

## 0 用語と記号の準備

「言語理論とオートマトン」理論は精密科学であり、数学的な記述は避けられない。とはいっても素朴集合論の初歩の知識があれば事前の準備としては十分である。代表的な用語としては**関数**と**関係 (=写像)**がある。「集合と関数のことばがあればどんな数学理論も記述することができ、逆にそれなしではなにも語れない」とまで言われている。このふたつに関してはとくに習熟していることが望まれる。さて、よく使われる数学記号の中からいくつかを説明する。

### 0.1 命題

|                        |  |
|------------------------|--|
| $A \wedge B$           | $A$ かつ $B$   |
| $A \vee B$             | $A$ または $B$  |
| $\neg A$               | $A$ でない ( $A$ の否定)                                   |
| $A \rightarrow B$      | $A$ ならば $B$  |
| $A \equiv B$           | 論理式 $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$ の略記 |
| $\forall x C(x)$       | すべての $x$ について $C(x)$ が成り立つ                           |
| $\exists x C(x)$       | ある $x$ が存在して $C(x)$ が成り立つ                            |
| $\forall x \in A P(x)$ | $\forall x (x \in A \rightarrow P(x))$ の略記           |
| $\exists x \in A P(x)$ | $\exists x (x \in A \wedge P(x))$ の略記                |

### 0.2 演繹の記号

|                |   |
|----------------|---|
| $A \implies B$ | 仮定 $A$ から $B$ が導ける                                      |
| $A \iff B$     | $A \implies B$ かつ $B \implies A$ . ( $A$ と $B$ は論理的に同値) |

**数学的帰納法**  $P(n)$  を自然数  $n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  についての命題のとき、次の手順ですべての  $n \geq 0$  について  $P(n)$  が成り立つことを導くことを数学的帰納法とよぶ： $P(0)$  が成立ち、任意の  $n \geq 0$  について、「 $P(n)$  ならば  $P(n+1)$ 」が成り立つな

らば, すべての  $n \geq 0$  について  $P(n)$  が成り立つ. つまり自然数に関するどんな命題関数  $P$  についても次の論理式が成り立つ:

$$(P(0) \wedge \forall n \geq 0 (P(n) \rightarrow P(n+1))) \rightarrow \forall n P(n).$$

数学的帰納法の推論規則:

$$\frac{P(0) \quad \forall n \in \mathbb{N} (P(n) \rightarrow P(n+1))}{\forall n \in \mathbb{N} P(n)} \text{ (数学的帰納法)}$$

数学的帰納法は, たんに帰納法とよぶこともある.

| 記号                | 用例  | 定義・説明   |
|-------------------|---|---|
| $\emptyset$       |   | 空集合   |
| $\in$             | $x \in A$                                 | $x$ が集合 $A$ の要素である  |
| $\{, \}$          | $x \in \{a, b\}$                          | $x = a \vee x = b$  |
| $\{\dots\}$       | $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$                | $a_1, \dots, a_n$ を要素の全てとする集合                                   |
| $(, )$            | $(a, b)$                                  | $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ (順序対)                                     |
| $\subseteq$       | $X \subseteq Y$                           | $\forall a (a \in X \rightarrow a \in Y)$ ( $X$ は $Y$ の部分集合.)   |
| $\{   \}$         | $\{x \mid C(x)\}$                         | 条件 $C(x)$ を満たす $x$ の全体集合  |
| $\cup$            | $X \cup Y$                                | $\{a \mid a \in X \vee a \in Y\}$ (和)                           |
| $\bigcup$         | $\bigcup S$                               | $\{a \mid \exists X (X \in S \wedge a \in X)\}$ (集合族の和)         |
| $\cap$            | $X \cap Y$                                | $\{a \mid a \in X \wedge a \in Y\}$ (共通部分)                      |
| $\bigcap$         | $\bigcap S$                               | $\{a \mid \forall X (X \in S \rightarrow a \in X)\}$ (集合族の共通部分) |
| $\setminus$       | $X \setminus Y$                           | $\{a \mid a \in X \wedge (a \notin Y)\}$ (差)                    |
| $\times$          | $X \times Y$                              | $\{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$ (直積)                   |
| pow               | pow( $X$ )                                | $\{S \mid S \subseteq X\}$ (べき集合)                               |
| $:$               | $f: A \rightarrow B, A \xrightarrow{f} B$ | $f$ は $A$ から $B$ への関数   |
| dom               | dom( $f$ )                                | 関数 $f$ の定義域   |
| ran               | ran( $f$ )                                | 関数 $f$ の値域  |
| $^{-1}$           | $f^{-1}$                                  | 関数 $f$ の逆関数   |
| $\upharpoonright$ | $f \upharpoonright X$                     | 関数 $f$ の $X$ への制限   |
| $( )^{( )}$       | $Y^X$                                     | $X$ から $Y$ への関数の全体  |
| $( \dots )$       | $(a_1, a_2, \dots, a_n)$                  | $n$ -組, 列   |
| $/$               | $M/R$                                     | 同値関係 $R$ による集合 $M$ の商集合   |

### 0.3 単位半群 (monoid)

$A$  を集合として, ある  $e \in A$  と 2 項演算  $\cdot: A \times A \rightarrow A$  が次の性質を満たすとき,  $(A, \cdot, e)$  を **単位半群 (monoid)** とよぶ.

任意の  $x, y, z \in A$  について次のふたつの条件が成り立つ.

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad (\text{結合律})$$

$$e \cdot x = x \cdot e = x \quad (\text{単位元})$$

関数  $h: A \rightarrow B$  が次の条件を満たすとき, ふたつの単位半群  $(A, e_A, \cdot_A)$  と  $(B, e_B, \cdot_B)$  の間の **準同形** とよび,  $h: (A, e_A, \cdot_A) \rightarrow (B, e_B, \cdot_B)$  と書く:

$$h(e_A) = e_B \quad (1)$$

$$h(x \cdot_A y) = h(x) \cdot_B h(y) \quad (x, y \in A) \quad (2)$$