の右に並べる．さらに推論規則の名称は前提と結論の形から分かるので省略し，落ちた仮定のラベルだけを横棒の右に書くのが正式である．しかし，分かりにくい場合は付けてもよい．

### 1.2.3　論理和の推論規則

すでに含意 $\to$(ならば) と論理積 $\wedge$(かつ) の推論規則と証明図を説明したので，次は論理和 $A \vee B$ の推論規則とそれに応じて証明図の形を拡張する．

**$\vee$ 導入規則**　　命題 $A \vee B$ は，直観的には，命題 $A$ が成り立つかまたは命題 $B$ が成り立つことを意味する. 両方が同時に成り立っていても良い．「雨が降るかまたは風が吹く」は「雨が降る」かまたは「風が吹く」ことを意味してる.「雨が降り」かつ「風が吹いて」いてもよい．$\vee$ の導入規則は次のとおり.

$$\frac{A}{A \vee B}\,(\vee^l \mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{B}{A \vee B}\,(\vee^r \mathrm{I})$$

規則名についている $l$ と $r$ はそれぞれ左と右を意味する. 左の規則は「$A.$．ゆえに $A \vee B.$」と読む．右の規則は「$B.$ ゆえに $A \vee B$」と読む．$\vee$ 導入規則による証明図合成は次のとおり．$\Pi_1^A$ が $\Pi_2^B$ それぞれ証明図ならば，次のふたつの図形はともに $A \vee B$ の証明図であり，それらの仮定はそれぞれ $\Pi_1^A$ と $\Pi_2^B$ の仮定集合と一致する．

$$\cfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A\end{matrix}}{A \vee B} \qquad\qquad \cfrac{\begin{matrix}\Pi_2 \\ B\end{matrix}}{A \vee B}$$

**∨ 除去規則**

$$\dfrac{A \lor B \quad \begin{matrix}[A]_i \\ \vdots \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}[B]_j \\ \vdots \\ C\end{matrix}}{C}\ i, j(\lor\mathrm{E})$$

∨ 除去規則の $A \lor B$ をこの規則の主論理式という．$A \lor B$ から，**場合分け**により命題 $C$ を導くための推論規則である．「$A \lor B$.. $A$ ならば $C$. $B$ ならば $C$. ゆえに，$C$. $C$」と読む．$A$ と $B$ それぞれについて $C$ を証明しなければならないことに注意する．∨ は「または」と読むが, $A \lor B$ から $C$ を導くときは $A$ と $B$ のどちらからも $C$ が導けなくてはならないことに注意する．

∨ 除去規則による証明図合成は次のとおり．証明図 $\Pi_1^{A\lor B}$，$\Pi_2^C$，$\Pi_3^C$ の仮定集合をそれぞれ $S_1, S_2, S_3$ とする．$i, j$ はそれぞれ他で使われていない新しいラベルとし，さらに $[A]_i, [B]_j$ は仮定としてそれぞれ $S_2$ と $S_3$ に追加可能とする．このとき次の $\Pi$ は証明図であり，その仮定は $S_1 \cup S_2 \cup S_3 \setminus \{[A]_i, [B]_j\}$ である．

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi_1 \\ A \lor B\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_2 \\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}\Pi_3 \\ C\end{matrix}}{C}\ i, j(\lor\mathrm{E})$$

∨ 除去規則では，テンポラリに導入した二つの仮定 $A$ と $B$ が落ちる．

**例 1.2.3** $A = \langle$ 宝くじにあたる $\rangle$, $B = \langle$ 遺産を相続する $\rangle$, $C = \langle$ 金持ちになる $\rangle$ とおいて, ∨ 除去規則を読め．

次の ∨ 除去を使った証明は正しいだろうか？ 仮定もすべて除去されており，一見証明が完成している．しかしこの証明が正しいとすると，$D$ は任意だったからすべての論理式が証明されることになる．間違いはどこだろう?

$$\dfrac{\dfrac{[D]_1}{D \lor D}\,(\lor\mathrm{I}) \qquad [D]_1 \qquad [D]_1}{D}\ 1(\lor\mathrm{E})$$

$D \lor D$ の仮定 $[D]_1$ と場合分けの仮定 $[D]_1$ が一致しているところが，∨ の除去規則の適用条件に違反している．どこにも使われていない新しいラベルに変えなくてはいけない．しかしそうするとどれかの仮定 $[D]_i$ は落ちずに残る．つまり結論の $D$ は定理ではなくなる．

**例 1.2.4 (分配律の証明)** 次の命題論理式 $(a \lor b) \land (a \lor c) \to a \lor (b \land c)$ を自然演繹で証明しよう. 証明図が大きいので，分けて図示する．$a \lor (b \land c)$ の証明図 $\Pi^{a\lor(b\land c)}$ は次のとおり:

$$\dfrac{\dfrac{[(a \lor b) \land (a \lor c)]_3}{a \lor b}\,(\land^l\mathrm{E}) \qquad \dfrac{[a]_1}{a \lor (b \land c)}\,(\lor\mathrm{I}) \qquad \dfrac{\dfrac{[b]_4 \quad [c]_5}{b \land c}\,(\land\mathrm{I})}{a \lor (b \land c)}\,(\land\mathrm{I})}{a \lor (b \land c)}\,1,4(\lor\mathrm{E})$$

これを補題として四角で囲んで参照すると，目的の証明図は次のとおり．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[(a \lor b) \land (a \lor c)]_3}{a \lor c}\,(\land^r\mathrm{E}) \qquad \dfrac{[a]_2}{a \lor (b \land c)}\,(\lor\mathrm{I}) \qquad \boxed{\Pi^{a\lor(b\land c)}}}{a \lor (b \land c)}\,2,5(\lor\mathrm{E})}{(a \lor b) \land (a \lor c) \to a \lor (b \land c)}\,3(\to\mathrm{I})$$

逆方向 $a \lor (b \land c) \to (a \lor b) \land (a \lor c)$ も NJ で証明できる．$a$ が成り立つ場合と $b \land c$ が成り立つ場合にわければよい．後件 $(a \lor b) \land (a \lor c)$ が，いずれの場合も成り立つことも容易に示せる．

