

微分・積分 第5回「微分(1)」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

1. 三角関数, 指数関数, 対数関数の微分
2. 合成関数の微分, 対数微分

三角関数の微分(準備)

- 三角関数の微分を議論するために必要な準備を行う.

定理5.1

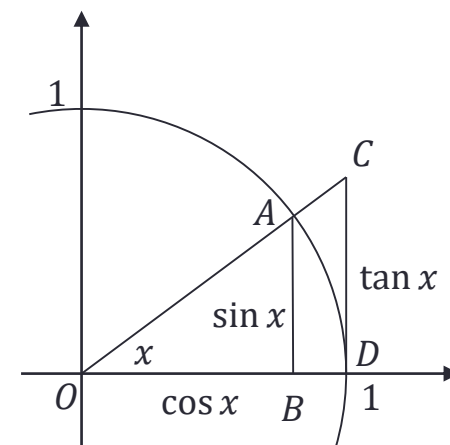
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

- $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において, 扇形 AOD と三角形 AOB と三角形 COD の面積を比べると

$$\frac{1}{2} \sin x \cdot \cos x < \frac{x}{2} < \frac{1}{2} \tan x$$

- $\frac{1}{2} \sin x$ で割ると

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$



三角関数の微分(準備)

- 逆数を取ると

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ であり $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ であるから, 挟み撃ちの定理により $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

であるから

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1 + \cos x} \right) = 1 \cdot \frac{0}{1 + 1} = 0$$

三角関数の微分

定理5.2

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

• 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(x + h) - \sin x &= \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x \\ &= \cos x \cdot \sin h + \sin x \cdot (\cos h - 1)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) \\ &= \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0 = \cos x\end{aligned}$$

三角関数の微分

- 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned}\cos(x+h) - \cos x &= \cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x \\ &= \cos x (\cos h - 1) - \sin x \cdot \sin h\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\cos x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \right) \\ &= \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x\end{aligned}$$

- 商の微分の公式より

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}\end{aligned}$$

三角関数の微分(問題)

問題5.3

• 次の関数の導関数を求めよ.

1. $\sin^2 x$

2. $\sin^3 x$

3. $\sin x \cdot \cos x$

4. $\frac{\cos x}{x}$

ネイピア数

定義5.4

- **ネイピア数** e を次の式で定義する.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

- e の値は $2.718281828 \dots$ の無理数であることが知られている.
- 上の式で e が定義できるためには, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ が収束することを示さなくてはならないが, 数列 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ が単調増加で, $a_n < 3$ であることから示すことができる.
- また, $e = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ と定義しても同じになる.
- そのため, $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ と同値である.
- 二項定理を使って展開することで, $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ であることが分かる.

指数関数と対数関数(準備)

- 指数関数と対数関数の微分を議論するために必要な準備を行う.

定理5.5

$$1. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

$$2. \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = 1$$

- まず, (2)を示す. (対数関数の連続性)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \log(1+h)^{\frac{1}{h}} \stackrel{\downarrow}{=} \log \left(\lim_{h \rightarrow 0} (1+h)^{\frac{1}{h}} \right) = \log e = 1$$

- 次に, (1)を示す. $t = e^h - 1$ とおくと, $h \rightarrow 0$ のとき $t \rightarrow 0$ である.
- また, $e^h = 1 + t$ より $h = \log(1+t)$ であるから, (2)より

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log(1+t)} = 1$$

指数関数の微分

- 指数関数 e^x は微分しても不変であるという特殊な性質を持つ.

定理5.6

$$(e^x)' = e^x$$

- 定理5.5(1)より

$$(e^x)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

- 微分して不変な関数は e^x の定数倍しかないことも知られている.
- つまり, 微分方程式 $f'(x) = f(x)$ の解は $f(x) = C \cdot e^x$ の形 (C は定数) となる.
- 底が e でない場合は講義の後半で扱う.

