

# 微分・積分

## 第8回「高次微分と多項式近似(1)」

---

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

# 今日の内容

## 1. ロルの定理

- 平均値の定理
- コーシーの平均値の定理

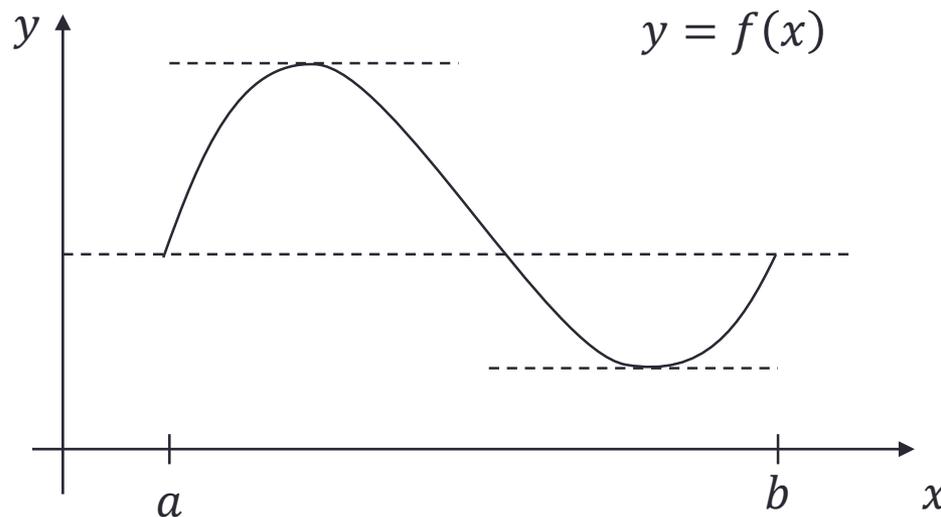
## 2. 高次導関数

- テイラーの定理
- 有限テイラー展開

# ロルの定理

## 定理8.1 (ロルの定理)

- 微分可能な関数  $f(x)$  の定義域に  $[a, b]$  が含まれ,  $f(a) = f(b)$  が成り立つならば,  $f'(c) = 0$  となる  $c \in (a, b)$  が存在する.
- $f(x)$  が定数関数であれば明らか.
- そうでない場合には, ワイエルシュトラスの定理より, ある  $c \in (a, b)$  において最大値または最小値をとる.
- $c$  において  $f(x)$  が極値をとるので,  $f'(c) = 0$  .



# 平均値の定理

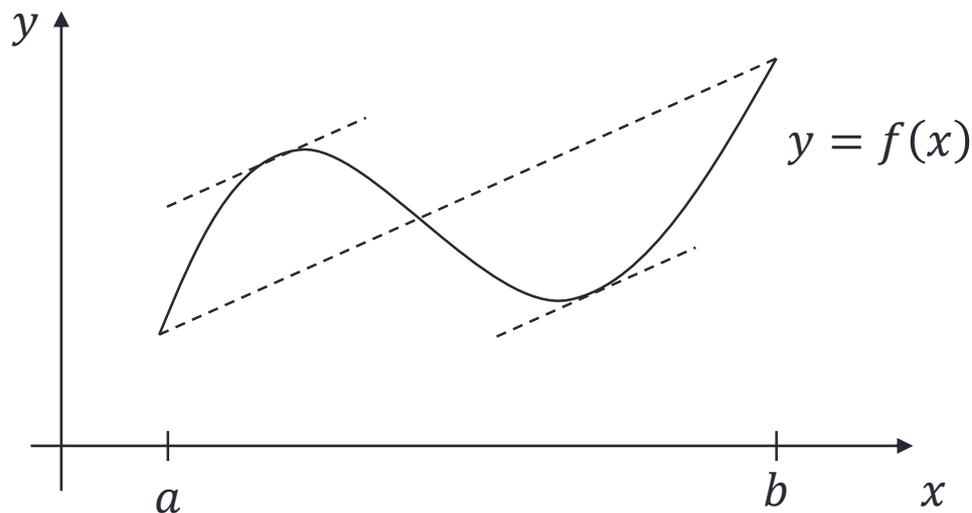
- ロルの定理を斜めにずらしたものが平均値の定理である.