**問題 1.2.1**　$a \lor (b \land c) \to (a \lor b) \land (a \lor c)$ は NJ の定理である．

## 1.2.4　否定の推論規則

**否定** $\neg$ (**でない**) を導入する. そのために**矛盾**を表す特別な記号 $\bot$ を導入する.

**否定 ($\neg$) の導入規則**　命題 $\neg A$ は命題 $A$ が成り立たないことを意味する．$A$ の否定を導入するためにつねに偽である命題を表す記号 $\bot$ を用いて定義する．

$$\dfrac{\begin{array}{c}[A]_i \\ \vdots \\ \bot\end{array}}{\neg A}\,i(\neg\mathrm{I})$$

$\neg A$ の意味は，$A$ を仮定すると矛盾 ($\bot$) が導けることである．この規則適用で仮定 $[A]_i$ が落ちる．

$\neg$ 導入規則に対応した証明図合成は次のとおり．$\Pi^{\perp}$ が証明図でありその仮定集合を $S$ とし，$[A]_i$ が $S$ に追加可能とする．そのとき次の証明図 $\Pi'$ は証明図であり，その仮定集合は $S$ から仮定 $[A]_i$ を除去したものである．

$$\dfrac{\begin{array}{c}\Pi\\ \perp\end{array}}{\neg A}\ i(\neg\mathrm{I})$$

**$\neg$ の除去規則**

$$\dfrac{\neg A \qquad A}{\perp}\ (\neg\mathrm{E})$$

「$A$ が成り立つ．その否定 $\neg A$ が成り立つ．ゆえに矛盾である」と読む．$\neg$ 除去規則の $\neg A$ をこの規則の主論理式という．

命題 $A$ と $\neg A$，つまり自分自身とその否定が同時に証明されたときに $\perp$ が導けるとする規則である．

**例 1.2.5**　　$\langle$ 雨が降っている $\rangle$ かつ $\neg\langle$ 雨が降っている $\rangle$．ゆえに $\langle$ 矛盾 $\rangle$．

$\neg$ 除去規則による証明図合成は次のとおり．$\Pi_1^{\neg A}, \Pi_2^{A}$ をそれぞれ $S_1, S_2$ を仮定集合とする証明図とする．このとき次の図形 $\Pi$ は $\perp$ を結論とする証明図であり，その仮定集合は $S_1 \cup S_2$ である．

$$\dfrac{\begin{array}{cc}\Pi_1 & \Pi_2\\ \neg A & A\end{array}}{\perp}\ (\neg\mathrm{E})$$

**問題 1.2.2** 次の論理式を NJ で証明せよ．

1. $\neg A \to (A \to \perp)$
2. $(A \to \perp) \to \neg A$

**矛盾 ($\perp$) 律**　　矛盾 $\perp$ からはなんでも導けるという規則である．まさに中国の故事にある「矛」と「盾」である．矛盾概念を実質的に定義している．

$$\dfrac{\perp}{A}\ (\perp)$$

$\perp$ 規則による証明図合成はつぎのとおり．$\Pi^{\perp}$ が証明図で $A$ が論理式ならば次も証

明図であり，仮定集合は $\Pi$ のそれと一致する．

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \bot\end{matrix}}{A}\,(\bot)$$

**2 重否定律**　　2 重否定形から肯定を導く推論規則を 2 **重否定律**という．「悪くないことはない」ともってまわった言い方もこの推論規則のもとではたんに「悪い」となってしまう．

$$\dfrac{\neg\neg A}{A}\,(\neg\neg)$$

2 重否定律による証明図の合成は次のとおり．証明図 $\Pi^{\neg\neg A}$ の仮定集合を $S$ として，次は証明図であり，その仮定は $S$ である．

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \neg\neg A\end{matrix}}{A}\,(\neg\neg)$$

以上の推論規則をすべて使える体系を**古典命題論理** *(N* **K***)* という．NK から 2 重否定律を除いた体系を**直観主義命題論理**(NJ) という．

**代入法則**　　$\Pi$ を NK の証明図，$A$ を $\Pi$ に現れる命題変数とする．$\Pi$ に現れるすべての $A$ を閉じた論理式 $B$ で一斉に置き換えて得られる証明図 $\Pi'$ もやはり NK の証明図である．たとえば $X \to (A \to X)$ の証明図を考えよう．

$$\dfrac{\dfrac{[X]_1}{A \to X}\,(\to \mathrm{I})}{X \to (A \to X)}\,1(\to \mathrm{E})$$

この証明図で命題変数 $X$ を $B \vee C$ で書き換えて得られる図形も証明図である．

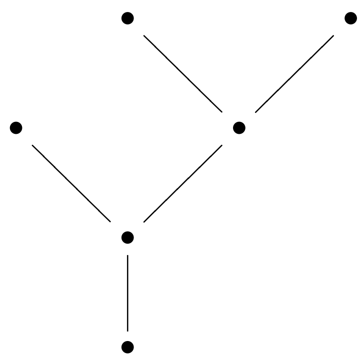
$$\dfrac{\dfrac{[B \vee C]_1}{A \to (B \vee C)}\to \mathrm{I}}{(B \vee C) \to (A \to (B \vee C))}\,1(\to \mathrm{E})$$

つまり，NK の定理 $X \to (A \to X)$ の命題変数 $X$ に他の論理式 $B \vee C$ を代入して得られる論理式もまた NK の定理である．同様に $\neg A \to (A \to \neg A)$ も NK の定

理である．NK の定理に出現する命題変数に閉じた論理式を代入して得られた論理式もまた NK の定理である．これを**代入法則**とよぶ．代入法則は変数が現れる場合にも次のように拡張できる．$A$ を次数 $n > 0$ の述語記号，$F$ を論理式，相異なる変数 $x_1, \ldots, x_n$ を $F$ の自由変数のすべてとする．さらに $F$ の束縛変数は証明図 $\Pi$ のどこにも現れていないとする．このとき，$\Pi$ に現れる原子論理式 $A(t_1, \ldots, t_n)$ をすべて 論理式 $F[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ で置き換えて得られる図形 $\Pi'$ は NK の証明図である．

