

微分・積分

第1回「集合と写像」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

講義概要

- 微分・積分の基礎事項に関して講義する.
- 微分は対象の変化を, 積分は対象の累積を解析する理論であり, データサイエンス, 経済学, 理工学など幅広い分野で基礎となる.
- 微分・積分は線形代数と合わせて大学数学の2本柱と位置付けられることが多い.
- 本講義では, 一変数関数の微分・積分, 多項式近似, 多変数関数の微分・積分などを学習する.

データサイエンス

経済学

理工学

微分・積分

線形代数

確率

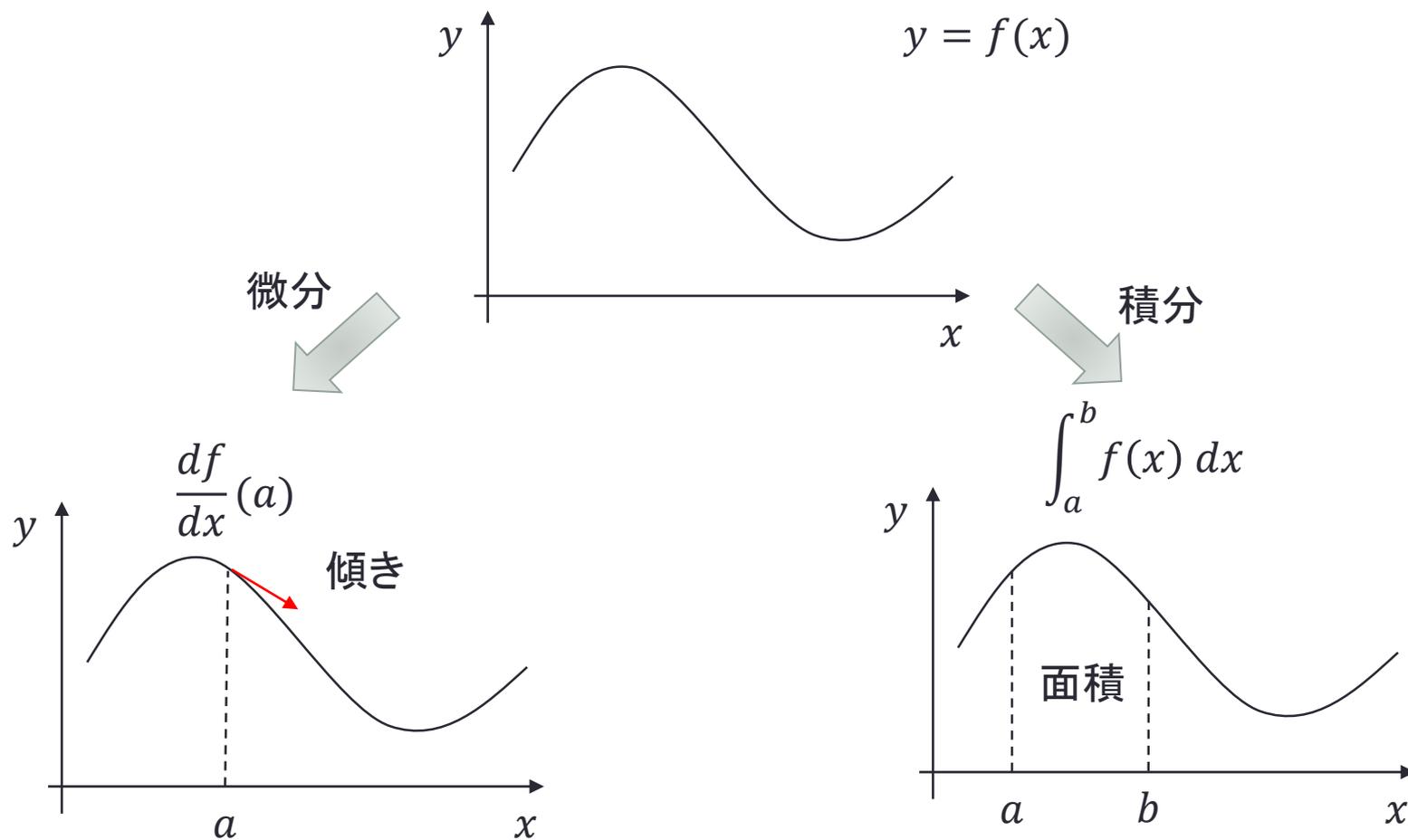
統計

今日の内容

- 微分・積分の概要
 - 微分とは何か
 - 積分とは何か
- 集合
 - 外延的・内包的記法
 - 濃度
 - 直積
- 写像
 - 全射
 - 単射
 - 恒等写像
 - 合成写像
 - 逆写像

