

微分・積分 第6回「微分(2)」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

1. 逆写像, 逆関数, 逆関数の微分
2. 逆三角関数, 逆三角関数の微分

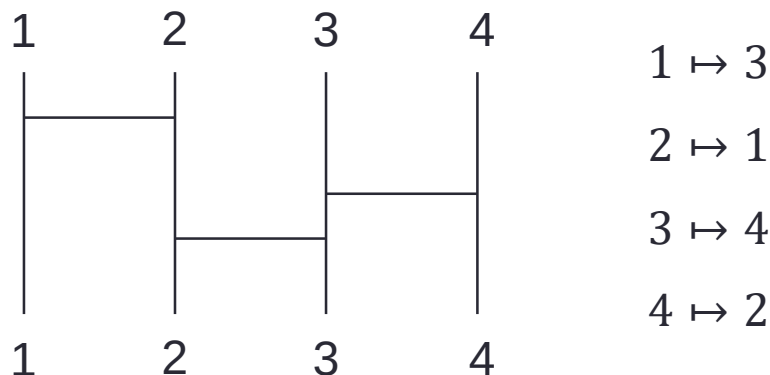
全射・単射

- 写像 $f: X \rightarrow Y$ に対して, $\text{Im } f = \{ f(x) \mid x \in X \} \subset Y$ であった.

定義6.1

- f が**全射**であるとは $\text{Im } f = Y$ が成り立つ場合をいう. つまり「どの $y \in Y$ に対しても $x \in X$ が存在して $y = f(x)$ 」.
- f が**単射**であるとは「 $x_1 \neq x_2$ ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ 」が成り立つ場合をいう. 同値な対偶条件は「 $f(x_1) = f(x_2)$ ならば $x_1 = x_2$ 」.
- f が**全単射**であるとは, 全射かつ単射である場合をいう.

- 例: あみだくじは全単射



逆関数

定理6.2

- 写像 $f: X \rightarrow Y$ が全単射であれば, 写像 $g: Y \rightarrow X$ が存在して

$$g \circ f = \text{id}_X, \quad f \circ g = \text{id}_Y$$

が成り立つ.

- この g を f の逆写像といい, f^{-1} と書く.
- 実際, 任意の $y \in Y$ にたいして, $x \in X$ で $f(x) = y$ なるものが唯一つ存在するので, $g(y) = x$ と定義すればよい.

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ X & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & g & \end{array}$$

- 特に, $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$ のときに, 逆写像を逆関数と呼ぶ.

逆関数(例)

例6.3

- 写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x - 4$ は全単射である.
- f の逆写像は $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $y \mapsto \frac{1}{2}y + 2$ で与えられる.
- 実際

$$x \mapsto 2x - 4 \mapsto \frac{1}{2}(2x - 4) + 2 = x$$

$$y \mapsto \frac{1}{2}y + 2 \mapsto 2\left(\frac{1}{2}y + 2\right) - 4 = y$$

なので $g(f(x)) = x$ かつ $f(g(y)) = y$.

- $f(x) = 2x - 4$ の逆写像は, 方程式 $y = 2x - 4$ を x に関して解くことで求まる.

逆関数(例)

例6.4

- 指数関数

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto e^x$$

と対数関数

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad y \mapsto \log y$$

は互いに逆写像の関係にある.

$$g(f(x)) = \log(e^x) = x, \quad f(g(y)) = e^{\log y} = y$$

- 指数関数を $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x$ と考えると, これは全射でないことに注意する.
- 関数 $h(x)$ の値域を $\mathbb{R}_+$ に制限することで, 全単射な関数 $f(x)$ が得られる.

逆関数(例)

例6.5

- 関数

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad x \mapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, \quad y \mapsto \sqrt{y}$$

は互いに逆写像の関係にある.

$$g(f(x)) = \sqrt{x^2} = x, \quad f(g(y)) = (\sqrt{y})^2 = y$$

- 関数 $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ は単射ではないことに注意する.
- 関数 $h(x)$ の定義域を $\mathbb{R}_+$ に制限することで, 全単射な関数 $f(x)$ が得られる.