代入法則の意味は明白であるが代入法則の証明も難しくないが，正確に述べると長くなるので割愛する．代入法則は NK だけでなく NJ でも成り立つ．

**証明の木構造**　証明図は定義により木構造をなしていた．つまり証明すべき定理がルートに配置され，そこから上に向かっていくつかの部分木が枝として生えている．この入れ子構造が葉にいたるまで繰り返されている．葉にはもちろん仮定が配置されている．証明図は木構造であるので，葉からルートへ至るパスがユニークに決まる．次の木は 5 つのノードと 3 枚の葉ノード，3 本のパスを持っている．葉以外のノードにはそのノードが導出された根拠である推論規則が付加されている．



このように証明図 $\Pi$ を木とみなして，$\Pi$ の部分木 $\Delta$ を $\Pi$ の**部分証明図**という．$\Pi$ は $\Pi$ 自身の部分木である．$\Delta$ を部分証明図として含む証明図が $\Pi$ か $\Delta$ に限るとき，$\Pi$ の部分証明図 $\Delta$ を $\Pi$ の**直接の部分証明図**とよぶ．

仮定がすべて落ちて結論が論理式 $A$ であるような NJ の証明図が存在するとき $\vdash_{\mathrm{NJ}} A$ と書き，$A$ を ***NJ* の定理**という. 同様に ***NK* の定理**を定義し，$A$ が NK の定理のとき $\vdash_{\mathrm{NK}} A$ と書く．

論理結合子 $\wedge$ および $\forall$ は，NK では $\vee$, $\rightarrow$, $\perp$, $\exists$ から派生する記号とみなしてよい．それを示すためには次を示せばよいが，いずれも手頃な演習問題である．

$\vdash_{\mathrm{NK}} A \wedge B \equiv \neg(\neg A \vee \neg B) \qquad \vdash_{\mathrm{NK}} \forall x\, P \equiv \neg(\exists x \neg P).$

### 1.2.5　命題論理の階層

論理記号として $\rightarrow$ だけを持つ (したがって推論規則としては $\rightarrow$ 導入と $\rightarrow$ 除去だけが使える論理系を**原始論理**という. 論理の中では最も簡単な体系である. これに論理記号 $\wedge$ と $\vee$ が導入され (したがって $\vee E$ および $\vee I$ についての推論規則が加わる) た体系を**肯定論理**という. **否定**の概念が導入されていない論理である. さらにこれに論理記号 $\neg$ が導入されると論理体系として一応ととのった形のものができ上がる. これを**最小論理**という. 最小論理は矛盾記号 $\perp$ が導入されているが, これが恒偽という性質をもつようになるには, さらに矛盾律 $\perp$ が導入されたときである. 矛盾律を含む最小論理を **直観主義論理**という.

否定 $(\neg)$ と矛盾 $(\perp)$ の間の関係についての注意を述べる．矛盾 $\perp$ を右辺に持つ含意形 $A \rightarrow \perp$ と否定命題 $\neg A$ とは最小論理において論理的に同値である．実際 $\neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$ および $(A \rightarrow \perp) \rightarrow \neg A$ どちらも最小論理で容易に証明できる．つまり否定命題はこの形の含意命題に書き直すことができる．たとえば $\neg A \rightarrow \neg B$ は $(A \rightarrow \perp) \rightarrow (B \rightarrow \perp)$ と同値である．また $\neg\neg A$ は $(A \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ と書き換えることができる．こうすると $\neg$ 除去規則が $\rightarrow$ 除去規則に含まれていることもすぐわかる．こうして否定は含意と矛盾に還元できた．NK も NJ の最小論理の拡張なので，やはり否定は含意と矛盾に還元できる．つまり $\neg$ は派生記号にすぎない．$\neg$ に否定としての意味を与えるのは，$\perp$ に矛盾としての実質的な意味を与える矛盾律である．

命題論理の階層を次の表にまとめる.

| 名称 | 推論規則 |
|---|---|
| 原始論理 | $\rightarrow$　導入・除去 |
| 肯定論理 | $\rightarrow$　$\wedge$　$\vee$ 導入・除去 |
| 最小論理 | $\rightarrow$　$\wedge$　$\vee$　$\neg$　導入・除去 |
| NJ(直観主義論理) | $\rightarrow$　$\wedge$　$\vee$　$\neg$　導入・除去　矛盾律 |
| NK(古典論理) | $\rightarrow$　$\wedge$　$\vee$　$\neg$　導入・除去　矛盾律　$\neg\neg$ |

これら各々の論理系に $\forall$ と $\exists$ についての導入除去規則を加えるとその論理系に対する述語論理を得る. 述語論理の範囲で上に定義した**直観主義論理**の形式的体系を NJ(calculus of natural deduction for intuitionistic predicate logic) という. 最後に 2 重

否定除去規則を NJ に加えた体系を**古典論理**とよび，NK(calculus of natural deduction for classical predicate logic) とよぶ．述語論理の $\forall$ と $\exists$ に関する推論規則はこのあと説明する．

### 1.2.6 限量子

**アルファ同値** ふたつの論理式は，それぞれの論理式に現れる各束縛変数を左から右へ出現順に新変数で書き換えると同一の論理式になるとき，**アルファ同値** という．たとえば $\forall x \exists y \mathrm{love}(x, y)$ と $\forall p \exists q \mathrm{love}(p, q)$ とはアルファ同値である．限量子の導入・除去規則を定義したあとで容易に確かめられることであるが，アルファ同値という関係は文字どおり論理式の間の同値関係である．つまり論理式 $A$ が NJ で証明可能ならば $A$ とアルファ同値な論理式も NJ で証明可能である．この性質により本章ではアルファ同値な論理式を同一視する．NK でも全く同様である．