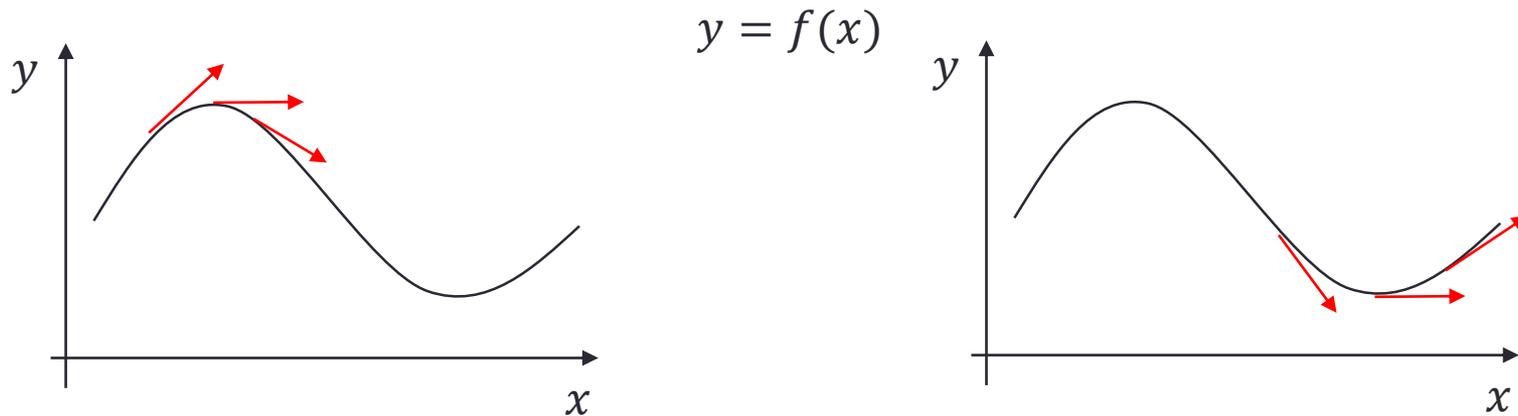
微分・積分とは

微分・積分とは何か？



微分

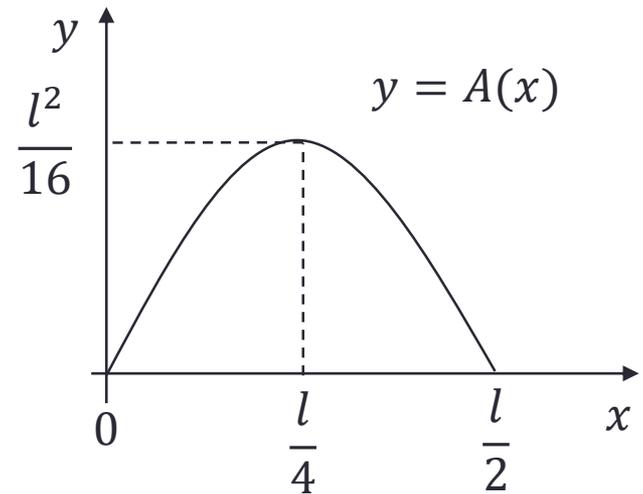
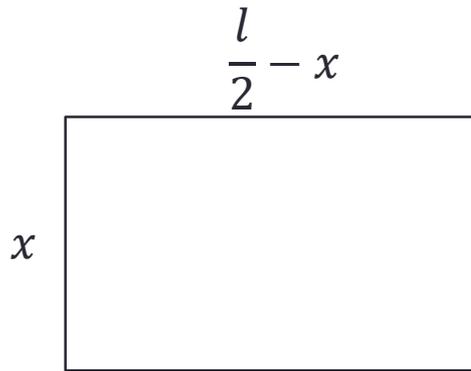
- 微分: 最も値の大きい・小さいところを探す方法



- 極大点の頂点の手前では坂は上がり, 先では下がる.
- 極小点の底の手前では坂は下がり, 先では上がる.
- 極大点, 極小点 \Rightarrow 傾き 0
- グラフの傾き = 関数の値の変化率, 未来の判断材料

