

微分・積分

第8回「高次微分と多項式近似(1)」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

1. ロルの定理

- 平均値の定理
- コーシーの平均値の定理

2. 高次導関数

- テイラーの定理
- 有限テイラー展開

ロルの定理

定理8.1 (ロルの定理)

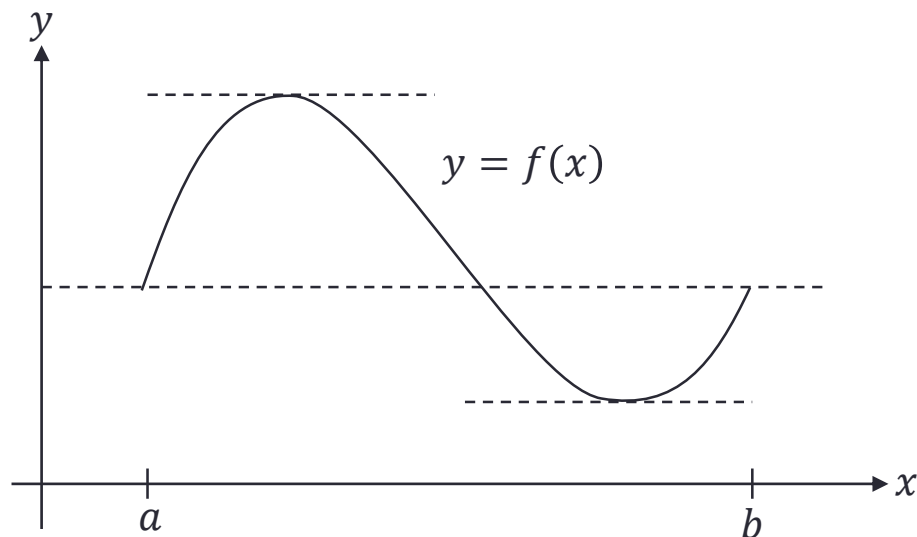
- 微分可能な関数 $f(x)$ の定義域に $[a, b]$ が含まれ, $f(a) = f(b)$ が成り立つならば, $f'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する.

証明

- $f(x)$ が定数関数であれば明らか.
- そうでない場合には, ワイエルシュトラスの最大値の定理(定理7.9)より, ある $c \in [a, b]$ において最大値または最小値をとる. 定数関数でないので, 最大値あるいは最小値のどちらかにおいて $f(c) \neq f(a)$ となり, $c \in (a, b)$.
- c において最大値を取る場合には, 任意の $x \in [a, b]$ に対して, $f(x) \leq f(c)$.
- $x < c$ のとき $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$ なので,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c-0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$
- $x > c$ のとき $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$ なので,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$
- したがって, $f'(c) = 0$.
- c において最小値を取る場合も同様.
(QED)



平均値の定理

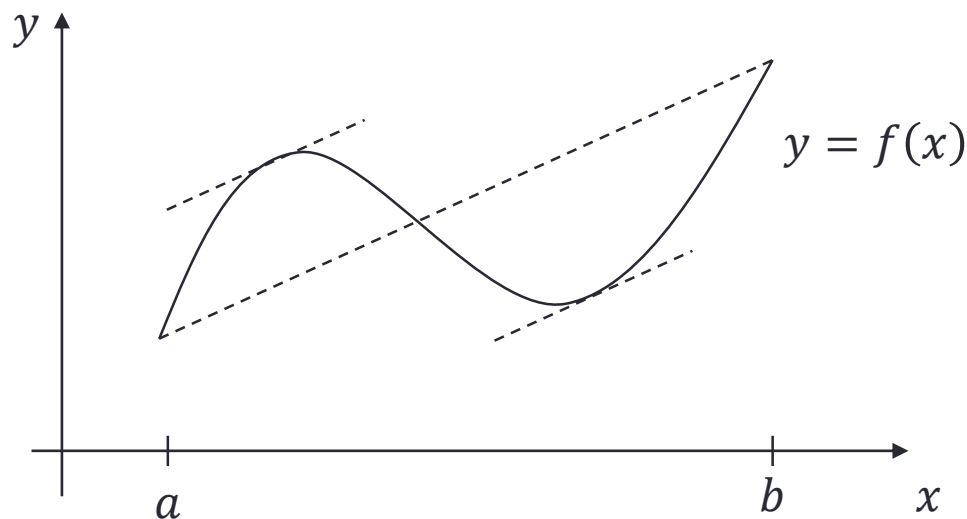
- ロルの定理を斜めにずらしたものが平均値の定理である.