限量子 $\forall$ と $\exists$ についてそれぞれの導入規則と除去規則の意味を説明しよう．論理式 $\forall x\, A(x)$ はすべての対象が性質 $A$ を持つという主張を表していた．対象領域が有限であればそれらの元を $c_1, c_2, \ldots, c_n$ $(n > 0)$ とおくと，$\forall x\, A(x)$ の意味は命題 $A(c_1) \wedge A(c_2) \wedge \cdots \wedge A(c_n)$ のことである．しかし，自然数論のように対象が無限にある場合はこのような書き換えは不可能である．なぜならば論理式の長さは有限であるからである．個体数が無限の場合，それぞれについて性質 $A$ を持つかどうかを有限ステップで確かめることはできない．個体領域が有限でない場合は個々の個体にあたるのではなくなんらか一網打尽の方法でなければならない．そして次のような場合実際にそれが可能である．任意に対象を選んでそれを固定して変数 $x$ で表し，$x$ が性質 $A$ を持つことが記号的に，つまり「一様に」確かめられればよい．たとえば，太郎と次郎が同じ背丈とする．そのとき人 $x$ が太郎と同じ背丈ならば $x$ は次郎とも同じ背丈であると結論してよい．これは $x$ が誰であろうと，人間が無数にいても，「一様に」確かである．ゆえに，「すべての人は，彼が太郎と同じ背丈ならば彼は次郎と同じ背丈である」と結論してよい． このように知識の中にはわざわざ個別にあたらなくても記号的手段により確実な帰結が得られるものがある．以上の考察からわかるように，$\forall$ 導入規則は $\wedge$ 導入規則の一般化であり，同様に $\vee$ 除去規則は $\vee$ 除去規則の一般化とみることができる．

**全称限量子の推論法則**

**∀ 導入規則**

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ A\end{matrix}}{\forall x\, A}\,(\forall\mathrm{I}\ x)$$

この証明図の仮定は $\Pi$ の仮定と同じであると定義する．「$x$ を任意の対象とする．$\Pi$ で $A(x)$ が成り立つこと示された．$x$ は任意の対象であったから，ゆえに $\forall x\, A(x)$ が成り立つ」と読む．

ここで $x$ はすべての対象を「走る」点が重要なポイントである．すなわち自由変数 $x$ は任意の対象を表すという役割を持っていなければならないが，それが次の**変数条件**である：変数 $x$ は $A$ の証明図 $\Pi$ の仮定に自由変数として現れない．この変数条件によればたしかに，$A$ は $x$ に関するいかなる条件も使わずに導かれている．すなわち全ての個体について $A$ が成り立つことを意味している．

**∀ 除去規則**　$\Pi^{\forall x A}$ を証明図とする．そのとき次は証明図でありその仮定集合は $\Pi$ のと一致する．

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \forall x A\end{matrix}}{A[t/x]}\,(\forall\mathrm{E}\ x)$$

ここで $t$ は任意の項であり，$A[t/x]$ は $A$ の自由変数 $x$ をすべて $t$ で置き換えて得られる論理式である．$\forall x A(x)$ を ∀ 除去規則の主論理式と定義する．「すべての $x$ について $A(x)$ が成り立つ．ゆえに $A(t)$ が成り立つ」と読む．

**∃ 導入規則**

$$\dfrac{A(t)}{\exists x A(x)}\,(\exists\mathrm{I}\ x)$$

ここで $t$ は任意の項であり，$A(t) = A[t/x]$ は $A$ の自由変数 $x$ をすべて $t$ で置き換えて得られる論理式である．

∃ 導入規則による証明図合成は次のとおり．

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ A[t/x]\end{matrix}}{\exists x A}\,(\exists\mathrm{I}\ x)$$

ここで $t$ は任意の項であり，$A[t/x]$ は $A$ の自由変数 $x$ をすべて $t$ で置き換えて得られる論理式である．この証明図の仮定集合は $\Pi$ のと一致する．

**∃ 除去規則**

$$\dfrac{\exists x A \qquad \begin{matrix} A(x) \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\,(\exists\mathrm{E})$$

$\exists x A(x)$ を ∃ 除去規則の主論理式という．「$A$ を満たす $x$ が存在する．$x$ を任意の対象を表すとして，$A$ から $C$ が $\Pi$ により導ける．$C$ は $x$ に依存しないからゆえに $C$ が成り立つ」と読む．

左の上式 $\exists x\, A$ の証明図 $\Pi_1$ は性質 $A$ を満たす対象がすくなくともひとつは存在することを示している．存在するのだからそれらのうち任意にひとつ選んで $x$ とおこう．つまり $A(x)$ が成り立っている．右の上式は $A(x)$ から $C$ が導けること示している．しかも変数条件から $x$ は $A$ を満たしている限りどんな個体であってもよい．すると上式の左の証明図と右の証明図をつなぐと $C$ の証明図が得られることになる．個体に応じた場合分けだと無限個の証明図をならべなくてはならないが，任意の個体を表す変数 $x$ を導入して，ひとつのパターンですませている．

∃ 除去規則による証明図合成は次のとおり．$\Pi_1$ は $\exists x\, A$ の証明図，$\Pi_2$ は $C$ の証明図であり，$k : A$ は $\Pi_2$ の仮定になりうるとする．変数条件は次のとおり: $x$ は $C$ に現れず，また $k : A$ 以外の $\Pi_2$ の仮定に現れない．

$$\dfrac{\begin{matrix} \Pi_1 \\ \exists x\, A \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \Pi_2 \\ C \end{matrix}}{C}\,k(\exists\mathrm{E})$$

この証明図の仮定集合は $\Pi_1$ と $\Pi_2$ の仮定集合の和から仮定 $k : A$ を除いたものである．

## 1.3　正規形定理とその応用

### 1.3.1　正規形証明図

$$\dfrac{\dfrac{A}{A \vee B}\,(\vee\mathrm{I}) \qquad \begin{matrix} [A] \\ \vdots \\ C \end{matrix} \qquad \begin{matrix} [B] \\ \vdots \\ C \end{matrix}}{C}\,(\vee\mathrm{E})$$

この証明図では，導入された $A \vee B$ がその直後に除去されている．このような論理式は証明には必要がない無駄な論理式であり，回り道と考えられる．この場合は「導入後すぐ除去」がないように次のように書きなおすことができる．

$$\begin{array}{c} A \\ \vdots \\ C \end{array}$$

すなわち同じ仮定を用いて同じ結論を導出するより簡単な証明図ができた．これを一般化したのが正規化定理である．すなわち，どんな証明図もその仮定と結論を変えずに回り道のない証明に変形できる．まわり道のない証明図のことを正規形とよぶ．