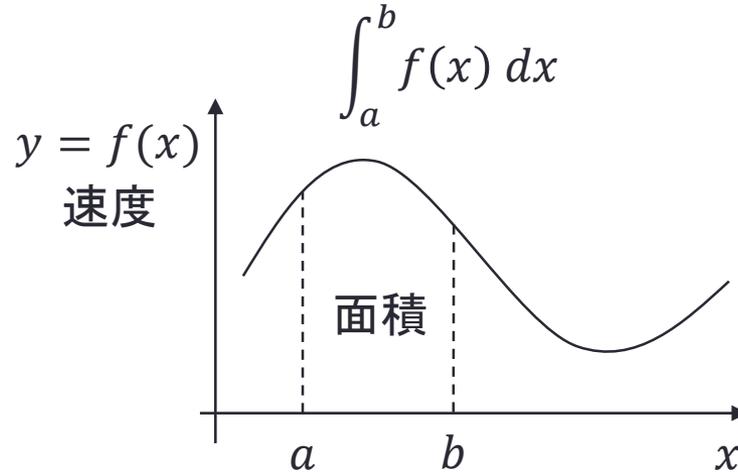
応用

- 最適化問題: 適当な条件を満たす最適解を探す
- 等周問題: 周の長さが l の長方形の中で面積を最大にするものは?
- 面積 $A(x) = x \left(\frac{l}{2} - x \right)$



積分

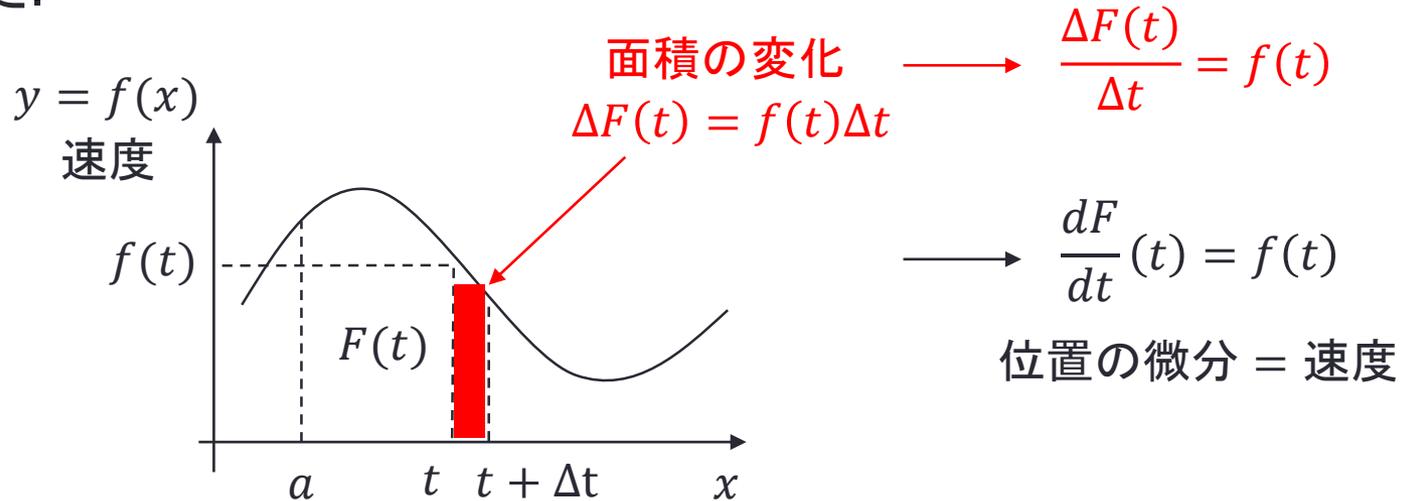
- 積分: これまでの蓄積を計算する方法



- $f(x)$ を速度とすると, 面積 $\int_a^b f(x) dx$ は時刻 a から時刻 b までに移動した距離.
- 平均速度 = 面積 / 時間
- 面積 = 過去の蓄積, 過去の判断材料