## 定理8.2(平均値の定理)

- 微分可能な関数  $f(x)$  の定義域に  $[a, b]$  が含まれるとき

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす  $c \in (a, b)$  が存在する.



# 平均値の定理(証明)

- 関数

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

は  $g(a) = g(b)$  を満たすので、ロルの定理より  $g'(c) = 0$  となる  $c \in (a, b)$  が存在する.

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

なので、平均値の定理が示された.

- 端点で関数の値が等しくなるように一次関数を引くことで、ロルの定理に帰着させている.

# コーシーの平均値の定理

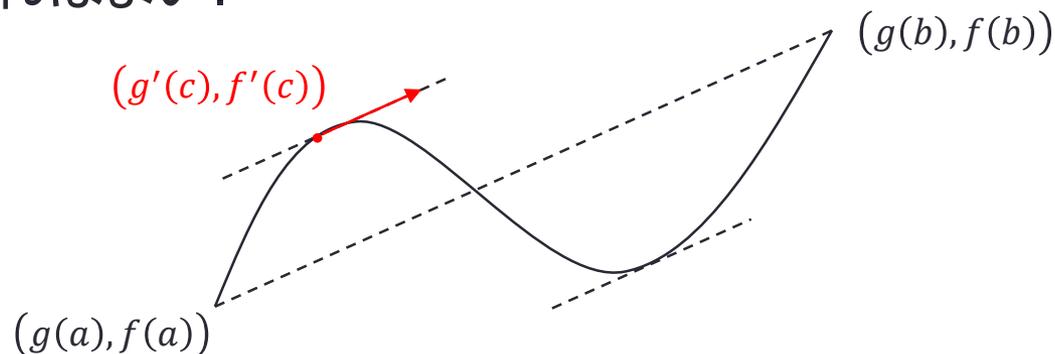
## 定理8.3(コーシーの平均値の定理)

- 微分可能な関数  $f(x), g(x)$  の定義域に  $[a, b]$  が含まれ,  $x \in (a, b)$  において  $g'(x) \neq 0$  であり,  $g(b) - g(a) \neq 0$  であれば

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる  $c \in (a, b)$  が存在する.

- $g(x) = x$  の場合が通常のアベラ値の定理である.
- 直感的には, 媒介変数  $t \in [a, b]$  を用いて  $(x, y) = (g(t), f(t))$  の軌跡を考えればよい.



# コーシーの平均値の定理(証明)

- 関数

$$\phi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

を考えると

$$\phi(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = \phi(b)$$

であるから, ロルの定理により, ある  $c \in (a, b)$  が存在して

$$0 = \phi'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

- したがって, 上式を整理して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

# ロピタルの定理

- コーシーの平均値の定理を利用して、ロピタルの定理を証明する.

## 定理8.4(ロピタルの定理)

- 関数  $f(x), g(x)$  が  $a$  を除く  $a$  の近傍において微分可能であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

かつ,  $g'(x) \neq 0$  とする.

- このとき, 極限  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  が存在するならば

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- ロピタルの定理は,  $a = \pm\infty$  や  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$  の場合も成り立つ.

# ロピタルの定理(証明)

- 必要ならば  $f(a) = g(a) = 0$  と置きなおすことにより,  $f(x), g(x)$  は点  $a$  を含めて連続としても極限には影響しない.
- $x > a$  とすると,  $[a, x]$  にコーシーの平均値の定理を適用して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる  $c \in (a, x)$  が存在する.

- $x \rightarrow a + 0$  のとき  $c \rightarrow a + 0$  であるから

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- $x \rightarrow a - 0$  の場合も同様である.