定理8.2(平均値の定理)

- 微分可能な関数 $f(x)$ の定義域に $[a, b]$ が含まれるとき

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する.



平均値の定理(証明)

- 関数

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

は $g(a) = g(b)$ を満たすので, ロルの定理より $g'(c) = 0$ となる $c \in (a, b)$ が存在する.

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

なので, 平均値の定理が示された.

- 端点で関数の値が等しくなるように一次関数を引くことで, ロルの定理に帰着させている.

単調増加・減少(証明)

- 平均値の定理を使うことで前回の単調増加・減少の定理の証明ができる.

定理7.7

- 関数 $f(x)$ が $[a, b]$ で微分可能であるとする.
- 1. $x \in [a, b]$ において $f'(x) \geq 0$ ならば, $[a, b]$ において $f(x)$ は単調増加.

(証明)

- 関数 f が $[a, b]$ において単調増加でないと仮定すると, $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ となる x_1, x_2 があり, $f(x_1) > f(x_2)$ となる.
- 平均値の定理(定理8.2)より, $c \in (x_1, x_2)$ が存在し,

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

- $f(x_1) > f(x_2)$ および $x_1 < x_2$ より, 右辺は負であるが, これは $x \in [a, b]$ において $f'(x) \geq 0$ であることに矛盾する.
- 背理法により, 関数 f が $[a, b]$ において単調増加である. (QED)
- 定理7.7の他の項目も同様に示すことができる.

コーシーの平均値の定理

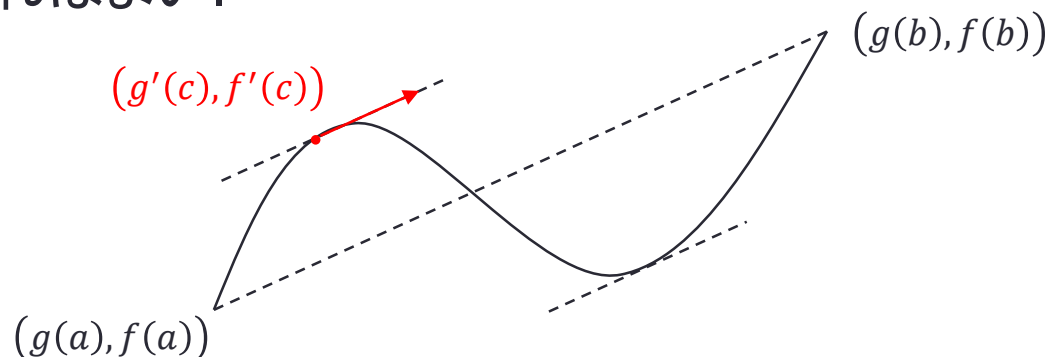
定理8.3(コーシーの平均値の定理)

- 微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の定義域に $[a, b]$ が含まれ, $x \in (a, b)$ において $g'(x) \neq 0$ であり, $g(b) - g(a) \neq 0$ であれば

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する.

- $g(x) = x$ の場合が通常のアベラ値の定理である.
- 直感的には, 媒介変数 $t \in [a, b]$ を用いて $(x, y) = (g(t), f(t))$ の軌跡を考えればよい.



コーシーの平均値の定理(証明)

- 関数

$$\phi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$$

を考えると

$$\phi(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) = \phi(b)$$

であるから, ロルの定理により, ある $c \in (a, b)$ が存在して

$$0 = \phi'(c) = (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c)$$

- したがって, 上式を整理して

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

ロピタルの定理

- コーシーの平均値の定理を利用して、ロピタルの定理を証明する.

定理8.4(ロピタルの定理)

- 関数 $f(x), g(x)$ が a を除く a の近傍において微分可能であり,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

かつ, $g'(x) \neq 0$ とする.

- このとき, 極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が存在するならば

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- ロピタルの定理は, $a = \pm\infty$ や $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ の場合も成り立つ.

ロピタルの定理(証明)

- 必要ならば $f(a) = g(a) = 0$ と置きなおすことにより, $f(x), g(x)$ は点 a を含めて連続としても極限には影響しない.
- $x > a$ とすると, $[a, x]$ にコーシーの平均値の定理を適用して

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c \in (a, x)$ が存在する.