積分

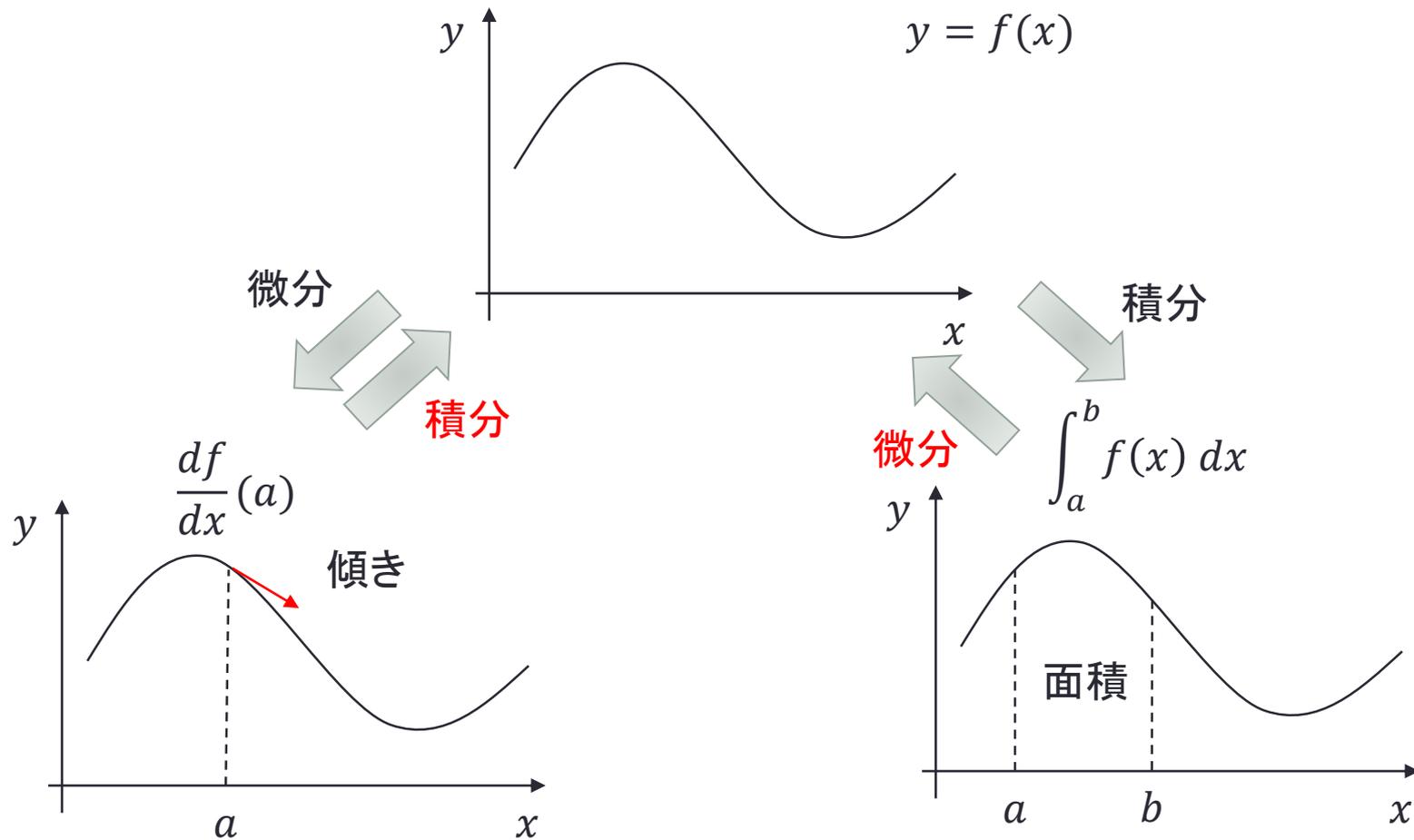
- 時刻 a から時刻 t までに移動した距離は $F(t) = \int_a^t f(x) dx$ で与えられた.



- 「速度」を積分すると「位置」(過去の蓄積).
- 「位置」を微分すると「速度」(現在の変化).
- 一般に, 微分と積分は逆操作.

微分・積分

- 以上を簡単にまとめると



現在の変化率
未来の判断材料

過去の蓄積
過去の判断材料

集合

集合・濃度

- 記号の準備もかねて、集合論から始める.

定義1.1

- 対象(もの)の集まりを**集合**という. 対象となるものは, 数字, 記号, 文字列などいろいろ考えられる.
- 集合の構成要素を**元**(要素)という. a が集合 A の元であることを, $a \in A$ と表す. a が A の元であるとき, a は A に含まれるという. $a \in A$ の否定を $a \notin A$ と書く.
- 集合 A の元の数を $|A|$ で表し, A の**濃度**(位数)と呼ぶ.
 - $|A| = \infty$ なるものは**無限集合**
 - $|A| \neq \infty$ なるものは**有限集合**
- 元をまったくもたない集合を, **空集合**と呼び, \emptyset と書く.
 - どのような元 a に対しても, $a \notin \emptyset$ である.

集合(例)

例1.2

1. $A = \{ \text{りんご, みかん, バナナ} \}$ とすれば, $\text{みかん} \in A$.
2. 都道府県の集合

$$B = \{ \text{北海道, 青森県, 岩手県, 宮城県, ...} \}$$

は $|B| = 47$.

