($\omega$無矛盾の定義を訂正しました．S君に感謝． 2007/June/5)

# 1 ゲーデルの不完全性定理

算術を含む形式体系では，真ではあるがそのことを証明できない命題が存在する．これがゲーデル の第1不完全性定理である． さらに, 算術を含む体系の無矛盾性の証明はその体系の中 では実行不可能である．これが，ゲーデルの第2不完全性定理である．この両不完全性 定理の証明を紹介する．証明の流れは，参考文献 [ 2] に沿っている． 不動点論法としてのゲーデルの 対角化定理を中心にした方法を用いる．参考文献 [2]より正確でかつ分かりやすくなったと思う． なお，対角化定理のここでの証明はKunen [3](ページ39から42)からヒントを得た．

ゲーデル関係の一般向け参考文献としてラッカー [ 6], 林 [5]など数多くある．ハンドブック [1]には，専門的なすぐれた記述がある．帰納関数の父としてのゲーデルについてはほとんど触れることはできなかった．「ゲーデルを語る」 ([ 4])の中で，帰納関数理論の巨人S.C.クリーネは，計算の理論に与えたゲーデルの大きな影響を 興味深く証言している．

## 1.1 概要

20世紀初頭数学者ヒルベルトは，すべての真な数学的命題を導出し, しかももそれら以外は導出しないような形式的体系を求める問題を提出した． これは, ‘ヒルベルトのプログラム’とよばれる．しかしながら，最も単純な場合—形式的算術の場合—がこのプログラムを粉砕してしまった [ 5]．形式的算術とは， 自然数$0, 1, 2, \ldots$の算術，すなわち加法，乗法のようなふつうの基本的関数を取り扱う形式的体系である．1931年にゲーデルは次のことを証明した: もしある形式的体系—それを$\mathscr{F}$とよぶことにする—が算術を含むならば，(i)真であるが形式的には証明できないような$\mathscr{F}$内の命題が存在する，また(ii)$\mathscr{F}$の無矛盾性を証明するために，$\mathscr{F}$より強い体系を必要とする．

まず，算術で取り扱いたいと思っているような普通のもの—フェルマーの最終定理のような風変わりなものさえ含めて—すべてを取り扱えるような強い形式的算術体系を記述する． 次に‘自分は証明可能でない’ことを主張する論理式(嘘つき文)を

提示する． この論理式が証明可能ではないことを示す．したがってこの嘘つき文は真である．

実際，嘘つき文の概略を説明することは難しくない．あとで詳細を述べるが，しばらく 論理式$\mathrm{prove}(x)$を考えよう．これは$x$をゲーデル数とする論理式が証明可能であるときのみ真であるとしよう．

以下ここでも，式$A \equiv B$は論理式$(A \to B) \wedge (B \to A)$の略記として使う． ゲーデルは，次の核心となる定理を証明した: 自由変数をひとつ持つ任意の論理式$\phi(x)$に対して，次のような‘不動点’論理式$A$が必ず存在する．

$$\phi(\ulcorner A \urcorner) \equiv A$$

これをゲーデルの対角化定理という．ゲーデルの対角化定理を，論理式$\neg\mathrm{prove}(x)$に適用すると，次のような奇妙な論理式$G$が存在する．論理式

$$\neg\mathrm{prove}(\ulcorner G \urcorner) \equiv G,$$

は$G$「自分は証明できない」ということを主張している．これは，「自分は嘘つきである」 という言明に似ている．正直者であれば，「自分はうそつき」とは言わないし， 嘘つきが，「自分は嘘つきである」と言えば正直な言明であり，嘘つきであることに反する．いずれにせよ矛盾である．これは「クレタ島のパラドックス」として昔から知られている．

さてもとに戻って，この$G$は，本当に真である．すなわちこの論理式の(形式的)証明は存在しない: なぜならもし存在したとすれば矛盾にいたるであろう．詳細におぎなえば，そのとき得られるものは真ではあるが証明可能でない論理式となるであろう．さらにその他の副産物がある．実際，算術の中では算術の無矛盾性を証明することができないということを示すことができる．そして，これらについての議論は前述の形式化にもとづいているのである．