逆関数の微分

定理6.6

- 微分可能な関数 $f(x)$ の逆関数 $g(y)$ が存在するとき, $g(y)$ も微分可能で

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

- または

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

- ただし $f'(x) \neq 0$ ($\frac{dy}{dx} \neq 0$) を仮定した.

- $f'(g(y))$ は $f'(x)$ に $x = g(y)$ を代入して y の関数にするという意味である.

逆関数の微分(証明)

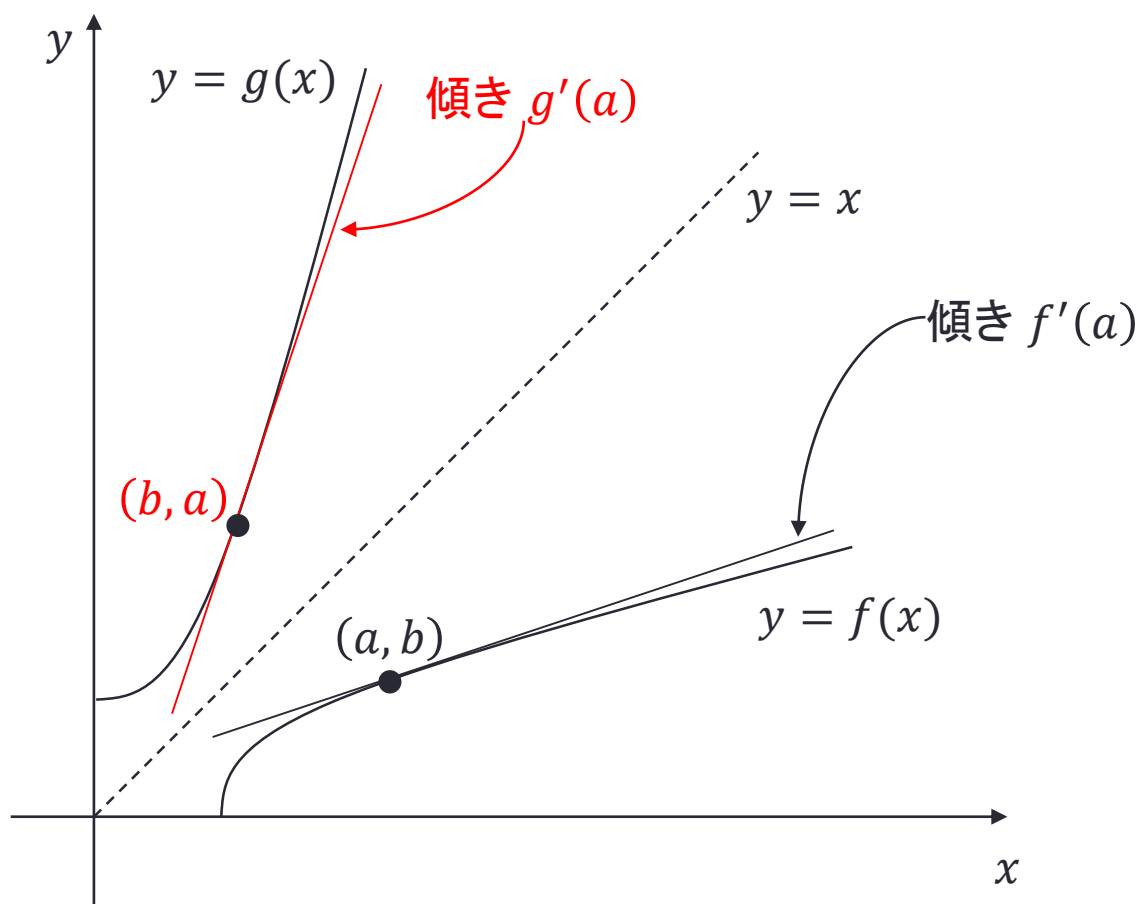
- $f(x)$ と $g(x)$ が互いに逆関数であるから $f(g(y)) = y$,
- 合成関数の微分の公式より $f'(g(y)) \cdot g'(y) = 1$.
- つまり, $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$
- この証明では $g(y)$ の微分可能性が暗に仮定されているので, 厳密には不十分である.