3. 数の集合

- $\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, \dots \}$: 自然数
- $\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$: 整数
- \mathbb{Q} : 有理数(分数全体)
- \mathbb{R} : 実数
- \mathbb{C} : 複素数

これらはすべて無限集合.

外延的記法

- 集合を定義するには, その集合に含まれる元を指定すればよい.
- **外延的記法**: その集合が持つ元をすべて列挙する直接的な方法.
例えば,

$$\{ 1, 2, 3, 4 \} \quad \{ \text{子豚, 狸, 狐, 猫} \} \quad \{ 1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots \}$$

最後の集合は奇数全体の集合を意図したものだが, 「...」に何が並ぶのかが明確でないと誤解を招く恐れがある.

例1.3

- 自然数の集合

$$\mathbb{N} = \{ 1, 2, 3, 4, 5, \dots \}$$

- 整数の集合

$$\mathbb{Z} = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}$$

内包的記法

- **内包的記法**: 集合に含まれる元の条件を明示する方法.
- 命題 P が真となる $x \in X$ 全体の集合を

$$\{x \in X \mid P\}$$

と書く. ここで, X は変数 x が動く範囲の集合である.

例1.4

- 例えば

$$\{n \in \mathbb{Z} \mid -1.4 \leq n \leq 3\}$$

は「整数 n であって $-1.4 \leq n \leq 3$ が成立するもの全体の集合」と読む.

- 外延的記法を用いれば, これは次のように表せる.

$$\{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

外延的記法 vs 内包的記法

例1.5

- 実数 $a < b$ に対して, a, b を端点とする閉区間, 开区間が

$$[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \} \quad (a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$$

で定義される.

- 同様に半开区間が

$$(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b \} \quad [a, b) = \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$$

で定義される.

- これらは外延的方法では記述できない無限集合である.



直積集合

定義1.6

- A, B を集合とする.
- $x \in A$ と $y \in B$ を並べた (x, y) を**順序対**という.
- 順序対全体のなす集合を A と B の**直積集合**といい, $A \times B$ と書く.

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$$

- $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$ とすれば

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\} \\ &= \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\} \end{aligned}$$

- 同様に3つの集合 A, B, C の直積集合 $A \times B \times C$ や, n 個の集合 A_1, \dots, A_n の直積集合

$$A_1 \times \dots \times A_n$$

が定義される.

n 次元座標空間 \mathbb{R}^n

例1.7

- 実数全体の集合 \mathbb{R} は実直線 \mathbb{R}^1 と同一視することができる.

- 実平面

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$$

- 3次元座標空間

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R} \}$$

- 一般に, \mathbb{R}^n は n 次元座標空間, もしくは n 次元ユークリッド空間と呼ばれる.

- この講義では主に, $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ を扱う.

包含関係

- 複数の集合があるとき, それらの間の関係を考えることは自然である.
- 最も基本的なものが**包含関係**である.

定義1.8(部分集合)

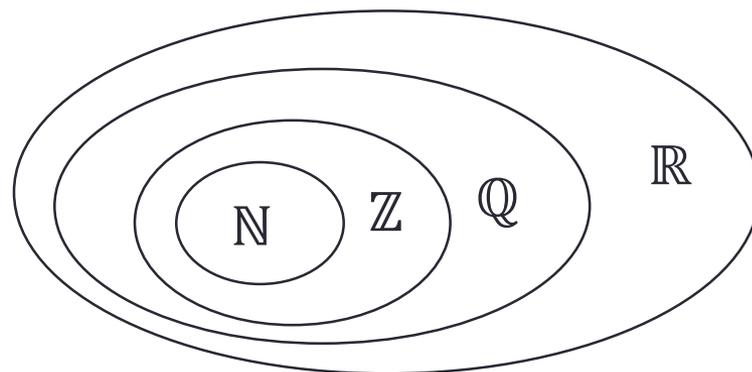
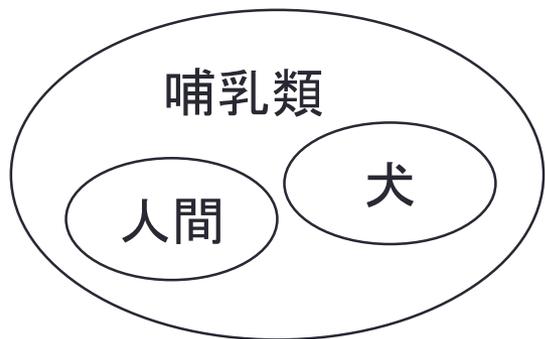
- A, B を集合とする.
 1. 任意の A の元が B の元でもあるとき, A は B の**部分集合**であるといい, $A \subset B$ を書く. $A \subset B$ でないとき, $A \not\subset B$ と書く.
 2. $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるとき, A と B は**(集合として)等しい**といい, $A = B$ と書く.
 3. $A \subset B$ かつ $A \neq B$ であるとき, A と B の**真部分集合**であるといい, $A \subsetneq B$ と書く.

