

# 微分・積分

# 第10回「多変数関数の微分」

---

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slides/>

# 今日の内容

1. 二変数関数, 極限, 連続性
2. 偏微分, 高次偏微分関数, 全微分
3. 接平面, 極値問題, ヘッセ行列式

# 二変数関数

- これまででは一変数関数を議論してきたが、今回は二変数関数を考える。

## 定義10.1

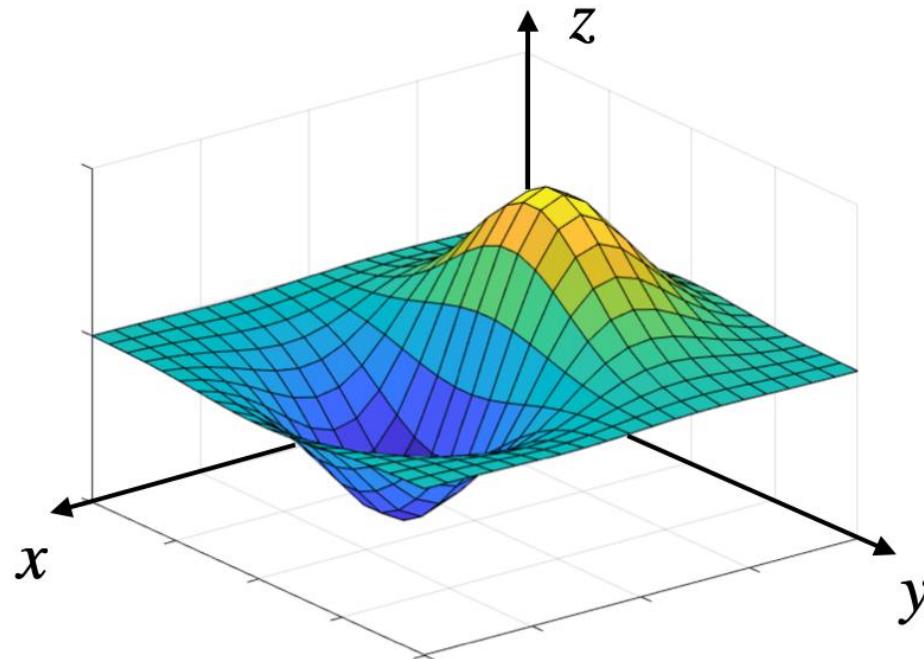
- 部分集合  $D \subset \mathbb{R}^2$  に対して、写像  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  を**二変数関数**という。
- $x, y$  を  $\mathbb{R}^2$  の標準的な座標として、 $f(x, y)$  などと書かれる場合が多い。

- $f(x, y) = 2x^3 - xy^2 + y^2 + 3$ 
  - 定義域は  $\mathbb{R}^2$
- $g(x, y) = \sqrt{5 - 2x^2 - y^2}$ 
  - 定義域は楕円版  $\{(x, y) | 2x^2 + y^2 \leq 5\}$

# 二変数関数のグラフ

## 定義10.2

- $xyz$ -空間  $\mathbb{R}^3$  上の点  $(x, y, f(x, y))$  を考えることで、関数  $f(x, y)$  を可視化できる。
- 集合  $\{(x, y, f(x, y)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^3$  を関数  $f(x, y)$  の**グラフ**という。