## 1.2 記法

$\exists! x P(x)$は$\exists x (P(x) \wedge (\forall y\,(P(y) \;\to\; x \;=\; y)))$の略である． つまり， 性質$P$をもつ対象がたんに存在するだけでなくユニークに存在することを意味している． $\ulcorner A \urcorner$は式$A$のゲーデル数を表わす． $\Gamma \vdash A$は，$\Gamma$の有限個の論理式を仮定することにより，

論理式$A$を導くことができることを表わす.

なお，第1および第2不完全性定理は，基礎の論理体系が，NK/LK/Hqのいずれであっても成り立つ.

## 1.3　算術公理

算術公理とは，以下に続く反射・対称・推移・代入の各律，算術の和と積の公理，数学的帰納法のすべての総称とする．算術公理のすべてをPA(Peano Arithmetic)で表わす.

**公理 1.1**

**反射律** $x = x$

**対称律** $x = y \to y = x$

**推移律** $x = y \to (x = z \to y = z)$

**代入律** $x = y \to (A \to A[x/y])$

ここで，$A[x/y]$は，論理式$A$における$x$のいくつかの出現を$y$で置き換えて得られる論理式を表わす．たとえば，$(x+x=0)[x/a]$は，　$x+x=0$, $a+x=0$, $x+a=0$, $a+a=0$の4通りが可能である．したがって次の4つの論理式は，それぞれ代入法則の例である.

$$x = a \to (x + x = 0 \to x + x = 0)$$
$$x = a \to (x + x = 0 \to a + x = 0)$$
$$x = a \to (x + x = 0 \to x + a = 0)$$
$$x = a \to (x + x = 0 \to a + a = 0)$$

代入律(法則)は，等しいものは置き換えてよいということを述べているに過ぎない．しかし，上の説明で，論理式$A$に限量子(∀,∃)があると 少し面倒である．等式$x = y$に現われる変数と限量子に束縛されている変数が，たとえ同一変数であってもそれは異なる変数と考えなければならないからである．束縛変数を書き換え

てはいけない．たとえば， 論理式$x=2\lor(\exists x\ x=1)$に 代入$x\mapsto 3$は適用した結果は $3=2\lor(\exists x\ x=1)$である． $3=2\lor(\exists x\ 3=1)$としてはいけない． さらには，書き換えにより置き換わる式の中の変数が束縛されてしまってはならない． たとえば，$\exists y\ x=y$の自由変数$x$に式$y+1$を代入して $\exists y\ y+1=y$としてしまってはならない． 置き換わる式$y+1$に束縛変数$y$が現れているからである． このように，代入という操作には微妙な制限があるので， 本来は厳密に定義して，代入法則を定式化する必要がある．しかし，それらを正確に述べることは省略する．

次に，算術の和と積の公理系と数学的帰納法を併せて，ペアーノの公理という．

**公理 1.2 (算術の和と積の公理)** すべての$x,y$について以下が成り立つ．

- $\neg(0=sx)$
- $sx=sy\to x=y$
- $x+0=x$
- $x+sy=s(x+y)$
- $x\times 0=0$
- $x\times sy=x\times y+x$

数学的帰納法とは，すべての自然数が性質$P$を持つことを示す論法のひとつで，次の二つのステップからなる．まず，(1) 0が性質$P$を持つことを示し， 次に (2) 任意の自然数$n$について，$n$が$P$を持てば，その後続数$n+1$も$P$を持つことを 示す．この二つのステップ(1)と(2)を実行できたとき，すべての自然数について性 質 $P$が成り立つたつことを帰結する原理である．

**公理 1.3 (数学的帰納法)** $(P(0)\land\forall x\ (P(x)\to P(sx)))\to\forall x\ P(x)$

数学的帰納法は，自然数の定義そのものと言ってよい．

## 1.4　ゲーデル数

0に$n$個の$s$の列をつけた1次元的な図形を$\bar{n}$と書く.

$$\bar{0} = 0,\ \bar{1} = s(0),\ \bar{2} = s(s(0)), \cdots,$$

$\bar{n}$は算術の項であり，とくに数字という.