包含関係(例)

- 人間の集合を $\{\text{人間}\}$ と略したりする. これは人間1人からなる集合ではなく, 人間全体の集合を意味する.

例1.9

- $\{\text{人間}\} \subset \{\text{哺乳類}\}$, $\{\text{犬}\} \subset \{\text{哺乳類}\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- 実数 $a < b$ に対して, $(a, b) \subsetneq [a, b]$ である. 一方で, $(a, b]$ と $[a, b)$ の間には包含関係はない.



和集合・共通集合・補集合

定義1.10

- A, B を集合とする.
 - A の元と B の元を合わせたものを, A と B の**和集合**と呼び, $A \cup B$ と書く.

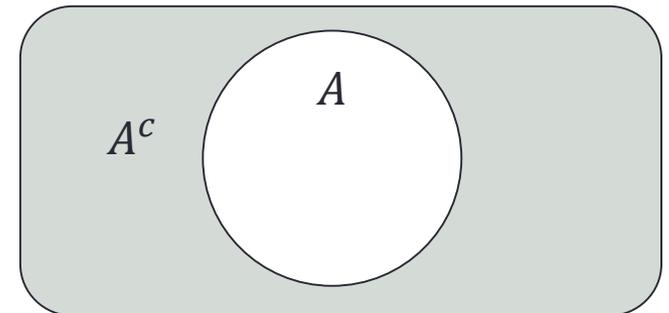
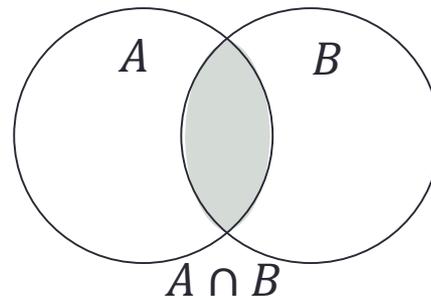
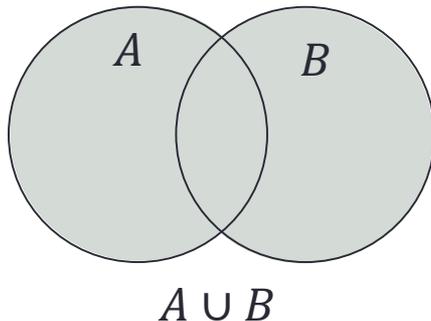
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

- A の元でもあり B の元でもあるものだけを取り出したものを, A と B の**共通集合**と呼び, $A \cap B$ と書く.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

- A の元でない元の集合を, A の**補集合**と呼び, A^c と書く.

$$A^c = \{x \mid x \notin A\}$$



補集合のためには全体集合が定まっている必要がある

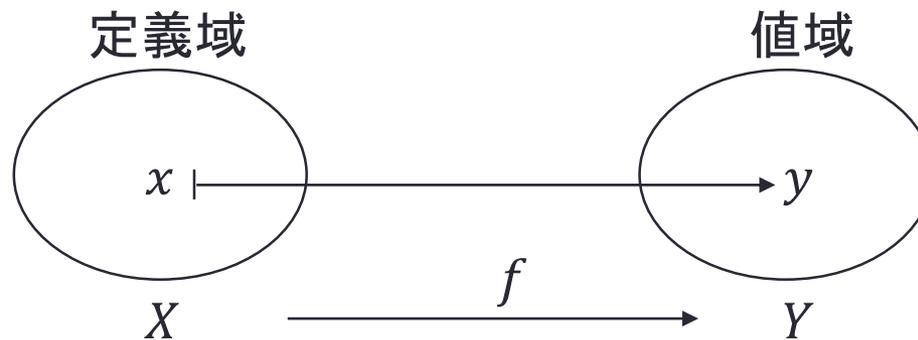
写像

写像

定義1.11

- 集合 X の各元に対して, 集合 Y の元を唯一つ定める対応のことを **写像** と呼び, $f: X \rightarrow Y$ と表す.
- X を **定義域**, Y を **値域** という.
- 写像 $f: X \rightarrow Y$ によって $x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき, y を f による x の **像** といい, $y = f(x)$ と書く.
- この対応を次のように書く.