次も回り道を除去することができるパターンである．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}[A]_i \\ \vdots \\ B\end{array}}{A \to B}\,(\to \mathrm{I}) \qquad \begin{array}{c}\Pi \\ A\end{array}}{B}\, i(\to \mathrm{E}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\Pi \\ A \\ \vdots \\ B\end{array}$$

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ A[t/x]\end{array}}{\exists x A}\,(\exists \mathrm{I}) \qquad \begin{array}{c}A \\ \vdots \\ B\end{array}}{B}\,(\exists \mathrm{E}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\Pi \\ A[t/x] \\ \vdots \\ B\end{array}$$

$\exists$E 規則の変数条件より $x$ は自由変数として $B$ には現れないので，$B[t/x] = B$ であることに注意する．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ A\end{array}}{A \vee B}\,(\vee \mathrm{I}) \qquad \begin{array}{c}[A]_i \\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]_j \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\, i, j(\vee \mathrm{E}) \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c}\Pi \\ A \\ \vdots \\ C\end{array}$$

$\perp$ 推論規則についても同様な簡約規則がある．たとえば，$\perp$ 推論規則で導出された $A \vee B$ が 直後に $\vee$E 除去規則により消える場合である．この簡約規則は次のとおりである．

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ \perp\end{array}}{A \vee B}\,(\perp) \qquad \begin{array}{c}[A]_i \\ \vdots \\ C\end{array} \qquad \begin{array}{c}[B]_j \\ \vdots \\ C\end{array}}{C}\, i, j(\vee \mathrm{E}) \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{\begin{array}{c}\Pi \\ \perp\end{array}}{C}\,(\perp)$$

$\perp$ からは何でも導出できるのであるから，除去規則の結論を直接 $\perp$ から導入するように証明図を書き換えることができる．他の除去規則の場合も同様に考えてその簡約規則を決めることができる．$\perp$ の関するこのような簡約規則を $\perp$ 簡約規則とよぶ．

導入と除去が離れている次のようなパターンもある．

$$\dfrac{A \vee (A \wedge B) \quad \dfrac{[A]_1 \quad B}{A \wedge B}\,(\wedge \mathrm{I}) \quad [A \wedge B]_2}{\dfrac{A \wedge B}{A}\,(\wedge \mathrm{E})}\,1,2(\vee \mathrm{E})$$

これは次のように消去することができるから回り道と考えらえる．

$$\dfrac{A \vee (A \wedge B) \quad [A]_1 \quad \dfrac{[A \wedge B]_2}{A}}{A}\,1,2(\vee \mathrm{E})$$

このように，証明の中の「回り道」は正確に定義されなければならないが，林 [6] にその詳細がある．本章の回り道の定義は直観主義論理 NJ のいくつかの基本性質を示すに十分なだけの定義にとどめたた．

さて，回り道のない証明図を**正規形**とよぶ．正規形の証明図では，導入された論理式が除去されることはない．したがって正規形の証明図は仮定から出発して最初は除去規則ばかりを適用し後半は導入規則ばかりを適用して構成される証明図である．

次の証明図は正規形である．

$$\dfrac{\dfrac{[B]_1}{A \to B} \to \mathrm{I}}{B \to (A \to B)} \to \mathrm{I}1$$

次の証明図は正規形ではない．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A]_1 \quad [B]_2}{A \wedge B}\,\wedge \mathrm{I}}{B}\,\wedge \mathrm{E}}{A \to B}\,1(\to \mathrm{I})}{B \to (A \to B)}\,2(\to \mathrm{I})$$

### 1.3.2　NJ の正規形定理

NJ のすべての論理式 $A$ について，$A$ が証明可能ならば回り道のない $A$ の証明図が存在する．この定理を NJ の正規形定理という．回り道などの必要ないくつかの概念を正確に定義してから証明しよう．そのあとで，NK の正規形定理について述べる．NK でも NJ でも成り立つ．NK の正規化定理は NJ の正規化定理からすぐ得られる．

$\Pi$ を証明図として，$\Delta \Longrightarrow \Delta'$ を簡約規則とする．$\Pi$ に現れる部分証明図 $\Delta$ の現れをひとつ $\Delta'$ に書き換える変形を**基本変形**とよぶ．基本変形が可能な証明図を**簡約可能**であるという．

論理式 $A$ が証明図 $\Pi$ のある部分証明図 $\Delta$ の主論理式であり，かつ $\Delta$ を左辺に持つ簡約規則が存在するとき，$A$ を $\Pi$ の**回り道**という．

ひとつの証明図に同じ仮定がいくつも葉として現れることがある．簡約規則の中には葉を証明図で ‘接ぎ木’ する操作も含まれている．したがってひとつの回り道を基本変形により消去しても，証明図は木としては大きく複雑になってしまうことがある．つまり基本変形により確実に減少するような，証明図の木としての複雑さ (サイズ) 以外の複雑さが必要である．それが証明図のランクである．

**定義 1.3.1** 証明図 $\Pi$ に出現する回り道の論理式の最大長を $\Pi$ の**ランク**とよぶ．回り道の論理式が存在しない場合はランク $0$ と規約する．

ここで, 論理式 $A$ に出現する論理結合子の出現の数を $A$ の**長さ**とよび $\sharp A$ と書く．たとえば $p(x), q(x), r(x)$ をそれぞれ原子論理式として $\sharp(\exists x\ (p(x) \wedge q(x) \wedge \neg r(x))) = 4$ である．

**定理 1.3.1 (NJ の正規形定理)** $\Pi$ が論理式 $A$ を結論とする NJ の証明図ならば，$A$ を結論とし，仮定集合が $\Pi$ の仮定集合の部分集合であるような NJ の正規形証明図が存在する．

証明　$\Pi$ をランク $n > 0$ の証明図とする．すると $\Pi$ の最も左上に出現し，かつ長さ $n$ の回り道の論理式を主論理式として持つ簡約可能な $\Pi$ の部分証明図が存在する．そのひとつを $\Pi'$ とおく．$\Pi$ の部分証明図 $\Pi'$ を簡約すると，$\Pi$ は変形されて $\Pi''$ と