ゲーデルは，論理式を数字に対応させて，論理式に関する命題を算術の命題に翻訳するというアイデアを発明した．このゲーデルコーディングは，当時革命的 なアイデアであったであろう．しかし，すべてを2進数で表わすコンピュータがありふれている 現代のわれわれにとっては，むしろなじみのアイデアである.

項，論理式，証明などの論理学における対象が，一次元的な図形としての数字として 表現されること；証明可能性などの概念が，数字の間の関係を表わす算術の論 理式として表現できること；　ゲーデルは，一見なんでもないこれらのコーディングのアイデアの帰結をだれよりもするどく認識していたのであろう.

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $s$ | $+$ | $\times$ | $=$ | $($ | $)$ | $,$ | $x$ | $\vert$ | $\neg$ | $\wedge$ | $\exists$ |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |

変数はつぎのようにコーディングする.

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & \cdots \\ x_{|} & x_{||} & x_{|||} & \cdots \end{array}$$

たとえば，論理式$\neg x = 0$のゲーデル数は，つぎのとおりである.

$$(\ulcorner \overline{\neg} x = \overline{0} \urcorner) = 2^{11} \cdot 3^{9} \cdot 5^{5} \cdot 7^{1} = 881,798,400,000$$

**例 1.1** 等式$2+2=4$は，形式論理式としては$+(s(s(0)), s(s(0))) = s(s(s(s(0))))$で

ある．そのゲーデル数は次のとおりである:

$$\begin{aligned}&\ulcorner +(\overline{s(s(0))}, s(s(0))) = s(s(\overline{s(s(0))})) \urcorner = \\ &\quad 2^3 \cdot 3^6 \cdot 5^2 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^6 \cdot 17^1 \cdot 19^7 \cdot 23^7 \cdot 29^8 \cdot 31^2 \cdot 37^6 \cdot 41^2 \cdot 43^6 \cdot 47^1 \\ &\quad 53^7 \cdot 59^7 \cdot 61^7 \cdot 67^5 \cdot 71^2 \cdot 73^6 \cdot 79^2 \cdot 83^6 \cdot 89^2 \cdot 97^6 \cdot 101^2 \cdot 103^6 \cdot 107^1 \cdot \\ &\quad 109^7 \cdot 111^7 \cdot 127^7 \cdot 131^7\end{aligned}$$

## 1.5　証明可能性の算術化

論理に関するさまざまな概念が算術式に翻訳できることをみた．論理式の列 $\varphi_1$，$\varphi_2$，$\varphi_3$も，たとえば，$2^{\ulcorner\varphi_1\urcorner} \cdot 3^{\ulcorner\varphi_2\urcorner} \cdot 5^{\ulcorner\varphi_3\urcorner}$ として表わすことができる．証明図も適当な方法でコーディングできることも明らかであろう．ここでは，ゲーデルコーディングのアイデアにもとづいて，論理式と証明図についての関係を算術化する．

まず，自由変数$x$をひとつもつ算術命題$F(x)$で次の性質を持つものを具体的に構成することができる：$x$に‘算術の言語における論理式のゲーデル数$n$を代入する’ときおよびその ときに限り$F(v)$が証明可能である．

つぎの重要な例として，2変数$x, y$の論理式prove$(x, y)$がある．これは，$x$がある証明図のゲーデル数で，$y$がその証明図の結論の式のゲーデル数であるときおよびそのときに限り，prove$(x, y)$が証明可能であるような論理式である．以下，$\mathscr{F}$を算術を含む形式的体系とする．つまり，$\mathscr{F}$は算術体系PAの公理をすべて含むとする．

**命題 1.1** 証明図とその結論という関係は「表現可能」である．すなわち，ふたつの自由変数$x, y$をもち，次の条件を満たす論理式prove$(x, y)$が存在して，任意の数字$p$と$a$について，次は同値である．

1. PA $\vdash$ prove$(p, a)$.
2. $p$はある証明図$\pi$のゲーデル数，$a$はある論理式$A$のゲーデル数，であり，かつ$\pi$は$A$の証明図である．

**定義 1.1 ($\omega$矛盾)** 次のふたつの条件を満たすある論理式$Q$が 算術を含む形式体系$S$中に存在するとき，$S$は$\omega$矛盾であるという．

1. $\exists x Q(x)$が成り立つ.