$$f: X \rightarrow Y, \quad x \mapsto y$$



写像(例)

例1.12

1. $f: \{ \text{人間} \} \rightarrow \mathbb{Z}$, $A \mapsto A$ の年齢
 2. $g: \{ \text{犬} \} \rightarrow \mathbb{R}$, $A \mapsto A$ の身長
 3. $h: \{ \text{猫} \} \rightarrow \{ \text{猫} \}$, $A \mapsto A$ の母猫
 4. $i: \{ \text{日本の大学} \} \rightarrow \mathbb{N}$, A 大学 $\mapsto A$ 大学の学生数
 5. $j: \{ \text{日本の大学} \} \rightarrow \{ \text{都道府県} \}$, A 大学 $\mapsto A$ 大学の所在地
- 一方で, 人間 A と A の友人の対応は写像ではない. A の友人が1人とは限らないからである.

像

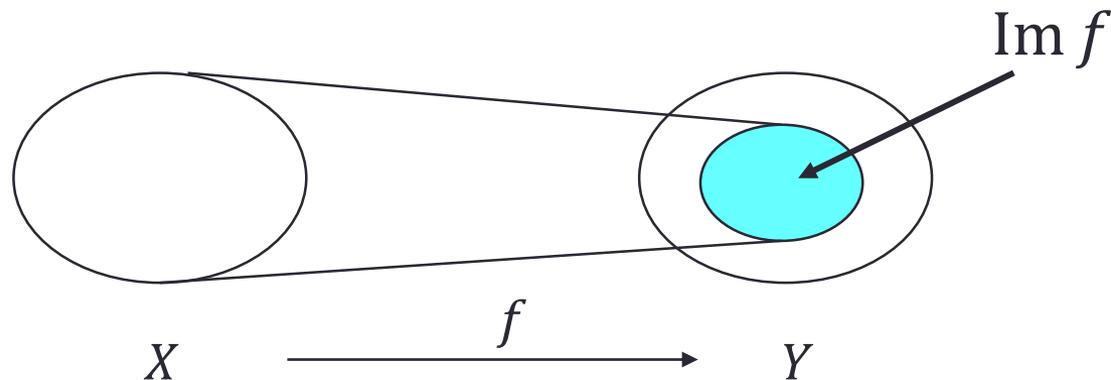
定義1.13

- 写像 $f: X \rightarrow Y$ の像を

$$\text{Im } f = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

で定義する.

- つまり x が X のすべての元を動くとき, x の像 $f(x)$ 全体のなす Y の部分集合のことである.



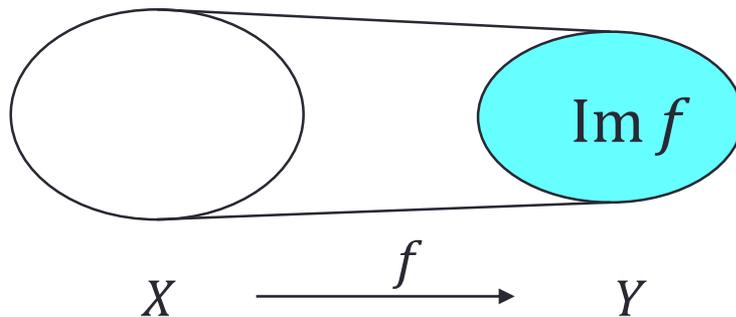
全射・単射

定義1.14

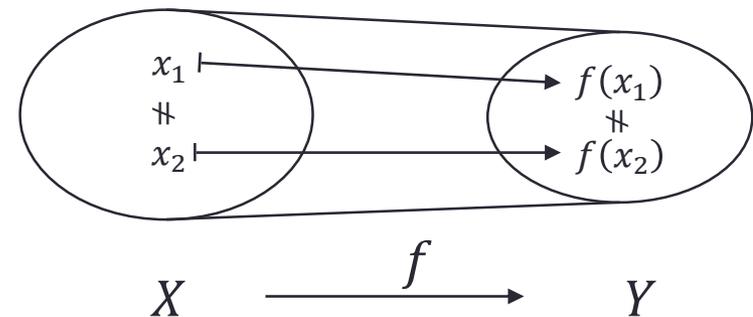
• $f: X \rightarrow Y$ を写像とする.

