1　トーナメントの試合数と一対一対応

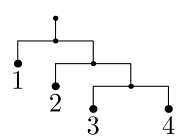
高校野球の全国大会はトーナメント方式 (勝ち抜き戦) である. 参加高校の数が N の場合, 何試合必要だろうか? ただし, 引き分けはないものとする.

まず, 必要な試合数を予想してみよう. 最初に極端な場合を考えよう. 参加高校が 1 校の場合. これは試合するまでもなく, 相手がいないので, 優勝がきまりである. つまり試合数はゼロである. 次に 2 校の場合. この場合両校を対戦させればよい. 他に試合は必要ないので, 必要な試合数は 1 である. 次に 3 校の場合. この場合, まず 2 校を選んで対戦させ, その勝者と残りの 1 校を対戦させるとその勝者が優勝校であるので, 2 試合でよいことになる.

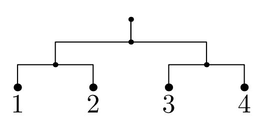
つまり $N = 1$ のときは 0 試合, N が 2 のときは 1 試合, N が 3 のときは 2 試合が必要でありまたそれで十分である.

それでは, N を 4, 5, 6 と増やしていったら必要な試合数はどうなるだろう? 上の簡単な場合は, どれも参加高校数から 1 を引いた数であった. つまり, 参加高校数 N のときは, $N-1$ 試合が必要になると予想できるだろう. このように, 簡単なケースを考えて, それから一般的なケースの場合の式を予想する方法を**発見的帰納法**といい, あたりまえのようであるが, 発見のためのとても大事な方法である.

それでは, どんな組み合わせにしようが, $N-1$ 試合で必要かつ十分なのだろうか? 試合の組み合わせ次第で全試合数が違ってくることはないのだろうか? たとえば, 4 校の場合である. 4 校を 1, 2, 3, 4 としよう. まず, 1 と 2 を対戦させ, その勝者と 3 を対戦させ, その勝者と 4 を対戦させる組み合わせがある.



別な組み合わせとしては, 1 と 2 の対戦の勝者と, 3 と 4 の対戦の勝者とで決勝線を行うという組み合わせもある.



いずれの場合も 3 試合である. 4 校の場合はどう組み合わせても必要な試合数は 3 であることが確かめられる. しかし, 一般の N の場合も試合数は $N-1$ となるだろうか? この予想は成立する. 実際そのことをここできちんと証明してみよう.

次の証明では, **集合**と**全単射**の考えを使う. 証明に用いるトーナメント方式の性質は次の 2 点である.

- 全勝は 1 チームだけ.
- 他のチームはすべて 1 回だけ負ける.

命題 1 N チーム参加のトーナメント方式の大会で, 必要な全試合数は $N-1$ である.

証明　証明の方針は, チームとその敗戦試合を対応させる関数が敗戦チームの全体と試合の全体との間の全単射であることを示すことである.

この大会の試合の全体を S, 参加校の全体を H とする. ことなるチーム $x, y \in H$ が対戦する試合を対 $\{x, y\}$ と表すことができる. H から優勝チーム w を除いた集合を $H' = H \setminus \{w\}$ とおく.

S の要素である各試合 $\{x, y\} \in S$ に対して, その試合で負けたチーム $z \in \{x, y\}$ を対応させる. この対応を f とおく. すると, これは, S から H' への関数である.

$$f \colon S \longrightarrow H'$$

逆に優勝テーム以外, すなわち $h \in H'$ に対して, h が負けた試合 $s \in S$ が存在するからそのうちひとつを選んで対応させる. この関数を g とおく.

$$g \colon H' \longrightarrow S.$$

さて, g は f の逆写像であることを証明しよう. つまり, 目標は $gf = \mathrm{id}_S$ かつ $fg = \mathrm{id}_{H'}$ である.

まず $fg = \mathrm{id}_{H'}$ を証明しよう. そのために, $h \in H'$ とする. $g(h)$ は定義により, h が負けた試合である. つまり試合 $g(h)$ の敗者が h である. すると f の定義により $f(g(h)) = h$ である. $h \in H'$ は任意であったから $fg = \mathrm{id}_{H'}$ である.

次に $gf = \mathrm{id}_S$ を証明しよう. そのために, $s \in S$ とおく. $f(s)$ は試合 s で負けたチームである. これは言い換えると $f(s)$ が負けた試合は s であるということである. なぜならばトーナメント方式なので, 2 回以上負けるチームは存在しないからである. したがって g の定義により $g(f(s)) = s$ である. $s \in S$ は任意であったから, $gf = \mathrm{id}_S$ である.

これで f は g の逆関数であることが示された. ゆえに f は S から H' の上への全単射である. したがって, H' の要素の個数と S の要素の個数を等しい. つまり, 求める全試合数 $|S| = |H'| = N - 1$ である. ゆえに $|S| = N - 1$ が示された. ■

問題 1 リーグ戦方式だと, この命題は成り立たない. トーナメントの場合の証明をリーグ戦に対しても適用するときるどの部分がリーグ戦では成り立たないかを指摘せよ.

上の証明は全単射の例としてとりあげた. グラフ論的な別証明も考えられる. そのほうが明解かもしれない. ただし数学的帰納法を使う.

(別解) 参加チーム数を N とする. トーナメント方式は参加校を端点とする 2 進木で表される. 非端点が試合を表し, その試合で勝った方が上のノードへ ‘勝ち進む.’ ‘頂上’ まで上り詰めたチームが優勝である. すなわち非端点の数が必要な試合数である.

4 チームの場合の 2 進木の例をふたつあげる.

一般に, 2 進木のノード数は端点の数を N とすれば $2N-1$ である. このことは端点の数に関する帰納法により容易に証明できる. したがって, 試合数はすべてのノードの数 ($=2N-1$) から 端点の数 ($=N$) を引いた数は $(2N-1)-N=N-1$ である.

問題 2 2 進木の端点の数が N のとき, 全ノード数は $2N-1$ であることを数学的帰納法で証明せよ.