なる．ここで $\Pi$ と $\Pi''$ を較べると，ランク $n$ の回り道の論理式の出現の数は少なくともひとつ $\Pi''$ の方が小さくなっている．$\Pi''$ について同じ変形操作を再帰的に適用すればついには長さ $n$ の回り道の論理式はなくなる．こうして，$\Pi$ のランクよりも小さいランクを持ち，かつ $\Pi$ の結論と同じ結論を導く証明図が得られることがわかる．明らかに，このランク下げの操作はランクが 0 になるまで繰り返すことができる．つまりすべての証明図が正規形を持つことが示された．

証明図の基本変形操作は新たな仮定を導入しないので，証明図の簡約の途中で $\Pi$ に現れない新たな仮定が現れることはない．ゆえに，得られた正規形証明図の仮定集合は $\Pi$ の仮定集合の部分集合である． □

正規形定理のこの証明のポイントは，葉の方から優先して基本変形を適用するところである．一般に，基本変形の結果枝が増えて証明図のランクが「大きく」なることがある．しかしこの証明のように，基本変形が適用可能な極小の部分証明図を優先して簡約するならば，とくに問題のありそうな接ぎ木操作でも，基本変形の形から回り道の出現数は確実に少なくなる．したがってランクに基づく数学的帰納法が成立する．

**NK の正規形定理**　　NJ の正規形定理を用いて，NK の正規形定理は次のように簡単に示すことができる．まず，NK の 2 重否定律より $\neg\neg A \to A$ は NK の定理であることに注意する．すると，$\Pi$ が NK の証明ならば，$\Pi$ の中で二重否定律を使う個所をすべて次のように $\to$ 除去規則でおきかえると，得られる証明図もやはり NK の証明図である．

$$\dfrac{\begin{matrix}\Pi\\ \neg\neg A\end{matrix}}{A} \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg A]_i}{A}\,(\neg\neg)}{\neg\neg A \to A}\,i \qquad \begin{matrix}\Pi\\ \neg\neg A\end{matrix}}{A}$$

ここで $i$ は新しいラベルとする．$\Pi$ をこのように変形した結果の証明図を $\Pi'$ とおく．さらに $\Pi'$ に現れる $\neg\neg A \to A$ の部分証明図全体を葉 $\neg\neg A \to A$ に置き換えて得られる証明図 $\Pi''$ としよう．$\Pi''$ にはもはや 2 重否定律は現れないから $\Pi''$ は NJ の証明図に他ならない．そこで，NJ の証明図として $\Pi''$ に正規形定理を適用すると NJ の正規形証明図が得られる．ただし 2 重否定律を表す補題は葉として残っている．こうして NK の証明図は 2 重否定律補題 $\neg\neg A \to A$ を葉に持つ NJ の正規形証

明図に簡約できることが示された．

**主部分証明図と幹**　推論規則の定義において，除去規則に対しては前提の論理式のうちどれが主論理式か指定したことを思い出そう．最後が除去規則で終わる証明図 $\Pi$ に対してその主論理式を結論とする $\Pi$ の直接の部分証明図を $\Pi$ の**主部分証明図**という．除去規則で終わっていない証明図に対しては，主部分証明図は定義されない．証明図 $\Pi$ の結論を直接導く推論規則を $\Pi$ の主規則とよぶ．

**定義 1.3.2 (証明図の幹)** 証明図 $\Pi = \Pi_0$ の部分証明図の列 $\Pi_0, \Pi_1, \ldots, \Pi_n \quad (n \geq 0)$ は，$\Pi_{i+1}$ が $\Pi_i$ の主部分証明図 $(0 \leq i \leq n-1)$ であり，かつそのような列の中で長さが最大のものを $\Pi$ の**幹**とよぶ．

証明図の主部分証明図が高々ひとつであるから，どんな $\Pi$ にも幹は唯一存在しその長さは 1 以上である．また，$\Pi$ が除去規則で終わっていなければ，定義により $\Pi$ の主部分証明図はないので，$\Pi$ の幹の長さが 1 である．逆に $\Pi$ の幹の長さが 1 ならば $\Pi$ の主規則は除去規則ではない．

例として次の証明図を $\Pi = \Pi_0$ とおいて $\Pi$ の幹を求めよう．

$$\dfrac{\dfrac{[(A \vee A) \wedge A]_1}{A \vee A}\,(\wedge \mathrm{E}) \qquad [A]_2 \qquad [A]_3}{}\; 2,3(\vee \mathrm{E})$$

$\Pi_0$ の主部分証明図は次の証明図 $\Pi_1$ である．

$$\dfrac{[(A \vee A) \wedge A]_1}{A \vee A}\,(\wedge \mathrm{E})$$

．$\Pi_1$ の主部分証明図 $\Pi_2$ は仮定 $[(A \vee A) \wedge A]_1$ でり，$\Pi_2$ は葉であるから主部分証明図は持たない．したがって $\Pi$ の幹は列 $\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2$ であり，その長さは 3 である．

**補題 1.3.2** 除去規則で終わる NJ の正規形の証明図には落ちていない仮定が必ず残っている．

証明　$\Pi$ を NJ の正規形証明図とし，$\Pi$ の主規則は除去規則とする．$\Pi$ の幹を $\Pi_0, \Pi_1, \cdots, \Pi_{n-1}$ $(n > 0, \Pi_0 = \Pi)$ とおく．$\Pi$ が正規形だから，どの $\Pi_i$ も簡約できない．$\Pi$ の主規則が除去規則で，$\Pi$ の主論理式が $\Pi_1$ の結論と一致することから，$\Pi_1$ の主規則は $\perp$ ではない．また，$i > 1$ ならば $\Pi_i$ の主規則は $\perp$ 規則ではない．さも

