

微分・積分

第9回「高次微分と多項式近似2」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

- 前回に引き続いてテイラーの定理に関する話題を議論する.
1. テイラーの定理の証明
 2. テイラー展開, 解析的関数
 3. 応用, オイラーの公式

関数の多項式近似

- 微分とは、関数を1次多項式(関数)で近似した様子を記述するもので、導関数の情報から関数の増減の解析が可能になった.
- 導関数がさらに微分可能ならば、2回微分することにより凹凸を知ることができた. これは関数を2次多項式で近似することに相当する.
- 関数がさらに微分可能な場合には、3回微分、4回微分、... を考えることにより、与えられた関数の3次多項式、4次多項式、... での近似を考察することができる.
- 一般の関数(三角関数, 指数関数, 対数関数)などは難しいが、多項式関数は比較的簡単である.

テイラーの定理

定理9.1 (テイラーの定理)

- 开区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき, 任意の $a \in I$ に対して

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n \end{aligned}$$

を満たす $c \in (a, x)$ が存在する. ($a < x$ の場合)

- 上記の表示を **有限テイラー展開** という.

マクローリンの定理

- 特に $a = 0$ の場合にはマクローリンの定理と呼ばれる.

定理9.2(マクローリンの定理)

- 0 を含む開区間 I で定義された関数 $f(x)$ が n 回微分可能であるとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \\ &= f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!} x^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!} x^n \end{aligned}$$

を満たす $\theta \in (0,1)$ が存在する. ($0 < x$ の場合)

- 上記の表示を有限マクローリン展開という.

テイラーの定理(意味)

- テイラーの定理における

$$P_{n-1}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

はそれぞれ $(n-1$ 次の) **テイラー多項式** と **剰余項** と呼ばれる.

- 微分の観点からは, $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ は似ている.

$$f(a) = P_{n-1}(a), f'(a) = P'_{n-1}(a), \dots, f^{(n-1)}(a) = P_{n-1}^{(n-1)}(a)$$

実際, $f(x)$ が n 次多項式であれば, $f(x) = P_n(x)$ であった.

- テイラーの定理は $f(x)$ と $P_{n-1}(x)$ の誤差を $f(x)$ の n 次微分係数を用いて評価できることを主張している.

有限マクローリン展開(例)

例9.3

- $f(x) = e^x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = f^{(2)}(x) = f^{(3)}(x) = f^{(4)}(x) = e^x$$

であるから

$$f'(0) = f^{(2)}(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = e^0 = 1$$

したがって

$$e^x = P_5(x) + R_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{e^{\theta x}}{6!} x^6$$

- これを使って, $f(1) = e$ の近似値を求めると

$$P_5(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2.71666 \dots$$

であるが, マクローリンの定理より誤差は

$$|e - P_5(1)| = \frac{e^{\theta}}{6!} < \frac{e}{6!} < \frac{3}{6!} = \frac{1}{240} = 0.004166 \dots$$

コーシーの平均値の定理

- コーシーの平均値の定理を用いて、テイラーの定理を証明する.

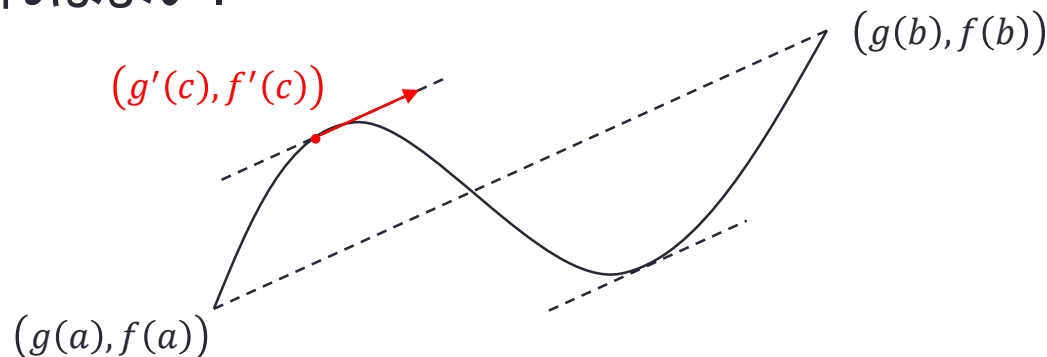
定理9.4(コーシーの平均値の定理)

- 微分可能な関数 $f(x), g(x)$ の定義域に $[a, b]$ が含まれ, $x \in (a, b)$ において $g'(x) \neq 0$ であり, $g(b) - g(a) \neq 0$ であれば

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる $c \in (a, b)$ が存在する.

- 直感的には, 媒介変数 $t \in [a, b]$ を用いて $(x, y) = (g(t), f(t))$ の軌跡を考えればよい.



テイラーの定理(証明)

- 関数

$$\begin{aligned}
 F(x) &= f(x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\
 &= f(x) - \left\{ f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 \right. \\
 &\quad \left. + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \right\}
 \end{aligned}$$

を考え, これが剰余項 $\frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$ ($a < c < x$) の形に書けることを示す.