2. すべての自然数$n$について$\neg Q(\bar{n})$が成り立つ.

$S$が$\omega$矛盾でないとき，$S$を$\omega$無矛盾であるという.

　$\mathrm{prove}(y) \overset{\mathrm{def}}{\equiv} \exists x\, \mathrm{prove}(x, y)$と定義する.

**定理 1.2** 体系$\mathscr{F}$が$\omega$無矛盾ならば，証明可能性は「表現可能」である． すなわち，次が成り立つ.

$$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{prove}(\ulcorner B \urcorner) \iff \mathrm{PA} \vdash B$$

ただし，$B$は，任意の論理式である.

証明　まず，$\mathrm{PA} \nvdash B$すなわち$B$が証明不可能な算術命題であると仮定する．すると，proveは証明と論理式の関係を表現するから，

$$\begin{gathered}\mathrm{PA} \vdash \neg \mathrm{prove}(\bar{0}, \ulcorner B \urcorner) \\ \mathrm{PA} \vdash \neg \mathrm{prove}(\bar{1}, \ulcorner B \urcorner) \\ \mathrm{PA} \vdash \neg \mathrm{prove}(\bar{2}, \ulcorner B \urcorner) \\ \mathrm{PA} \vdash \neg \mathrm{prove}(\bar{3}, \ulcorner B \urcorner) \\ \vdots\end{gathered}$$

が成り立つ．つまり任意の自然数$n$について $\mathrm{PA} \vdash \neg \mathrm{prove}(\bar{n}, \ulcorner B \urcorner)$が成り立つ. したがって，$\mathscr{F}$の$\omega$無矛盾性の仮定から， $\mathrm{PA} \vdash \exists x\, \mathrm{prove}(x, \ulcorner B \urcorner)$は成り立たない. PAが証明可能性を表現するので，さらに $\mathrm{PA} \vdash \neg \exists x\, \mathrm{prove}(x, \ulcorner B \urcorner)$が成り立つ． すなわち$\mathrm{PA} \vdash \neg \mathrm{prove}(\ulcorner B \urcorner)$が得られた． PAは無矛盾であったから，$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{prove}(\ulcorner B \urcorner)$は成り立たないことが結論された.

　次に，$\mathrm{PA} \vdash B$，すなわち$B$が証明可能であると仮定する．すると，その証明図$\pi$がある． その証明図のゲーデル数$\ulcorner \pi \urcorner$をとれば，$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{prove}(\ulcorner \pi \urcorner, \ulcorner B \urcorner)$である．ゆえに，$\mathrm{PA} \vdash \exists y\, \mathrm{prove}(y, \ulcorner B \urcorner)$．すなわち，$\mathrm{PA} \vdash \mathrm{prove}(\ulcorner B \urcorner)$である.　□

**注意 1.1** $\mathrm{PA} \vdash \mathrm{prove}(\ulcorner B \urcorner) \equiv B$とはいえない．問題 1.1参照.

**問題 1.1** 一般に次の2条件は同値ではない．反例を示せ.

1. $\vdash A \equiv B$

2. $\vdash A \iff \vdash B$

**定理 1.3 (Gödelの対角化定理)** $\phi$がただひとつの自由変数$x$を持つ論理式ならば，次の条件を満たす論理式$A$が存在する.

$$\mathrm{PA} \vdash A \equiv \phi(\ulcorner A \urcorner)$$

証明　$\sigma(v)$を論理式$\phi(v(\ulcorner v \urcorner))$とおく．この正確な意味は，すぐあとで説明する．すると，ひとつの自由変数をもつ 各論理式$\theta$についてPA $\vdash \sigma(\ulcorner \theta \urcorner) \equiv \phi(\overline{\theta(\ulcorner \theta \urcorner)})$ である．とくに，

$$\mathrm{PA} \vdash \sigma(\ulcorner \sigma \urcorner) \equiv \phi(\overline{\sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)})$$

である．したっがて，$A = \sigma(\ulcorner \sigma \urcorner)$とおけばよい.