# 高次導関数

- 微分とは、関数を1次多項式(関数)で近似した様子を記述するもので、導関数の情報から関数の増減の解析が可能になった.
- 導関数がさらに微分可能ならば、2回微分することにより凹凸を知ることができた. これは関数を2次多項式で近似することに相当する.
- 関数がさらに微分可能な場合には、3回微分、4回微分、... を考えることにより、与えられた関数の3次多項式、4次多項式、... での近似を考察することができる.

# 高次導関数

- 関数  $f(x)$  が微分可能な時,  $f'(x)$  をその導関数と呼んだ.
- これを帰納的に繰り返すことで高次導関数を得ることができる.

## 定義8.5

- $f'(x)$  が微分可能なとき,  $f^{(2)}(x) = f''(x)$  を  $f(x)$  の2次導関数という.
- $f^{(n-1)}(x)$  が微分可能なとき,

$$f^{(n)}(x) = \left( f^{(n-1)}(x) \right)'$$

を  $f(x)$  の  $n$  次導関数という.

- $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$ ,  $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$  と書かれる.

- 記号を合わせるために,  $f(x)$  を  $f^{(0)}(x)$ ,  $f'(x)$  を  $f^{(1)}(x)$  と書く場合もある.

# 高次導関数

## 定義8.6

- 関数  $f(x)$  が  $n$  回微分可能であり,  $f^{(n)}(x)$  が連続であるとき,  $f(x)$  は  $n$  回連続微分可能, または  $C^n$  級であるという.
  - 関数  $f(x)$  が何回でも微分可能であるとき,  $f(x)$  は無限回微分可能, または  $C^\infty$  級であるという.
- 
- 実際の計算に現れる関数は  $C^\infty$  級であることが多いので, あまり神経質になる必要はない.
  - 一方で,  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$  は微分可能であるが,  $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$  は原点 0 で連続でないため, 1回連続微分可能ではない.
  - 原点 0 以外では無限回微分可能である.

# 高次導関数(例)

例8.7

- 4次多項式関数

$$f(x) = 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 7x - 5$$

に対して

$$f'(x) = 16x^3 + 18x^2 - 6x + 7$$

$$f^{(2)}(x) = 48x^2 + 36x - 6$$

$$f^{(3)}(x) = 96x + 36$$

$$f^{(4)}(x) = 96$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

# 高次導関数(問題)

## 問題8.8

• 次の関数の高次導関数を計算せよ.

1.  $\sin x$

2.  $x^n$

# 多項式と高次導関数

## 定理8.9

- $n$  次多項式関数  $f(x)$  に関して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

- ただし,  $0! = 1$  である.

- つまり, 多項式  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$  に関して,  $x^k$  の係数は

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

として計算できる.

## 定理8.9の証明

- 多項式  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$  に関して

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \dots$$

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 \dots$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5x^2 + \dots$$

$$\dots = \dots$$

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + (k+1) \dots 2a_{k+1}x + (k+2) \dots 3a_{k+2}x^2 + \dots$$

であるから

$$f^{(k)}(0) = k! a_k$$

# 多項式と高次導関数

- 同様の議論で次も示すことができる.

## 定理8.10

- $n$  次多項式関数  $f(x)$  に関して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \end{aligned}$$

# 多項式と高次導関数(例)

例8.11

- $f(x) = 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 7x - 5$  に関して

$$f'(x) = 16x^3 + 18x^2 - 6x + 7 \qquad f^{(2)}(x) = 48x^2 + 36x - 6$$

$$f^{(3)}(x) = 96x + 36 \qquad f^{(4)}(x) = 96$$

- これより, 次のどちらも  $f(x)$  に一致する.

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4$$

$$= -5 + 7x + \frac{-6}{2}x^2 + \frac{36}{6}x^3 + \frac{96}{24}x^4$$

$$f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$= 9 + 35(x-1) + \frac{78}{2}(x-1)^2 + \frac{132}{6}(x-1)^3 + \frac{96}{24}(x-1)^4$$

# 多項式と高次導関数(問題)

## 問題8.12

- 定理8.10を, 関数  $f(x) = 3x^2 - x + 5$  と  $a = 0, \pm 1$  に関して確認せよ.
- つまり

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$f(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f^{(2)}(-1)}{2!}(x+1)^2$$

が成り立つことを確認せよ.