なければ $\Pi$ が簡約可能になり仮定に反する．一方，主規則が除去規則であるような $\Pi_i$ は幹には含まれない．もし含まれるならば $\Pi_i$ の主論理式が $\Pi_{i+1}$ の結論と一致し，$\Pi_i$ と $\Pi_{i+1}$ の主規則がそれぞれ除去規則と導入規則であるような $0 \leq i < n-1$ が存在しなければならないが，$\Pi$ が正規形なのでそれは不可能である．ゆえに，$\Pi$ の幹の要素 $\Pi_i$ の主規則はすべて除去規則である．とくに幹の最後の要素 $\Pi_{n-1}$ は $\Pi$ の葉である．一方，除去規則は幹の葉を落とさないから，$\Pi_{n-1}$ は $\Pi$ の落ちていない仮定である．□

### 1.3.3　正規形定理の応用

NJ の正規形定理からただちに得られる重要な帰結のいくつかの性質とその証明を記す．正規形証明図の幹に関する上述の性質を使って，NJ の次の重要な性質を証明しよう．

- $\perp$ は証明できない．つまり NJ は無矛盾である．
- 原子命題は証明できない．
- $A \vee B$ が NJ の定理ならば $A$ か $B$ の少なくともひとつは NJ の定理である．
- $\exists x A$ が NJ の定理ならばある項 $t$ が存在して $A[t/x]$ が NJ の定理である．
- NJ で排中律 $A \vee \neg A$ は証明できない．

**無矛盾性**　$\perp$ が NJ で証明できないこと示せばよい．背理法を用いる．$\perp$ が NJ で証明可能とする．$\perp$ の正規形証明図を $\Pi$ とおく．$\perp$ が $\Pi$ 以外の部分証明図 $\Pi'$ の結論となっていれば $\Pi$ を $\Pi'$ とおく．このことを繰り返せばいつかは結論を除いてどの部分証明図の結論も $\perp$ ではないようにできる．この証明図を改めて $\Pi$ とおけばよい．すると $\Pi$ は除去規則で終わっている正規形証明図なので落ちずに残っている $\Pi$ の仮定が存在する．これは $\Pi$ の仮定がすべて落ちていることと矛盾する．背理法により，ゆえに $\perp$ は NJ では証明できない．

**原子命題の証明不可能性**　次に，原子命題 $A$ が NJ の定理でないことを $\perp$ の場合と同様に背理法で証明する．$\Pi$ を $A$ の (仮定のすべて落ちた) 正規形証明図とする．$\perp$ が NJ で証明不可能であったから $\Pi$ の最後は除去規則で終わらなければならない．すると $\Pi$ は最後が除去規則で終わる正規形証明図であるから，$\Pi$ は仮定を

持たなければならない．しかしこれは $\Pi$ が仮定を持たないことに反する．背理法により，ゆえに $A$ は NJ で証明できない．

**NJ の構成的性質**　$A \vee B$ が NJ の定理としよう．NJ の正規形定理より $A \vee B$ を結論とする正規形証明図 $\Pi$ が存在する．$\Pi$ の最後の推論規則は $\bot$ 規則か除去規則か $\vee$ 導入規則かの 3 とおりである．ところが $\bot$ は NJ で導けなかったから $\bot$ 規則ではない．次に除去規則の場合であるが，$\Pi$ が除去規則で終わる正規形証明図なので，落ちずに残っている $\Pi$ の仮定が存在することになり矛盾する．したがってこの場合も不可能である．ゆえに $\Pi$ の最後の推論規則は $\vee$ 導入規則でなければならない．$\vee$ 導入規則の形から，$A$ または $B$ を結論とする $\Pi$ の直接の部分証明図が存在する．これは $A$ または $B$ のいずれかは NJ の定理であることに他ならない．ゆえに，$A \vee B$ が NJ の定理ならば $A$ と $B$ のいずれかは NJ で証明可能である．一方古典論理 NK では，排中律が示すように，$A$ と $\neg A$ のいずれもが証明不可能であっても $A \vee \neg A$ は証明可能である．

次に，$\exists x\, P(x)$ が述語計算 NJ で証明可能ならば $P(t)$ が NJ で証明可能であるような項 $t$ が存在することを示そう．そのために $\exists x\, P(x)$ が NJ で証明可能と仮定する．正規化定理により，最後の推論規則は $\exists$ 導入規則しかありえない．つまりある項 $t$ が存在して $P(t)$ が証明できなければならない．これが証明すべきことであった．すなわち，NJ では，論理式で表される性質 $P$ をもつ対象が存在することが証明されるとき，正規化定理によりその対象の形が項として証明図の中に現れている．これは NJ の構成的 (constructive) な性質と考えられる．古典論理 NK はこの性質を持たない．

NJ の存在限量子の構成的性質はプログラム合成の基礎原理であり，その基本的な考え方は次のとおりである．いま入力 $x$ に対して出力 $y$ を求めるプログラムの仕様が論理式 $\forall x \exists y P(x, y)$ として与えられたとする．まずこの仕様を NJ で証明する．証明が得られたならばそれを正規形に簡約する．すると正規形定理が示す NJ の構成的性質から $P(x, t(x))$ が成り立つような項 $t(x)$ が $y$ に代入される項として現れる．この $t(x)$ が求めるプログラムである．詳しくは林 [6] を参照のこと．

**排中律**　次に排中律が NJ で証明不可能であることを背理法で導こう．$A$ を命題変数として命題 $P = (A \vee \neg A)$ の証明図 $\Pi$ が存在すると仮定しよう．すると NJ の正規形定理とすぐ上で証明したことにより最後は $\vee$ 導入規則である．したがって $A$ または $\neg A$ のどちらかは NJ で証明可能でなければならない．しかし命題

変数は NJ の定理ではありえなかったので $A$ は NJ の定理ではない．残りは $\neg A$ が NJ で証明可能の場合のみである．$\neg A$ が NJ で証明可能ならば，その証明図 $\Pi$ に現れる命題変数 $A$ を一斉に $\neg A$ で置き換えて得られる証明図を $\Pi'$ とすると代入法則より，$\Pi'$ は $\neg\neg A$ の証明図である．$\neg A$ が NJ で証明可能であったからこれで矛盾 $\perp$ が NJ で導けた．これは NJ が無矛盾であることに反する．ゆえに $\neg A$ も NJ では導けない．これは，$\Pi$ の最後の推論規則が $\vee$I であることに矛盾する．ゆえに背理法から排中律は NJ で導けない．