- 簡単な計算で次のことが分かる.

- $F(a) = F'(a) = F''(a) = \cdots = F^{(n-1)}(a) = 0$
- $F^{(n)}(x) = f^{(n)}(x)$

テイラーの定理(証明)

- $F(x)$ と $G(x) = (x - a)^n$ に対して, コーシーの平均値の定理を使うと

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)}$$

となる $a < x_1 < x$ が存在する.

- $F'(x)$ と $G'(x) = n(x - a)^{n-1}$ に対して, コーシーの平均値の定理を使うと

$$\frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F'(x_1) - F'(a)}{G'(x_1) - G'(a)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)}$$

となる $a < x_2 < x_1$ が存在する.

- これを繰り返す.

テイラーの定理(証明)

- まとめると

$$\frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(x_1)}{G'(x_1)} = \frac{F''(x_2)}{G''(x_2)} = \cdots = \frac{F^{(n-1)}(x_{n-1})}{G^{(n-1)}(x_{n-1})} = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)}$$

となる $a < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_1 < x$ が存在する.

- これにより

$$\frac{F(x)}{(x-a)^n} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n)}(x_n)}{G^{(n)}(x_n)} = \frac{f^{(n)}(x_n)}{n!}$$

なので, $c = x_n$ として

$$F(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

が示された. (QED)

テイラー展開

- C^∞ 級の関数 $f(x)$ に関して, 剰余項

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x - a)^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成立すれば, $f(x)$ はベキ級数展開 (単項式の無限和として表現)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

としての表現を持つ.

- 剰余項 $R_n(x)$ に関する条件は, x が a に十分近いときに満たされることが多いが, この講義では深入りしない. (収束半径の議論が必要.)

テイラー展開

定義9.5

- C^∞ 級の関数 $f(x)$ に関して, 剰余項が $R_n(x) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) となる
とき

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!} (x-a)^3 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

- この表示を $f(x)$ の **テイラー展開** と呼ぶ.
- 特に $a = 0$ のときは, **マクローリン展開** と呼ばれる.

マクローリン展開(例)

例9.6

- $f(x) = e^x$ に関して, $f^{(n)}(x) = e^x$ であるから, 有限マクローリン展開は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n$$

ただし $0 < \theta < 1$.

- 任意の x に対して

$$\frac{e^{\theta x}}{n!} x^n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから, $f(x) = e^x$ のマクローリン展開は

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

- 簡単のため, $0 < x$ としたが, $x < 0$ でも成り立つ.

マクローリン展開(例)

例9.7

- $f(x) = \sin x$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \cos x, f^{(2)}(x) = -\sin x, f^{(3)}(x) = -\cos x, f^{(4)}(x) = \sin x$$

を周期4で繰り返すことから

$$f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = 1, f^{(4n+2)}(0) = 0, f^{(4n+3)}(0) = -1$$

- したがって

$$\sin x = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + R = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1} + R$$

- ただし, 剰余項 R は R_{2n} または R_{2n+1} であり, ある $0 < \theta < 1$ に関して

$$R_{2n} = \frac{(-1)^n \sin(\theta x)}{(2n)!} x^{2n} \quad R_{2n+1} = \frac{(-1)^n \cos(\theta x)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

いずれの場合も $|R_N| \leq \frac{x^N}{N!} \rightarrow 0$ ($N \rightarrow \infty$) であるから, $f(x) = \sin x$ のマクローリン展開は

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

マクローリン展開(例)

例9.8

- $f(x) = \cos x$ の有限マクローリン展開も同様に求めることができる.

$$f'(x) = -\sin x, f^{(2)}(x) = -\cos x, f^{(3)}(x) = \sin x, f^{(4)}(x) = \cos x$$

を周期4で繰り返すことから

$$f^{(4n)}(0) = 1, f^{(4n+1)}(0) = 0, f^{(4n+2)}(0) = -1, f^{(4n+3)}(0) = 0$$

- したがって

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

- これらのマクローリン展開からも, $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$ が成り立っていることが分かる. (個別微分)

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

三角関数と弧度法

- 解析学において、三角関数を弧度法で考えることは重要である.
- 実際、度数法の世界では三角関数の基本的な公式は複雑になる ($1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$).

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\pi}{180}$$

$$2. (\sin x)' = \frac{\pi}{180} \cos x, (\cos x)' = -\frac{\pi}{180} \sin x$$

$$3. \sin x = \frac{\pi}{180} x - \frac{\pi^3}{180^3} \frac{x^3}{3!} + \frac{\pi^5}{180^5} \frac{x^5}{5!} - \dots$$

- 弧度法では形式的にラジアンという単位を使うが、実際は円の半径と弧の比であるから(長さの単位に依存しない)無次元量である.
- 本来、数は無次元量であり、それゆえ $x + x^3$ のような計算が意味を持つのである.