# 平均値の定理

- 平均値の定理を思い出す.

## 定理8.2(平均値の定理)

- 微分可能な関数  $f(x)$  の定義域に  $[a, b]$  が含まれるとき

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす  $c \in (a, b)$  が存在する.

- 上記の式は, 次と同値である.

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) \quad (c \in (a, x))$$

- 高次導関数を用いて, 平均値の定理はテイラーの定理に一般化される.

# テイラーの定理

## 定理8.13(テイラーの定理)

- 开区間  $I$  で定義された関数  $f(x)$  が  $n$  回微分可能であるとき, 任意の  $a \in I$  に対して

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n \\
 &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 \\
 &\quad + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n
 \end{aligned}$$

を満たす  $c \in (a, x)$  が存在する. ( $a < x$  の場合)

- 上記の表示を有限テイラー展開という. 証明は次回.

# マクローリンの定理

- 特に  $a = 0$  の場合にはマクローリンの定理と呼ばれる。

## 定理8.14(マクローリンの定理)

- 0 を含む開区間  $I$  で定義された関数  $f(x)$  が  $n$  回微分可能であるとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \\
 &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 \\
 &\quad + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n
 \end{aligned}$$

を満たす  $\theta \in (0,1)$  が存在する。(  $0 < x$  の場合 )

- 上記の表示を有限マクローリン展開という。

# テイラーの定理(意味)

- テイラーの定理における

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

はそれぞれ ( $n-1$  次の) **テイラー多項式** と **剰余項** と呼ばれる。

- 微分の観点からは,  $f(x)$  と  $P_{n-1}(x)$  は似ている。

$$f(a) = P_{n-1}(a), f'(a) = P'_{n-1}(a), \dots, f^{(n-1)}(a) = P_{n-1}^{(n-1)}(a)$$

実際,  $f(x)$  が  $n$  次多項式であれば,  $f(x) = P_n(x)$  であった。

- テイラーの定理は  $f(x)$  と  $P_{n-1}(x)$  の誤差を  $f(x)$  の  $n$  次微分係数を用いて評価できることを主張している。

# 有限マクローリン展開(例)

例8.15

- $f(x) = e^x$  の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = e^x$$

であるから

$$f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = e^0 = 1$$

したがって

$$e^x = P_5(x) + R_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!} x^6$$

- これを使って,  $f(1) = e$  の近似値を求めると

$$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2.71666 \dots$$

であるが, マクローリンの定理より誤差は

$$|e - P_5(1)| = \frac{e^\theta}{6!} < \frac{e}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} = 0.004166 \dots$$

# 有限マクローリン展開(例)

## 例8.16

- $f(x) = \sin x$  の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \cos x, f^{(2)}(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$$

を周期4で繰り返すことから

$$f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = 1, f^{(4n+2)}(0) = 0, f^{(4n+3)}(0) = -1$$

- したがって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_7(x)$$

- ここで

$$R_7(x) = -\frac{\cos(\theta x)}{7!} x^7$$

ただし  $P_5(x) = P_6(x)$  に注意すること.



# 昇ベキと降ベキ

## 定義8.17

- 多項式を書くとき, 通常は次数が高い方から書く方が多い. 例えば

$$5x^3 - x^2 + 5x - 10$$

このような表示を**降ベキ**の順という.

- 一方で, (有限)マクローリン展開などを議論するときは, 次数が低い方から書くことが多い. 例えば

$$-10 + 5x - x^2 + 5x^3$$

このような表示を**昇ベキ**の順という.

- $x$  が一般の場合には降ベキ,  $x$  が十分小さい場合には昇ベキを使うことが多い.

# まとめ

## 1. ロルの定理

- 平均値の定理
- コーシーの平均値の定理
- ロピタルの定理

## 2. 高次導関数

- テイラーの定理・マクローリンの定理
- 有限テイラー展開・有限マクローリン展開