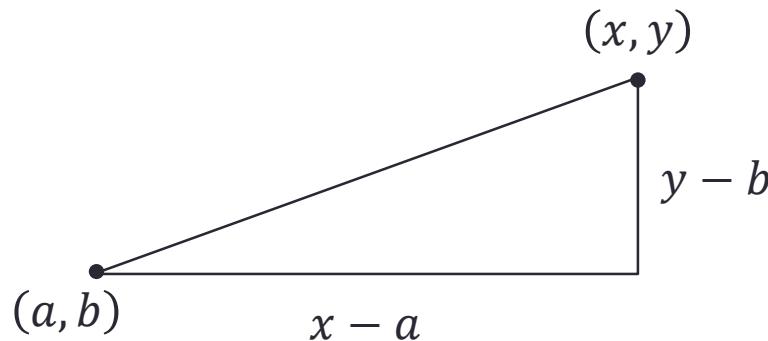
# 距離

- ・極限を定義するために、まず2点間の距離を定義する。

## 定義10.3

- ・ $\mathbb{R}^2$  上の2点  $(x, y)$  と  $(a, b)$  の距離を次で定義する。

$$d((x, y), (a, b)) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$



- ・上記のような距離の定義をユークリッド距離という。

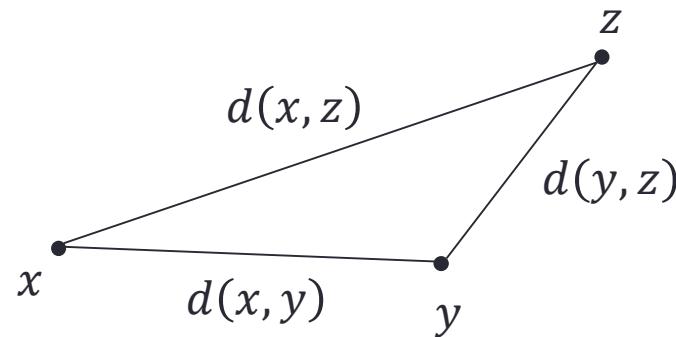
# 距離空間

## 定義10.4

- $X$  を空でない集合とする. 関数  $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  が以下の性質を持つとき,  $d$  を**距離関数**という.

1.  $d(x, y) \geq 0$
2.  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3.  $d(x, y) = d(y, x)$
4.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (三角不等式)

- このとき,  $(X, d)$  は**距離空間** (metric space) であるという.



- ユークリッド距離は上記の距離関数の定義を満たしている.

# 極限

## 定義10.5

- $(x, y) \rightarrow (a, b)$  を  $d((x, y), (a, b)) \rightarrow 0$  として定義する.
- $(x, y) \rightarrow (a, b)$  となるとき
  - $f(x, y) \rightarrow \alpha \in \mathbb{R}$  であることを

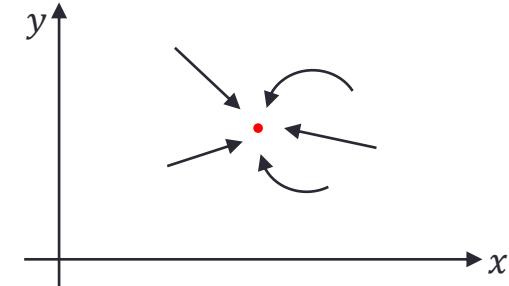
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = \alpha$$

- $f(x, y)$  の値がいくらでも大きく(小さく)なることを

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = +\infty \quad (-\infty)$$

と書く。

- 一変数関数に関しては、右極限と左極限が一致すれば極限が存在した。数直線上のある点への近づき方は本質的に2通りしかないからである。
- 一方で2次元では点への近づき方の自由度は無限であり、どのような近づき方に関しても関数が同じ値に近づく場合に限り極限が存在することをこの定義は意味している。



# 極限が存在しない例

## 例10.6

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  で定義された関数  $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  を考える。

1.  $y = 0$  を満たしながら  $(x, y)$  が  $(0, 0)$  に近づく極限は

$$\lim_{(x,0) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

2.  $x = 0$  を満たしながら  $(x, y)$  が  $(0, 0)$  に近づく極限は

$$\lim_{(0,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^2}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} -1 = -1$$

- これにより、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$  は存在しない。

# 極限が存在する例

## 例10.7

- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$  で定義された関数  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$ について,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$  を考察する.
- 極座標  $(r, \theta)$  と呼ばれる

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta$$

なる変数変換を考えると

$$f(x, y) = \frac{(r \cos \theta)^2 r \sin \theta}{(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} = r \cos^2 \theta \sin \theta$$

- $\sqrt{x^2 + y^2} = r$  に注意すると,  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |f(x, y)| \leq \lim_{r \rightarrow 0} r = 0$  であるから