- $f(x)$ は微分可能なので連続であり, 逆関数 $g(y)$ も連続になる(自明でないが正しい).
- $y = f(x)$ とおくと $\tilde{y} \rightarrow y$ のとき $\tilde{x} = g(\tilde{y}) \rightarrow x$

$$\begin{aligned}
 g'(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(y+h) - g(y)}{h} = \lim_{\tilde{y} \rightarrow y} \frac{g(\tilde{y}) - g(y)}{\tilde{y} - y} = \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{\tilde{x} - x}{f(\tilde{x}) - f(x)} \\
 &= \lim_{\tilde{x} \rightarrow x} \frac{1}{\frac{f(\tilde{x}) - f(x)}{\tilde{x} - x}} = \frac{1}{f'(x)}
 \end{aligned}$$

逆関数の微分

- 関数 $f(x)$, $g(x)$ が互いに逆関数であれば, それらのグラフは直線 $y = x$ に関して鏡映対称の関係にある.



逆関数の微分(例)

例6.7

- 関数

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x - 4 \qquad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \frac{1}{2}y + 2$$

は互いに逆関数の関係にあった.

- 実際に導関数を計算してみると

$$f'(x) = 2$$

$$g'(y) = \frac{1}{2}$$

であるから, 確かに

$$\frac{1}{g'(2x - 4)} = 2 = f'(x)$$

$$\frac{1}{f'(\frac{1}{2}y + 2)} = \frac{1}{2} = g'(y)$$

逆関数の微分(例)

例6.8

- 関数

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto e^x$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, y \mapsto \log y$$

は互いに逆関数の関係にあった.

- 実際に導関数を計算してみると

$$f'(x) = e^x$$

$$g'(y) = \frac{1}{y}$$

であるから, 確かに

$$\frac{1}{g'(e^x)} = \frac{1}{\frac{1}{e^x}} = e^x = f'(x)$$

$$\frac{1}{f'(\log y)} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y} = g'(y)$$

逆関数の微分(例)

例6.9

- 関数

$$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$$

$$g: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+, y \mapsto \sqrt{y}$$

は互いに逆関数の関係にあった.

- 実際に導関数を計算してみると

$$f'(x) = 2x$$

$$g'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

であるから, 確かに

$$\frac{1}{g'(x^2)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2}}} = 2x = f'(x)$$

$$\frac{1}{f'(\sqrt{y})} = \frac{1}{2\sqrt{y}} = g'(y)$$

逆関数の微分(問題)

問題6.10

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の逆関数を求め, 逆関数の微分法が成立していることを確かめよ.

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ の逆関数は $g(y) = y^3$ である.

- 導関数はそれぞれ

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$g'(y) = 3y^2$$

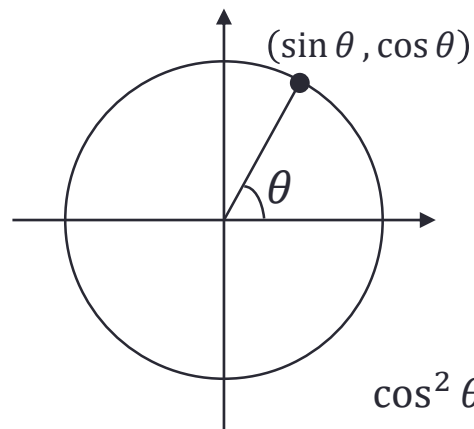
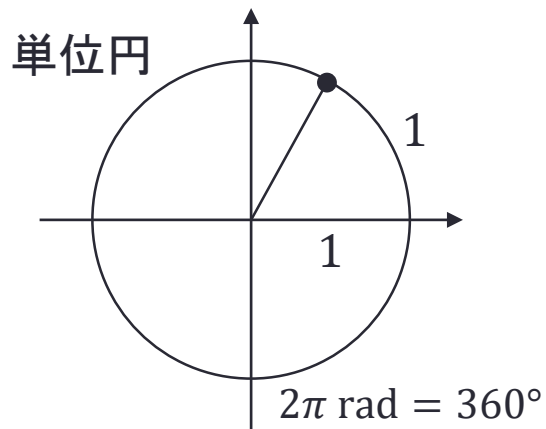
であるから, 確かに

$$\frac{1}{g'(\sqrt[3]{x})} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = f'(x)$$