1. f が**全射**であるとは $\text{Im } f = Y$ が成り立つ場合をいう. つまり「どの $y \in Y$ に対しても $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ 」.
2. f が**単射**であるとは「 $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ 」が成り立つ場合をいう. 同値な対偶条件は「 $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ 」.
3. f が**全単射**であるとは, 全射かつ単射である場合をいう.

全射



単射



全射・単射(例)

例1.15

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2(x-1)$ は(全射だが)単射ではない.
2. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ は全射でも単射でもない. $\text{Im } g = \mathbb{R}_{\geq 0}$.
3. $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ は全単射である.

問題1.16

• 次の写像は全射か? 単射か?

1. $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2(x-1)$
2. $g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^2$
3. $h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$

全射・単射・恒等写像

例1.17

- 次の写像を考える:

$$f: \{ \text{日本の大学} \} \rightarrow \mathbb{N}, \quad A \text{ 大学} \mapsto A \text{ 大学の学生数}$$

$$g: \{ \text{日本の大学} \} \rightarrow \{ \text{都道府県} \}, \quad A \text{ 大学} \mapsto A \text{ 大学の所在地}$$

- 写像 f は全射ではない(単射であろうか?).
- 写像 g は全射だが, 単射ではない.

定義1.18

- 何もしない写像 $\text{id}: X \rightarrow X, x \mapsto x$ を**恒等写像**という.
- 恒等写像は全単射である.

全射・単射(問題)

問題1.19

• 次の写像は全射か？ 単射か？

1. 慶應義塾大学の学生に対して、学籍番号を対応させる写像

$$f: \{ \text{慶應義塾生} \} \rightarrow \mathbb{N}$$

2. 値域を学籍番号となる番号に限ったらどうであろうか？

$$g: \{ \text{慶應義塾生} \} \rightarrow \{ \text{学籍番号} \} \subset \mathbb{N}$$

合成写像

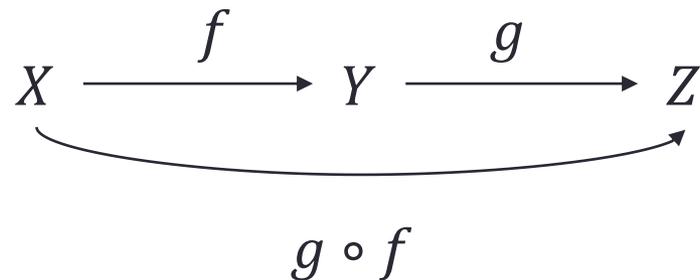
定義1.20

- 写像 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ に対して, 合成写像 $g \circ f: X \rightarrow Z$ を

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

で定義する.

- つまり $x \in X$ に対して $f(x) \in Y$ が定まり, $f(x) \in Y$ に対して $g(f(x)) \in Z$ が定まる.
- 図示すれば次のようになる.



- $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ の合成写像の表記「 $g \circ f$ 」において f, g の順序に注意する.
- これは合成写像が $g(f(x))$ で定義されていることから理解できる.

逆写像

定理1.21

- 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であれば, 写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在して

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

が成り立つ.

- この g を f の逆写像といい, f^{-1} と書く.
- 実際, 任意の $y \in Y$ にたいして, $x \in X$ で $f(x) = y$ なるものが唯一つ存在するので, $g(y) = x$ と定義すればよい.

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} Y$$

例1.22

- 慶應義塾生に学籍番号を対応させる写像は全単射であった.

$$g: \{ \text{慶應義塾生} \} \rightarrow \{ \text{学籍番号} \} \subset \mathbb{N}$$

- 逆写像は, 学籍番号から学生を特定することに対応する.

逆写像(例)

例1.23

- 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 4$ は全単射である.
- f の逆写像は $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{2}y + 2$ で与えられる.
- 実際

$$x \mapsto 2x - 4 \mapsto \frac{1}{2}(2x - 4) + 2 = x$$

$$y \mapsto \frac{1}{2}y + 2 \mapsto 2\left(\frac{1}{2}y + 2\right) - 4 = y$$

なので $g(f(x)) = x$ かつ $f(g(y)) = y$.

- $f(x) = 2x - 4$ の逆写像は, 方程式 $y = 2x - 4$ を x に関して解くことで求まる.

まとめ

1. 微分・積分の概要
2. 集合
 - 濃度
 - 外延的記法
 - 内包的記法
 - 直積集合
 - 包含関係
 - 和集合・共通集合・補集合
3. 写像
 - 全射
 - 単射
 - 恒等写像
 - 合成写像
 - 逆写像