対数関数の微分

定理5.7

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

• 定理5.5(2)より

$$\begin{aligned} (\log x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \log \left(1 + \frac{h}{x} \right) \quad \left(t = \frac{h}{x} \text{ とおく} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{tx} \log(1+t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\log(1+t)}{t} \\ &= \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

合成関数

定義5.8

- 関数 $g: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto g(x)$ と $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto f(y)$ で, 像 $\text{Img } g$ が E に含まれる場合, **合成関数**

$$f \circ g: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(g(x))$$

を考えることができる.

- これは合成写像の特別な場合であるが, 関数であることを強調して $f(g(x))$ という記号を使うことが多い.

合成関数の微分

定理5.9

- $f(y)$, $g(x)$ が微分可能であれば, 合成関数 $f(g(x))$ も微分可能で

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

- $y = g(x)$, $z = f(y)$ とすれば

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

と表現することも可能.

- 導関数は分数ではないが, 形式的に約分できるとすると, 右辺から左辺が得られる.

合成関数の微分の大雑把な証明

- 十分小さな h に関して $k = g(x + h) - g(x) \neq 0$ を仮定する.
- $g(x)$ の連続性より, $h \rightarrow 0$ で $k \rightarrow 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
 (f(g(x)))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + k) - f(g(x))}{k} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
 &= f'(g(x)) \cdot g'(x)
 \end{aligned}$$

- 仮定が成立しない場合もあるので, 厳密な証明としては不十分.

発展：合成関数の微分の証明（厳密版）

- 一般に, $f(x)$ が a で微分可能なとき, 関数 $\delta(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ とおくと, $\lim_{x \rightarrow a} \delta(x) = 0$ であり,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \delta(x)(x - a)$$

- a を $g(x)$, x を $g(x + h)$ に置き換えることで

$$\begin{aligned} f(g(x + h)) &= f(g(x)) + f'(g(x))(g(x + h) - g(x)) \\ &\quad + \delta(g(x + h))(g(x + h) - g(x)) \end{aligned}$$

- これより

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x + h)) - f(g(x))}{h} &= f'(g(x)) \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \\ &\quad + \delta(g(x + h)) \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

- $h \rightarrow 0$ としたとき, 右辺の第1項は $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ に, 第2項は 0 に収束する.

合成関数の微分(例)

例5.10

- $((5x^2 + 3)^9)'$ を計算することを考える.
- もちろん, 展開してから微分しても良いが, 計算が面倒である.
- 今, $f(y) = y^9$ と $g(x) = 5x^2 + 3$ とすると, $f(g(x)) = (5x^2 + 3)^9$ となることから

$$\begin{aligned} ((5x^2 + 3)^9)' &= (y^9)' && (y = g(x) \text{ とおいた}) \\ &= 9y^8 \cdot y' \\ &= 9(5x^2 + 3)^8 \cdot 10x \\ &= 90x(5x^2 + 3)^8 \end{aligned}$$

合成関数の微分(例)

例5.11

- $(e^{3x^2+7})'$ を計算することを考える.
- $f(y) = e^y$ と $g(x) = 3x^2 + 7$ とすると, $f(g(x)) = e^{3x^2+7}$ となることから

$$\begin{aligned}(e^{3x^2+7})' &= (e^y)' && (y = g(x) \text{ とおいた}) \\ &= e^y \cdot y' \\ &= e^{3x^2+7} \cdot 6x \\ &= 6xe^{3x^2+7}\end{aligned}$$

合成関数の微分(問題)

問題5.12

• 次の関数の導関数を求めよ.

1. $(x^2 + x + 1)^9$

2. $(x^2 + 1)^2(2x^3 - 1)^4$

3. $\sin^5 x$

4. $\cos x^2$

一般の指数関数の微分

定理5.13

- $a > 0$ に関して

$$(a^x)' = a^x \log a$$

- $a = e^{\log a}$ であるから

$$a^x = (e^{\log a})^x = e^{x \log a}$$

と書くことができる.