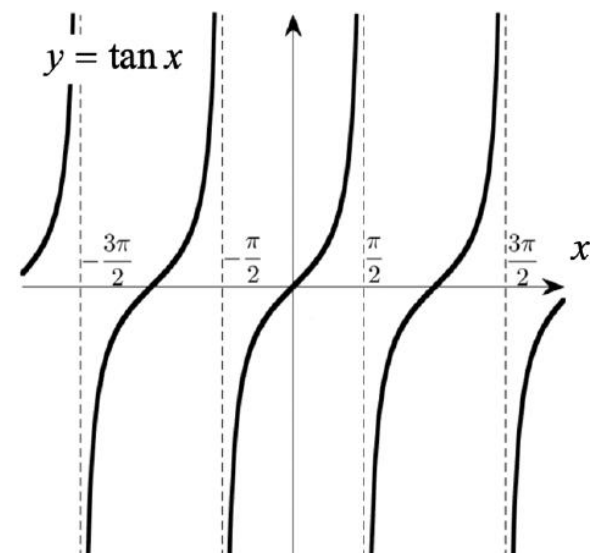
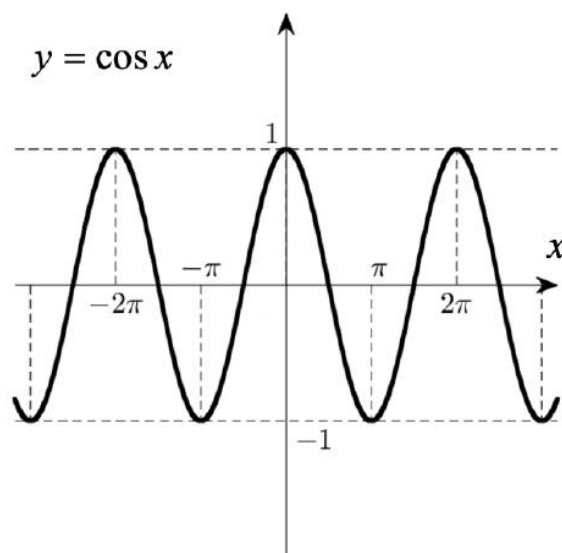
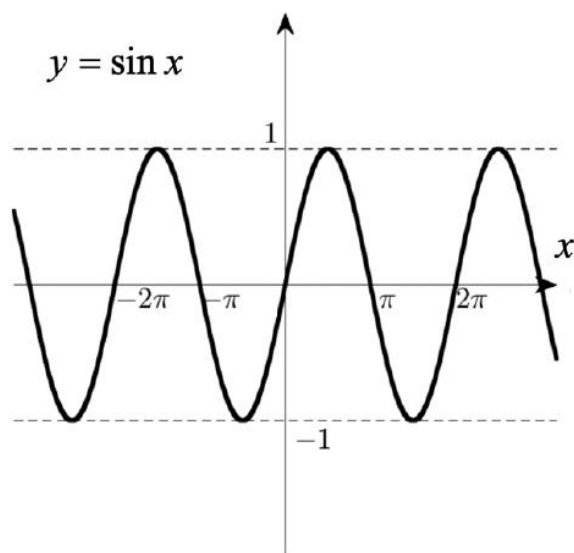
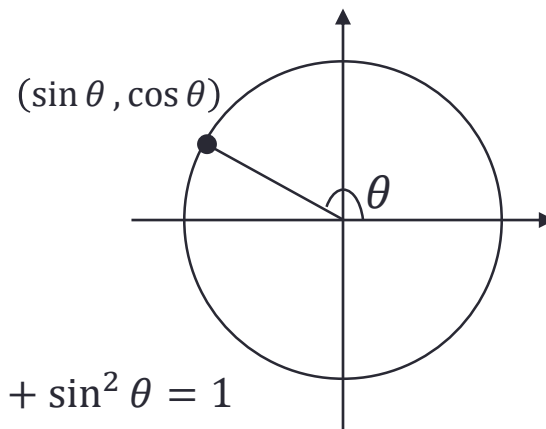
$$\frac{1}{f'(y^3)} = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{(y^3)^2}}} = g'(y)$$

三角関数

- 三角関数 $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ を思い出す.