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

# 連續性

## 定義10.8

- 二変数関数  $f(x, y)$  がその定義域の点  $(a, b)$  で連続であるとは

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b)$$

が成立すること。つまり左辺の極限が存在し、それが  $f(a, b)$  と一致すること。

- 定義域の任意の点で連続な関数を連続関数という。
  - 一変数関数の場合と同様に、二変数関数も四則演算により連續性は保たれる。例えば、 $f(x, y), g(x, y)$  が  $(a, b)$  で連続であれば、
- $$\alpha f(x, y) + \beta g(x, y) \quad f(x, y)g(x, y) \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$
- も  $(a, b)$  で連続である。
- 特に変数  $x, y$  についての多項式関数、有理式関数は連続関数である。
  - また、連続関数は合成によっても保たれ、これらと指数関数、対数関数、三角関数、逆三角関数等を合成した関数も、その定義域において連続関数となる。

# 偏微分

- 二変数関数は1つの変数以外を定数とみなして微分を考えることができる。

## 定義10.9

- 二変数関数  $f(x, y)$  の変数  $y$  を定数  $b$  として,  $x$  のみを変数とする一変数関数  $f(x, b)$  が  $x = a$  で微分可能なとき, つまり極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

が存在するとき,  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  において  $x$  に関して偏微分可能であるという。

- この極限を  $f_x(a, b)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$  などと書き,  $f(x, y)$  の  $(a, b)$  における  $x$  に関する偏微分係数という。
- $y$  に関する偏微分可能性, 偏微分係数も同様に定める。

# 偏導関数

## 定義10.10

- 二変数関数  $f(x, y)$  が定義域の任意の点において  $x$  に関して偏微分可能であるとき,  $f(x, y)$  は  $x$  に関して偏微分可能であるという.
- このとき関数  $f_x(x, y)$  または  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$  を  $f(x, y)$  の  $x$  に関する**偏導関数**という.
- $x$  に関する偏導関数を求めることを  $x$  に関して**偏微分**するといふ.
- $y$  に関する偏導関数, 偏微分も同様に定める.

# 偏導関数(例)

## 例10.11

- 二変数関数  $f(x, y) = x^2y^3 + 4x - 5y + 6$  の偏導関数を求める。
  - $x$  を変数,  $y$  を定数とみなして,  $x$  に関する偏導関数を求める.

$$f_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} (x^2y^3 + 4x - 5y + 6) = 2xy^3 + 4$$

- $x$  を定数,  $y$  を変数とみなして,  $x$  に関する偏導関数を求める.

$$f_y(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} (x^2y^3 + 4x - 5y + 6) = 3x^2y^2 - 5$$

## 問題10.12

- $f(x, y) = xy^2 + \sin x + \cos y$  の偏導関数を求める.

# 偏導関数

- 一変数関数は微分可能であれば連続であったが、偏微分可能な二変数関数は連続とは限らない。
- 例えば、 $\mathbb{R}^2$  で定義された

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

を考える。

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

であるが、 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \frac{1}{2} \neq f(0, 0)$ 。

# 高次偏導関数

## 定義10.13

- 二変数関数  $f(x, y)$  の偏導関数  $f_x(x, y)$  と  $f_y(x, y)$  がさらに  $x$  と  $y$  で偏微分可能であるとき、その偏導関数を  $f(x, y)$  の**2次偏導関数**という。このとき  $f(x, y)$  は2回偏微分可能であるという。

1.  $f_x(x, y)$  の  $x$  に関する偏導関数を

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

2.  $f_x(x, y)$  の  $y$  に関する偏導関数を

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

などと表す。 $f_y(x, y)$  の偏微分も同様である。

# 高次偏微分関数

- $f(x, y)$  の  $k$  回偏微分可能性や  $k$  次偏導関数も同様に定義される.
- $k$  次偏導関数は  $2^k$  通り考えられるが、次の定理により、多くの高次偏導関数は偏微分の順序に依存しない.