- $f(y) = e^y$, $g(x) = x \log a$ とすると, $f(g(x)) = e^{x \log a} = a^x$ であるから

$$(a^x)' = (e^y)' \quad (y = x \log a \text{ とおいた})$$

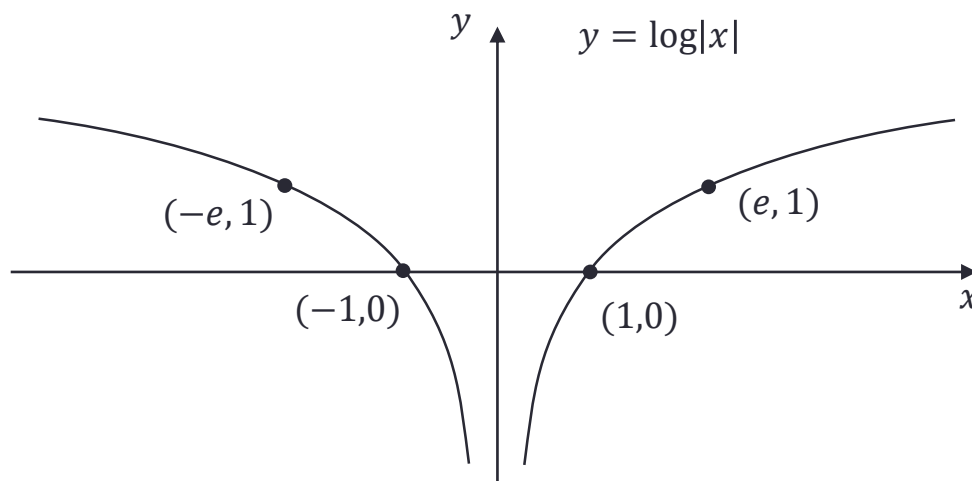
$$= e^y \cdot y'$$

$$= e^{x \log a} \cdot \log a$$

$$= a^x \log a$$

対数関数の微分の拡張

- $\log x$ の定義域は $x > 0$ であるが, $\log|x|$ を考えることで, 定義域を $x \neq 0$ なる実数全体に拡張することができる.



定理5.14

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

- $x > 0$ の場合に成り立つのは定理5.7のままであり, $x < 0$ の場合

$$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

対数微分

定理5.15

- 微分可能な関数 $g(x)$ に対して

$$(\log|g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

- $f(y) = \log|y|$ とすると $f(g(x)) = \log|g(x)|$ と書くことができることから

$$(\log|g(x)|)' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

- 関数の対数を取ってから微分する方法は**対数微分**と呼ばれ、様々な場面に現れる.

対数微分(応用)

定理5.16

- $a \in \mathbb{R}$ に関して, $x > 0$ において

$$(x^a)' = a x^{a-1}$$

- $g(x) = x^a$ とすると

$$(\log|g(x)|)' = (\log x^a)' = (a \log x)' = \frac{a}{x}$$

- 定理5.15より

$$\frac{a}{x} = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{(x^a)'}{x^a}$$

であるから, $(x^a)' = a x^{a-1}$.

- 例えば

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$$

まとめ

1. 三角関数, 指数関数, 対数関数の微分
2. 合成関数の微分, 対数微分

発展: ネイピア数の性質(1)

定理5.17

• $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 3$ である. (n は自然数)

• 二項定理を使うと

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k \frac{1}{n^k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \frac{1}{n^k} \\
 &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \\
 &\leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \\
 &\leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3
 \end{aligned}$$

発展: ネイピア数の性質(2)

定理5.18

- $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とすると, $a_n < a_{n+1}$ である. a_n は単調増加数列.
- 相加相乗平均の不等式は $\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ であり, 等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに成り立つ.
- n 個の $\frac{n+1}{n}$ と1個の 1 に対して, 相加相乗平均の不等式を使うと

$$\frac{\frac{n+1}{n} \cdot n+1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$1 + \frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_{n+1} > a_n$$

発展: ネイピア数の性質(3)

定理5.19

- $e = \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が定義であったが, $n \rightarrow -\infty$ でも同じになる.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = 1 \cdot e = e \end{aligned}$$

定理5.20

- $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$