$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$



逆三角関数

定義6.11

- $\sin: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ は全単射. この逆関数を $\arcsin x$ と書く.

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \arcsin x$$

- $\cos: [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ は全単射. この逆関数を $\arccos x$ と書く.

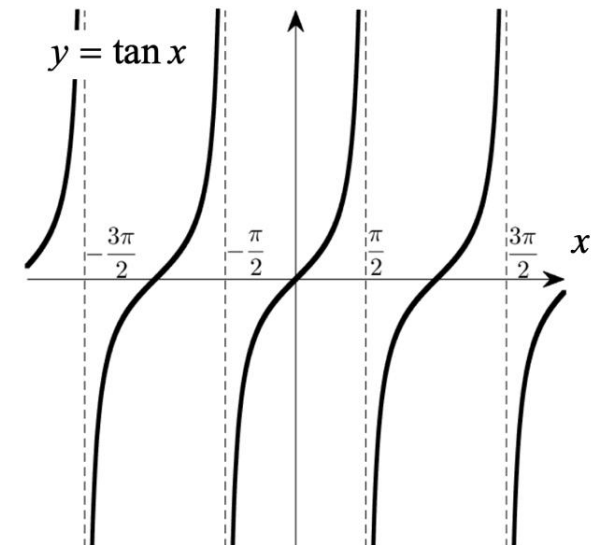
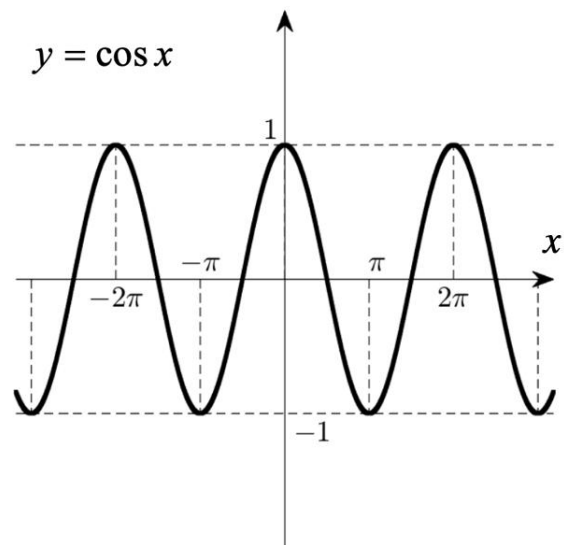
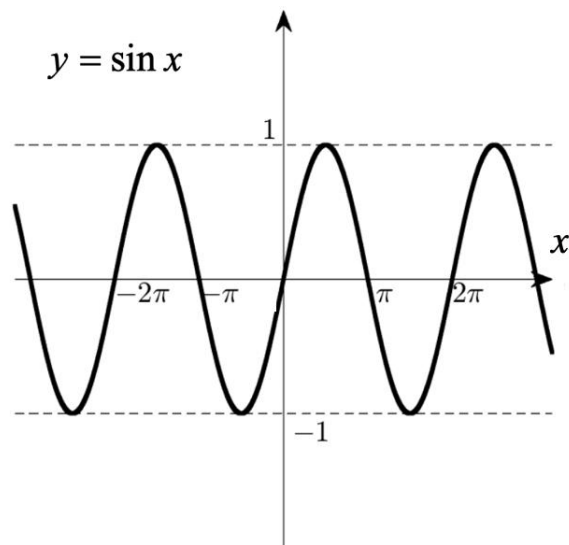
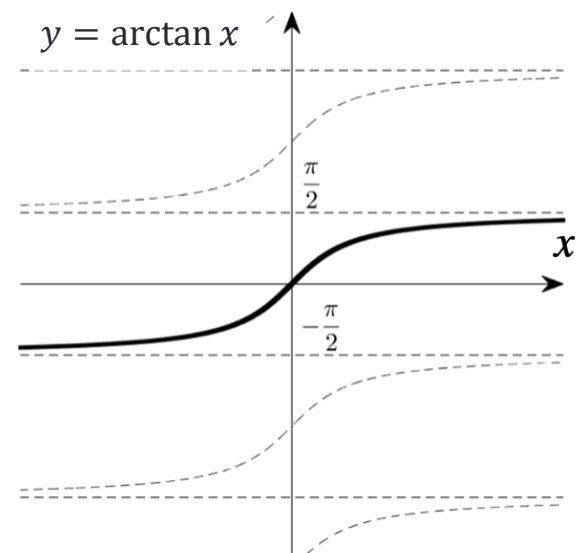
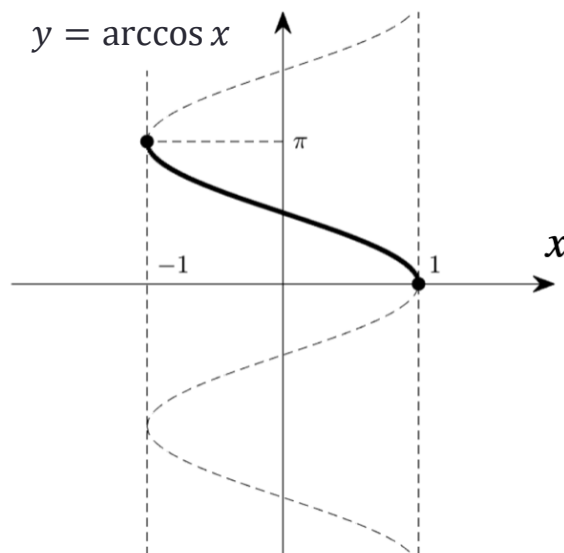
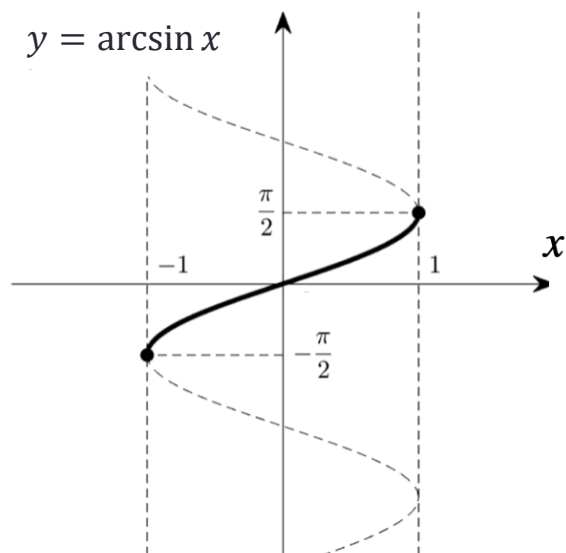
$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos x$$