一方，NK では次のとおり排中律が証明できる．$\vdash_{\mathrm{NK}} \neg X$ と $\vdash_{\mathrm{NK}} X \to \perp$ は同値であったから，$\vdash_{\mathrm{NK}} A \to B$ ならば $\vdash_{\mathrm{NK}} \neg B \to \neg A$ である．また次の三段論法も成り立つ．すなわち $\vdash_{\mathrm{NK}} A \to B$ かつ $\vdash_{\mathrm{NK}} B \to C$ ならば $\vdash_{\mathrm{NK}} A \to C$. $\vdash_{\mathrm{NK}} A \to B$ かつ $\vdash_{\mathrm{NK}} A \to C$ ならば $\vdash_{\mathrm{NK}} A \to B \wedge C$ の証明も容易である．これらを使ってド・モルガン律 $\vdash_{\mathrm{NK}} (A \to B) \equiv (\neg B \to \neg A)$ を示すことができる．ここで $X \equiv Y$ は論理式 $(X \to Y) \wedge (Y \to X)$ を表す略記法ある．これらの性質の証明はいずれも自然演繹に慣れるための手頃な練習問題である．

この三段論法とド・モルガン律を用いて排中律を NK で証明しよう．$\vee$ 導入とド・モルガン律より $\vdash_{\mathrm{NK}} \neg(A \vee \neg A) \to \neg A$．おなじく，$\vdash_{\mathrm{NK}} \neg(A \vee \neg A) \to \neg\neg A$ である．このふたつに $\neg$ 除去規則を適用して $\vdash_{\mathrm{NK}} \neg(A \vee \neg A) \to \perp$ を得る．ゆえに $\neg$ 導入規則より $\vdash_{\mathrm{NK}} \neg\neg(A \vee \neg A)$ を，さらに，2 重否定律により $\neg\neg$ を消去して目標の $\vdash_{\mathrm{NK}} A \vee \neg A$ を得る．以上の証明を次のように NK の証明図にまとめることができる．まず，使った三段論法やド・モルガン律を「補題」とする $A \vee \neg A$ の証明図 $\Pi$ を作る．$\Pi$ はいくつかの葉が「補題」の論理式で終わっていること以外は NK の証明図である．ここで，$\Pi$ および「補題」の仮定はすべて落ちていることに注意する．次に，補題が置かれている $\Pi$ のすべての葉をその補題の証明図で ‘接ぎ木’ する．得られた証明図は $A \vee \neg A$ を結論として持ち，かつ，仮定がすべて落ちた NK の証明図である．

**NK の NJ への埋め込み**　　NJ は NK から 2 重否定律だけを除いたシステムであった．つまり NJ の証明能力は NK より低い．実際，NK で証明できる排中律 $A \vee \neg A$ が NJ では証明不可能であった．すなわち NJ の定理は NK の定理より真に少ない．しかし意外なことに両者の証明能力はある意味で等価である．それを示すのが Glivenko の定理である．

**定理 1.3.3 (Glivenko)** 論理式 $A$ が命題計算 NK において証明可能ならば $\neg\neg A$ は NJ で証明可能であり，逆も成り立つ．

$$\vdash_{\mathrm{NK}} A \iff \vdash_{\mathrm{NJ}} \neg\neg A$$

つまり古典論理 NK の証明は直観主義論理 NJ の証明に埋め込むことができる．

Glivenko の定理を証明するには，NK の証明図に現れるすべての論理式の前に $\neg\neg$ を付加して得られる証明図が NJ の証明図であることをいえばよい．そのためには NK のすべての推論規則について，その前提のすべての論理式の前に $\neg\neg$ を付加したものを仮定して，結論の論理式の前に $\neg\neg$ をつけた論理式が NJ で導けることを示せばよい．たとえば，$\to$ E 規則

$$\frac{A \to B \quad A}{B}$$

については，$\neg\neg(A \to B)$ と $\neg\neg A$ を仮定して $\neg\neg B$ を導く NJ の証明を示せばよい．いいかえると $\neg\neg(A \to B) \to \neg\neg A \to \neg\neg B$ を NJ で証明すればよい．NK の他の推論規則についても同様である．自然演繹 NJ の演習問題とする．

同様の方針で Glivenko の定理は述語計算 NK にも拡張される．$A$ を論理式とし，$A$ に現れる $\forall x\, B$，$\exists x\, B$ の形の部分論理式をそれぞれ $\forall x\, \neg\neg B$，$\exists x\, \neg\neg B$ と再帰的に置き換えて得られる論理式を $A^*$ と書く．たとえば，$p(x, y)$ を原子論理式として $(\forall x \forall y\, p(x, y))^* = \forall x\, \neg\neg\forall y\, \neg\neg p(x, y)$ である．拡張の鍵は次の同値性であるが，それは上述のように演習問題とする．

$$\vdash_{\mathrm{NK}} A \iff \vdash_{\mathrm{NJ}} \neg\neg(A^*).$$

Glivenko の定理によって論理式 $A$ の NK における証明図 $\Pi$ を $\neg\neg A$ の NJ における証明図 $\Pi'$ に変形できる．$\Pi'$ に NJ の正規形定理を適用して，正規形 $\Pi''$ を得る．この $\Pi''$ に対して二重否定律を適用すると $A$ の NK における証明図 $\Pi'''$ となる．明らかに $\Pi'''$ は, 最後に二重否定律が使われる以外は，NJ における正規形証明図である．つまり NK は NJ の中に埋め込まれていることが示された．

# 参考文献


[1] D. Prawitz. *Natural Deduction*. Almquist & Wiskell, 1960.

[2] A. M. Unger. *Normalization , Cut-Elimination and the Theory of Proofs*. CSLI, 1992.

[3] 角田 譲. 数理論理学入門. 朝倉書店, 1996.

[4] 小野寛晰. 情報科学のための論理. 日本評論社, 1994.

[5] 前原昭二. 数学基礎論入門. 朝倉書店, 1977.

[6] 林 晋. 数理論理学. コロナ社, 1989.

[7] 松本和夫. 数理論理学. 共立講座 現代の数学. 共立出版, 1971.

# 索引