マクローリン展開(例)

例9.9

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, f^{(3)}(x) = \frac{3 \cdot 2}{(1-x)^4}, \dots$$

であり, 一般に $f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$ であるから, $0 < \theta < 1$ が存在し

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} + \frac{1}{(1-\theta x)^{n+1}} x^n$$

- $0 \leq x < \frac{1}{2}$ であれば

$$\frac{|x|^n}{|1-\theta x|^{n+1}} \leq \frac{|x|^n}{|1-|x||^{n+1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから, $\frac{1}{1-x}$ のマクローリン展開は

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

- 実際には, $-1 < x < 1$ においてマクローリン展開が成立する. (等比数列の和と思えばよい.)

マクローリン展開(例)

例9.10

- $f(x) = \log(1+x)$ の有限マクローリン展開を求める.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}, f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \dots$$

であり, 一般に $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}$ であるから, $0 < \theta < 1$ が存在し

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+\theta x)^n} x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n-1}}{n-1} + \frac{(-1)^{n+1}}{n(1+\theta x)^n} x^n$$

- $0 \leq x \leq 1$ であれば

$$\frac{|(-1)^{n+1}x^n|}{|n(1+\theta x)^n|} \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから, $\log(1+x)$ のマクローリン展開は

$$\log(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots$$

- 実際は, $-1 < x < 1$ においてマクローリン展開が成立する.

解析関数

定義9.11

- C^∞ 級関数 $f(x)$ が a の近傍で, テイラー展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k$$

されるとき, $f(x)$ は a で解析的と呼ばれる.

- 定義域の任意の点で解析的な関数を解析的関数という.

解析的でない C^∞ 関数

例9.12

- C^∞ 関数であっても、解析的でない関数は存在する.
- 例えば

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は、原点 0 において解析的ではない.

- 実際

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow +0)$$

といった計算から、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $f^{(n)}(0) = 0$ が成り立っている.

- もし、 $f(x)$ がマクローリン展開可能だとすると、 $f(x) = 0$ となって矛盾する.

近似値の計算(応用)

問題9.13

- $\sin x$ のマクローリン展開

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

を用いて, $\sin 1$ の近似値を求めなさい.

- 実際の値, $\sin 1 = 0.841470 \dots$ と比べなさい.

$$1 - \frac{1}{3!} =$$

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} =$$

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} =$$

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} =$$

極限の計算(応用)

問題9.15

- マクローリン展開を使って、次の極限を求めなさい.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \cdots}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} =$$

オイラーの公式(発展)

- 指数関数と三角関数は一見無関係のように思えるが、テイラー展開を考えると類似性が浮かびあがってくる.

$$\begin{aligned}
 e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \\
 \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \\
 \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots
 \end{aligned}$$

- $i^2 = -1$ なる虚数 i を考えて、指数関数のテイラー展開において、 x を ix に置き換えると

$$\begin{aligned}
 e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots \\
 &= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) \\
 &= \cos x + i \sin x
 \end{aligned}$$

- e^{ix} が何を意味するかを理解するには、複素関数論を勉強する必要がある.

オイラーの公式(発展)

レオンハルト・オイラー
1707年4月15日～1783年9月18日



定理9.16(オイラーの公式)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

- 特に $x = \pi$ として

$$e^{i\pi} = -1$$

は美しい数式として有名である.

- $e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$ から

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

となり, これは双曲線関数の定義と似ている.

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

arctan のマクローリン展開(発展)

定理9.17

- $\arctan x$ のマクローリン展開

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1} + \cdots$$

- $(\arctan x)^{(n)}$ を求めてマクローリン展開を求めるのは少し難しい.

定理9.18

- $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ なので, 次の公式を得ることができる.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots$$

- これを使って π を求めるのは, 収束が遅くかなり大変.

定理9.19(マチンの公式)

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

発展: arctan の高次微分(1)

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arctan x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$(\arctan x)^{(3)} = \left(\frac{-2x}{(1+x^2)^2} \right)' = \frac{-2(1+x^2)^2 + 8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3}$$

$$(\arctan x)^{(4)} = \left(\frac{-2+6x^2}{(1+x^2)^3} \right)' = \dots$$

- かなり大変

発展: arctan の高次微分(2)

- 積の微分の一般形は $(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$ となる.
- $f(x) = \arctan x$ とおくと $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ なので $f'(x)(1+x^2) = 1$ これを n 回微分する.

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2nx f^{(n)}(x) + n(n-1)f^{(n-1)}(x) = 0$$

- $1+x^2$ は3回以上微分すると 0 なので先頭の3つだけになる.
- $x=0$ とすると $f^{(n+1)}(0) + n(n-1)f^{(n-1)}(0) = 0$ となり,
- $f'(0) = 1, f''(0) = 0$ より

$$f^{(2n)}(0) = 0 \quad f^{(2n-1)}(0) = (-1)^{n-1}(2n-2)!$$

- arctan のマクローリン展開は

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0) \frac{x^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n-2)! \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$$

まとめ

1. テイラーの定理の証明
2. テイラー展開, 解析的関数
3. 応用, オイラーの公式
4. マチンの公式