- $\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ は全単射. この逆関数を $\arctan x$ と書く.

$$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan x$$

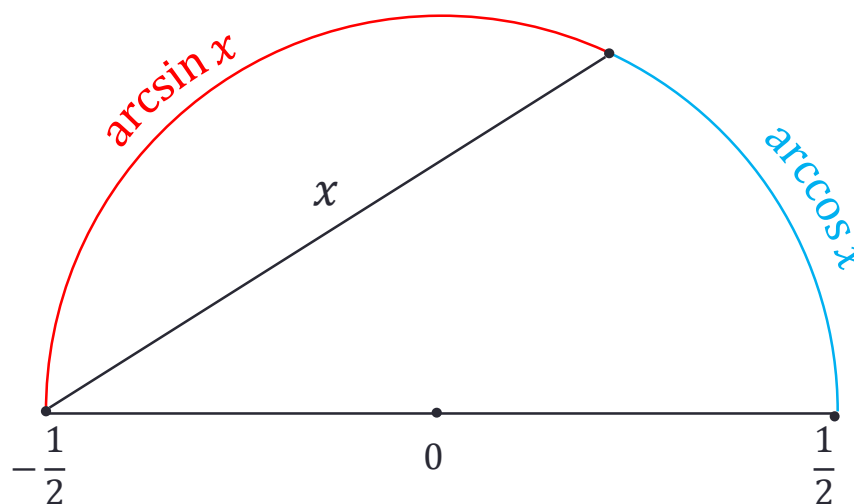
- これらは**逆三角関数**と呼ばれ, それぞれ $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\tan^{-1} x$ と書くこともある. ($\arcsin x = \sin^{-1} x \neq \frac{1}{\sin x}$)