- $x \rightarrow a + 0$ のとき $c \rightarrow a + 0$ であるから

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

- $x \rightarrow a - 0$ の場合も同様である.

ロピタルの定理(問題)

問題8.5 次の極限を計算せよ.

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

2. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{x-1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{10^{10}x}{e^x}$

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$

- ロピタルの定理を使う際には、仮定に注意すること.

高次導関数

- 微分とは、関数を1次多項式(関数)で近似した様子を記述するもので、導関数の情報から関数の増減の解析が可能になった.
- 導関数がさらに微分可能ならば、2回微分することにより凹凸を知ることができた. これは関数を2次多項式で近似することに相当する.
- 関数がさらに微分可能な場合には、3回微分、4回微分、... を考えることにより、与えられた関数の3次多項式、4次多項式、... での近似を考察することができる.

高次導関数

- 関数 $f(x)$ が微分可能な時, $f'(x)$ をその導関数と呼んだ.
- これを帰納的に繰り返すことで高次導関数を得ることができる.

定義8.6

- $f'(x)$ が微分可能なとき, $f^{(2)}(x) = f''(x)$ を $f(x)$ の2次導関数という.
- $f^{(n-1)}(x)$ が微分可能なとき,

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x) \right)'$$

を $f(x)$ の n 次導関数という.

- $\frac{d^n}{dx^n} f(x)$, $\frac{d^n f}{dx^n}(x)$ とも書かれる.

- 記号を合わせるために, $f(x)$ を $f^{(0)}(x)$, $f'(x)$ を $f^{(1)}(x)$ と書く場合もある.

高次導関数

定義8.7

- 関数 $f(x)$ が n 回微分可能であり, $f^{(n)}(x)$ が連続であるとき, $f(x)$ は n 回連続微分可能, または C^n 級であるという.
 - 関数 $f(x)$ が何回でも微分可能であるとき, $f(x)$ は無限回微分可能, または C^∞ 級であるという.
-
- 実際の計算に現れる関数は C^∞ 級であることが多いので, あまり神経質になる必要はない.
 - 一方で, $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ は微分可能であるが, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ は原点 0 で連続でないため, 1回連続微分可能ではない.
 - 原点 0 以外では無限回微分可能である.

高次導関数(例)

例8.8

- 4次多項式関数

$$f(x) = 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 7x - 5$$

に対して

$$f'(x) = 16x^3 + 18x^2 - 6x + 7$$

$$f^{(2)}(x) = 48x^2 + 36x - 6$$

$$f^{(3)}(x) = 96x + 36$$

$$f^{(4)}(x) = 96$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

高次導関数(問題)

問題8.9

- 次の関数の高次導関数を計算せよ.

1. $\sin x$

2. x^n

多項式と高次導関数

定理8.10

- n 次多項式関数 $f(x)$ に関して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \end{aligned}$$

- ただし, $0! = 1$ である.
- つまり, 多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ に関して, x^k の係数は

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

として計算できる.

定理8.10の証明

- 多項式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \dots$ に関して

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 \dots$$

$$f^{(2)}(x) = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3x + 4 \cdot 3a_4x^2 + 5 \cdot 4a_5x^3 \dots$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2a_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2a_4x + 5 \cdot 4 \cdot 3a_5x^2 + \dots$$

$$\dots = \dots$$

$$f^{(k)}(x) = k! a_k + (k+1) \dots 2a_{k+1}x + (k+2) \dots 3a_{k+2}x^2 + \dots$$

であるから

$$f^{(k)}(0) = k! a_k$$

多項式と高次導関数

- 同様の議論で次も示すことができる.

定理8.11

- n 次多項式関数 $f(x)$ に関して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \end{aligned}$$

多項式と高次導関数(例)

例8.12

- $f(x) = 4x^4 + 6x^3 - 3x^2 + 7x - 5$ に関して

$$f'(x) = 16x^3 + 18x^2 - 6x + 7 \qquad f^{(2)}(x) = 48x^2 + 36x - 6$$

$$f^{(3)}(x) = 96x + 36 \qquad f^{(4)}(x) = 96$$

- これより, 次のどちらも $f(x)$ に一致する.