ここで，$\sigma$を正確に定義しよう．$\sigma(v) \stackrel{\text{def}}{=} \exists w\,(\xi(v,w) \wedge \phi(w))$ と定義する．　ここで$\xi$は次の二つの条件を満たす2変数の論理式である.

1. PA $\vdash \forall v \exists ! w\, \xi(v,w)$

2. PA $\vdash \xi(\ulcorner \theta \urcorner, \overline{\theta(\ulcorner \theta \urcorner)})$

$\xi(v,w)$は，自由変数を一つだけ持ちかつ$v$をゲーデル数として持つ 論理式$A(= A(x))$に自己適用した結果の論理式$A(\ulcorner A \urcorner)$のゲーデル数が$w$であると いう関係を表している．すなわち論理式$v = \ulcorner A \urcorner \wedge w = \overline{A(\ulcorner A \urcorner)}$と同値である． このような$\xi$を具体的に構成することは難しくない．(プログラミング!)

性質1と2，および等号規則を使って形式的にかつ容易に次の事実をに示すことができる.

$$\exists w\,(\xi(\ulcorner \theta \urcorner, w) \ \wedge \ \phi(w)) \equiv \phi(\overline{\theta(\ulcorner \theta \urcorner)}).$$

左辺は$\sigma(\ulcorner \theta \urcorner)$そのものであるから， PA $\vdash \sigma(\ulcorner \theta \urcorner) \equiv \phi(\overline{\theta(\ulcorner \theta \urcorner)})$である.　□

次の性質をもつ文$G$をゲーデル文という． PA $\vdash \neg \mathrm{prove}(\ulcorner G \urcorner) \equiv G$．ゲーデル文を作るには， $\sigma(v)$を$\neg\mathrm{prove}(v)$として， ゲーデルの対角化定理 1.3を適用すればよい.

**命題 1.4** ゲーデル文$G$は証明不可能である.

証明　PA $\vdash G$としよう．proveは証明可能性を表現するから，PA $\vdash$ prove(⌜$G$⌝)である．一方$G$はゲーデル文であるから

$$\text{PA} \vdash G \equiv \neg\text{prove}(\ulcorner G \urcorner)$$

である．これとPA $\vdash G$から，PA $\vdash \neg$prove(⌜$G$⌝)がでる．これで矛盾が導かれた．ゆえに，PA $\nvdash G$. すなわち，$G$はPAで証明できない． □

**注意 1.2** $G \equiv \neg$prove(⌜$G$⌝)を満たす$G$は,「自分は証明できない」ということを述べていた． この意味で，$G$は真であるが証明は不可能であることがわかった．

**命題 1.5** $\neg G$は証明不可能である．

証明　PA $\vdash \neg G$としよう．2重否定律を適用すると，PA $\vdash$ prove(⌜$G$⌝)である．すると，prove($x$)は証明可能性を表現したから，PA $\vdash G$である．これは，仮定PA $\vdash \neg G$と矛盾する．ゆえに $\neg G$は証明不可能である． □

## 1.6　第2不完全性定理

Consis $\stackrel{\text{def}}{=} \forall x \neg\text{prove}(x, \ulcorner \overline{0} = s(\overline{0}) \urcorner)$と定義する． $0 = 1$が導けないことを意味している．すなわち，$\mathscr{F}$の無矛盾性を主張している． (ひとつでも，導けない論理式が存在すればその体系は無矛盾であることに注意. )