逆三角関数(グラフ)



逆三角関数

- 実際, $0 \leq x \leq 1$ に関して, 逆三角関数 $\arcsin x$ と $\arccos x$ は半径 $\frac{1}{2}$ の円の弧(arc)の一部の長さを表している.



- これにより, 例えば

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

が視覚的に理解できる. ($-1 \leq x \leq 1$ で成立)

逆三角関数(問題)

問題6.12

• 次の値を求めよ.

1. $\arcsin \frac{1}{\sqrt{2}}$

2. $\arcsin 1$

3. $\arccos \frac{1}{2}$

4. $\arctan \frac{1}{\sqrt{3}}$

逆三角関数の微分

定理6.13

1. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3. $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$

1. $f(x) = \arcsin x$ の逆関数は $g(y) = \sin y$ なので

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. $f(x) = \arccos x$ の逆関数は $g(y) = \cos y$ なので

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $f(x) = \arctan x$ の逆関数は $g(y) = \tan y$ なので

$$f'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \cos^2 y = \frac{\cos^2 y \cdot (1 + \tan^2 y)}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

逆三角関数の微分(問題)

問題6.14

• 次の関数の導関数を求めよ.

1. $\arcsin 3x^2$

2. $\arctan(x^3 + 1)$

双曲線関数

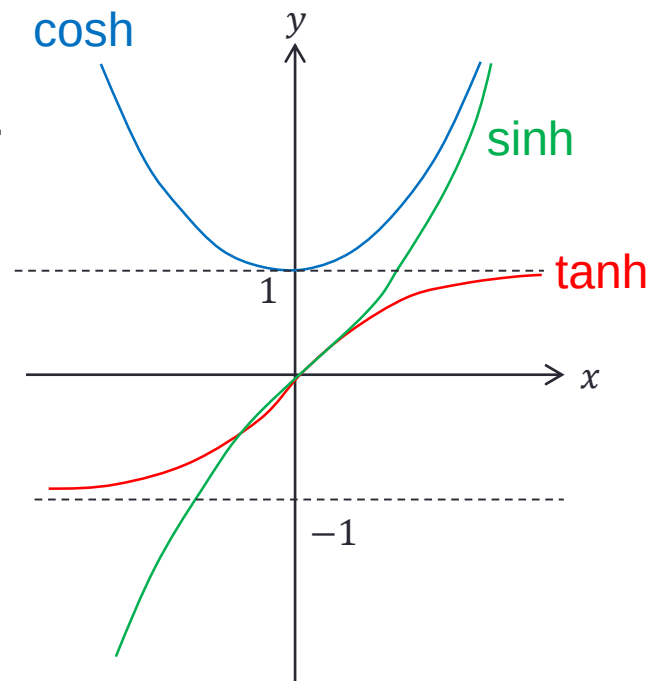
定義6.15

- 次の関数を**双曲線関数**と呼ぶ.

$$1. \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$2. \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$3. \tanh x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$



- $y = \cosh x$ のグラフは懸垂線とも呼ばれる.
- $\tanh x$ はニューラルネットワークの活性化関数としても用いられる.
- 三角関数と似たような等式が成り立つ.
 - $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
 - $\tanh x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$
 - $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$
 - $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$
 - $\tanh(x + y) = \frac{\tanh x + \tanh y}{1 + \tanh x \tanh y}$

双曲線関数の微分

定理6.16

- 双曲線関数の導関数は次のようになる.