$$\begin{aligned} f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\ = -5 + 7x + \frac{-6}{2}x^2 + \frac{36}{6}x^3 + \frac{96}{24}x^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f^{(3)}(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \\ = 9 + 35(x-1) + \frac{78}{2}(x-1)^2 + \frac{132}{6}(x-1)^3 + \frac{96}{24}(x-1)^4 \end{aligned}$$

多項式と高次導関数(問題)

問題8.13

- 定理8.11を, 関数 $f(x) = 3x^2 - x + 5$ と $a = 0, \pm 1$ に関して確認せよ.
- つまり

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!}x^2$$

$$f(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f^{(2)}(1)}{2!}(x-1)^2$$

$$f(x) = f(-1) + f'(-1)(x+1) + \frac{f^{(2)}(-1)}{2!}(x+1)^2$$

が成り立つことを確認せよ.

平均値の定理(再訪)

- 平均値の定理を思い出す.

定理8.2(平均値の定理)

- 微分可能な関数 $f(x)$ の定義域に $[a, b]$ が含まれるとき

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する.

- 上記の式は, 次と同値である.

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a) \quad (c \in (a, x))$$

- 高次導関数を用いて, 平均値の定理はテイラーの定理に一般化される.

テイラーの定理

定理8.14(テイラーの定理)

- 开区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき, 任意の $a \in I$ に対して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n \end{aligned}$$

を満たす $c \in (a, x)$ が存在する. ($a < x$ の場合)

- 上記の表示を有限テイラー展開という. 証明は次回.

マクローリンの定理

- 特に $a = 0$ の場合にはマクローリンの定理と呼ばれる.

定理8.15(マクローリンの定理)

- 0 を含む开区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \end{aligned}$$

を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する. ($0 < x$ の場合)

- 上記の表示を有限マクローリン展開という.

テイラーの定理(意味)

- テイラーの定理における

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

はそれぞれ $(n-1$ 次の) **テイラー多項式** と **剰余項** と呼ばれる.

- 微分の観点からは, $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ は似ている.

$$f(a) = P_{n-1}(a), f'(a) = P'_{n-1}(a), \dots, f^{(n-1)}(a) = P_{n-1}^{(n-1)}(a)$$

実際, $f(x)$ が n 次多項式であれば, $f(x) = P_n(x)$ であった.

- テイラーの定理は $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ の誤差を $f(x)$ の n 次微分係数を用いて評価できることを主張している.

有限マクローリン展開(例)

例8.16

- $f(x) = e^x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = e^x$$

であるから

$$f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = e^0 = 1$$

したがって

$$e^x = P_5(x) + R_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!} x^6$$

- これを使って, $f(1) = e$ の近似値を求めると

$$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2.71666 \dots$$

であるが, マクローリンの定理より誤差は

$$|e - P_5(1)| = \frac{e^{\theta}}{6!} < \frac{e}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} = 0.004166 \dots$$

昇ベキと降ベキ

定義8.17

- 多項式を書くとき, 通常は次数が高い方から書く方が多い. 例えば

$$5x^3 - x^2 + 5x - 10$$

このような表示を**降ベキ**の順という.

- 一方で, (有限)マクローリン展開などを議論するときは, 次数が低い方から書くことが多い. 例えば

$$-10 + 5x - x^2 + 5x^3$$

このような表示を**昇ベキ**の順という.

- x が一般の場合には降ベキ, x が十分小さい場合には昇ベキを使うことが多い.

有限マクローリン展開(例)

例8.18

- $f(x) = \sin x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \cos x, f^{(2)}(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$$

を周期4で繰り返すことから

$$f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = 1, f^{(4n+2)}(0) = 0, f^{(4n+3)}(0) = -1$$

- したがって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + R_7(x)$$

- ここで

$$R_7(x) = -\frac{\cos(\theta x)}{7!} x^7$$

ただし $P_5(x) = P_6(x)$ に注意すること.

有限マクローリン展開(問題)

問題8.19

- $f(x) = \cos x$ の有限マクローリン展開を求めなさい.

$$\cos x = P_6(x) + R_7(x)$$

$$P_6(x) = \dots$$

- $P_6(x)$ と $R_7(x)$ を具体的に求めなさい.

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k}_{P_{n-1}(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n}_{R_n(x)}$$

まとめ

1. ロルの定理

- 平均値の定理
- コーシーの平均値の定理
- ロピタルの定理

2. 高次導関数

- テイラーの定理・マクローリンの定理
- 有限テイラー展開・有限マクローリン展開