**定理 1.6 (第2不完全性定理)** 算術の無矛盾性は算術の中では証明可能でない.

証明　PA $\vdash$ Consisと仮定しよう． 第1不完全性定理の証明で,「PAが無矛盾ならばゲーデル文$G$は 証明できない」ということを実際に証明されている．この証明を形式化すれば PA $\vdash$ Consis $\to G$がいえたことになる．このふたつに, モーダスポーネンスを適用すると，PA $\vdash G$をえる． これはゲーデル文$G$が証明不可能であることを示している第1不完全性定理に反する． ゆえに，Consis はPAからは証明不可能である． □

ゲーデルは，第1不完全性定理の証明を実際に形式化して示してはいない． 実際に実行するのはたいへんな作業といわれていたが，最近，コンピュータを使って 証明された(シャンカー).

## 1.7　表現可能性

第1不完全性定理で重要な役割りを担っていた，論理式prove $(x, y)$ は「論理式とその証明図」のようなメタな関係を表現していた． 関係が論理式によって表現されるということは，この解説では， 明示的に使わなかった．しかし，証明をみるとわかるように， メタ言語における関係が対象言語である算術言語に よって表現されることが，第1不完全性定理を引き起こす原因であった． ここで，表現可能性という概念の定義を引用しておこう．

**定義 1.2 (表現可能性)** 自然数の間の関係$R$に対して，任意の自然数$m$と$n$について，

$$R(m, n) \iff \mathrm{PA} \vdash \bar{R}(\bar{m}, \bar{n})$$

となるような算術の論理式$\bar{R}(x, y)$が存在するなら， $R(m, n)$は算術において表現可能であるという．

表現可能性は，自然数とその間の2項関係だけでなく，一般に ゲーデル数によるコーディングが可能な領域上の$n$項関係に自明に拡張される．

命題 1.1に示したように，論理式とその証明図という関係は，表現可能であった． ゲーデルは，現代の帰納関数論から見れば，証明可能という性質の表現可能性を通じて 算術における原始帰納関数というクラスを明確にしたといえる． あるいは，ゲーデルは原始帰納関数プログラミングで証明可能性述語proveを構成したとも言える． さらには，ヒルベルトの提案した「証明における有限の立場」を「原始帰納的」として具体化 にとらえたとも言える．

最後に，表現可能な関係の他の具体例をあげる．

**命題 1.7** 相等関係=は，論理式$x = y$によって表現可能である．

証明　$m$と$n$を二つの自然数として, つぎの同値性を証明すればよい．

$$m = n \iff \mathrm{PA} \vdash \bar{m} = \bar{n}.$$

$m = n$ならば$\mathrm{PA} \vdash \bar{m} = \bar{n}$であることは, 算術の反射律からすぐ導ける．あとは, $\mathrm{PA} \vdash \bar{m} = \bar{n}$ならば, $m = n$であることをいえば証明は終わる．それは, $\bar{k} = s(x)$ならば $k > 0$かつ$x = \overline{k-1}$であることと数学的帰納法を使えば容易である． □

**命題 1.8** '$m$が$n$を割り切る'という関係は論理式 $\exists z\,(x \times z = y)$により 表現可能である.

**問題 1.2** この命題を証明せよ.

もっと一般的に, 次の命題が成り立つ.

**命題 1.9** 帰納的な関係はすべて表現可能である.

# References

[1] J. Barwise(ed). Handbook of Mathematical Logic. North-Holland, 1977.

[2] J. N. クロスリー他著=田中尚夫訳. 現代数理論理学入門. 共立全書. 共立出版, 1977.

[3] K. Kunen. Set Theory. North Holland, 1980.

[4] R. ゲーデル, O.タウスキー・トッド, S.C.クリーネ, G.クライゼル著/前原昭二+本橋信義訳. ゲーデルを語る. 遊星者, 1992.

[5] 林 晋. ゲーデルの謎を解く. 岩波科学ライブラリ. 岩波書店, 1993.

[6] ルディ・ラッカー著/金子努 監訳. 思考の道具箱. 工作舎, 1993.