1. $(\sinh x)' = \cosh x$

2. $(\cosh x)' = \sinh x$

3. $(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$

- $(e^x)' = e^x$ であるから, 定義に従って微分すればよい.
- 前回の三角関数の導関数に酷似する.

定理5.12

1. $(\sin x)' = \cos x$

2. $(\cos x)' = -\sin x$

3. $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

逆双曲線関数とその微分

定義6.17

• 双曲線関数の逆関数の逆双曲線関数は次のようになる.

$$1. \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$2. \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$3. \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

定理6.18

• 逆双曲線関数の導関数は次のようになる.

$$1. (\sinh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$2. (\cosh^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$3. (\tanh^{-1} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

定理6.13

$$1. (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$2. (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$3. (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

まとめ

1. 逆写像, 逆関数, 逆関数の微分
2. 逆三角関数, 逆三角関数の微分

発展：連続関数の逆関数の性質

定理6.19

- 連続関数 f が逆関数を持つための必要十分条件は, f が狭義単調増加または狭義単調減少であることである.
- f が狭義単調増加とは, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ となることである.
- f が狭義単調減少とは, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ となることである.
- まず, 十分条件であること(狭義単調であれば逆関数が存在する)を示す.
 - f が狭義単調増加の場合, f の定義域が $[a, b]$ のとき, 値域は $[f(a), f(b)]$ となり, 中間値の定理から, 任意の $y \in [f(a), f(b)]$ に対して, $f(x) = y$ となる $x \in [a, b]$ が存在する.
 - 狭義単調増加であるから, $x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$ なので, $f(x) = y$ となる x は一意的である.
 - この対応が f の逆関数となる. (狭義単調減少の場合も同様)
- 次に, 必要条件であること(逆関数が存在すれば狭義単調である)を示す.
 - f の定義域を $[a, b]$ ($a < b$) としたとき, 単射であるから $f(a) \neq f(b)$ である. $f(a) < f(b)$ の場合を考える.
 - $\forall x_1 \in (a, b)$ としたとき, $f(a) < f(x_1)$ である. なぜなら, $f(x_1) \leq f(a)$ とすると, 中間値の定理から $f(c) = f(a)$ となる $c \in (x_1, b)$ となり, f が単射であることに矛盾する.
 - $\forall x_2 \in (a, b)$ が $x_1 < x_2$ のとき, $f(x_1) < f(x_2)$ である. なぜなら, $f(x_2) \leq f(x_1)$ とすると, 中間値の定理から $f(c) = f(x_1)$ となる $c \in (x_1, b)$ が存在することになり, f が単射であることに矛盾する.
 - よって, f は狭義単調増加である. ($f(b) < f(a)$ の場合も f が狭義単調減少であることを同様に示すことができる.) (QED)

発展: 連続関数の逆関数(2)

定理6.20

- 連続関数 f が逆関数を持つとき, 逆関数も連続である.
- 逆関数を g とする. f の定義域を D とし, 値域を I とすると, g の定義域は I で, 値域は D となる.
- 定理6.16より f は, 狭義単調増加であるか, 狭義単調減少であり, まず, 狭義単調増加の場合を考える(狭義単調減少の場合も同様).
- $\forall b \in I$ に対して, $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = g(b)$ を示せばよい.
- すなわち, $\forall \epsilon > 0$ に対して, $\exists \delta > 0$ し, $|y - b| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(b)| < \epsilon$ を示せばよい.
- $g(b) = a$ とすると $f(a) = b$. $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap D$ において f は狭義単調増加であるから, $(f(a - \epsilon), f(a + \epsilon)) \cap I$ は $f(a) = b$ を含む.
- $\delta = \min(b - f(a - \epsilon), f(a + \epsilon) - b)$ とすれば, $|y - b| < \delta$ ならば, $y \in (b - \delta, b + \delta)$ であり, $y \in (f(a - \epsilon), f(a + \epsilon)) \cap I$ なので, f が単調増加なので, $g(y) \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$ となり, すなわち, $|g(y) - a| = |g(y) - g(b)| < \epsilon$ (QED)