## 定理10.14

- $f_{xy}(x, y)$  と  $f_{yx}(x, y)$  が存在し、連続であるとき

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) .$$

- $f(x, y)$  が  $k$  回偏微分可能で、 $k$  次までのすべての偏導関数が連続となるとき、 $f(x, y)$  は  $k$  回連續微分可能、または  $C^k$  級であるという.
- 無限回連續微分可能、 $C^\infty$  級も同様に定義される.

# 高次偏導関数

例10.15

- $f(x, y) = xy^2 + \sin x + \cos y$  の2次偏導関数を求める.

1.  $f_x(x, y) = y^2 + \cos x$

$$f_{xx}(x, y) = -\sin x \quad f_{xy}(x, y) = 2y$$

2.  $f_y(x, y) = 2xy - \sin y$

$$f_{yx}(x, y) = 2y \quad f_{yy}(x, y) = 2x - \cos y$$

# 高次偏導関数(問題)

## 問題10.16

- 次の関数の2次偏導関数を求めよ.

1.  $2x^3 - 3x^2y - 4xy^2 + 5y^4$

2.  $\frac{x}{y}$

3.  $x \log y$

4.  $x \cos(x + y)$

# 全微分

- 偏微分は一変数関数の微分を用いて簡単に定義することができるが、極限の取り方が限られているため、不都合なことが多い。
- そこで一変数関数の微分を全微分と呼ばれる概念へ一般化する。

## 定義10.17

- 二変数関数  $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で全微分可能であるとは、ある  $A, B \in \mathbb{R}$  が存在して

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(a+h, b+k) - f(a, b) - A h - B k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0$$

が成立すること。

- $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で全微分可能であるとき、 $(a, b)$  で連続かつ偏微分可能であり

$$A = f_x(a, b)$$

$$B = f_y(a, b)$$

# 全微分

- 一変数関数に関しては、微分可能性は一次式で近似できる（接線が存在する）と同値であった。
- 二変数関数に関しては、 $x, y$  で偏微分可能であっても一次式で近似できる（接平面が存在する）とは限らない。
- 二変数関数  $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で全微分可能であれば、そのグラフが接平面を与える一次式

$$z = f(a, b) + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b)$$

で  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  の近傍で近似される。

# 全微分可能性

## 定理10.18

- $f(x, y)$  が  $C^1$  級(各成分について偏微分可能, かつ偏導関数が連続)であれば, 全微分可能である.

- 例えば,  $\mathbb{R}^2$  で定義された

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} & ((x, y) \neq (0, 0)) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0)) \end{cases}$$

は原点において全微分可能である(偏微分可能であるが, 偏導関数は連続でない).

- 実際の計算に現れる関数は  $C^\infty$  級であることが多いので, あまり神経質になる必要はない.

# 接平面

## 例10.19

- 二変数関数  $f(x, y) = x^2 + 3y^2$  のグラフの点  $(1, 2, 13)$  における接平面を求める。

$$f_x(x, y) = 2x \quad f_y(x, y) = 6y$$

より,  $f(x, y)$  は  $C^1$  級であるから, 接平面の方程式は

$$z = 13 + 2(x - 1) + 12(y - 2)$$

で与えられる。

- 整理すれば

$$z = 2x + 12y - 13$$

# 極値と停留点

- 以下では、二変数関数  $f(x, y)$  は  $C^2$  級であるとする。
- $f(x, y)$  の**停留点**とは、 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$  を満たす  $(a, b)$  をいう。

## 定理10.20

- 関数  $f(x, y)$  が  $(a, b)$  で極値(極大値または極小値)を取るとき、 $(a, b)$  は停留点となる。
- この定理は、一変数関数  $f(x, b)$  と  $f(a, y)$  が  $(a, b)$  で極値を取ることから分かる。
- 停留点は極値とは限らない。
- 例えば、**鞍点**<sup>あんてん</sup>と呼ばれる、ある方向から見ると極大値、別の方向から見ると極小値となる停留点も存在する。

# 極値問題の主定理

## 定理10.21

- 関数  $f(x, y)$  のヘッセ行列式(ヘッシアン)を

$$H(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$$

で定義する.

- 停留点  $(a, b)$  に関して

- $H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) > 0$  ならば  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で極小,
- $H(a, b) > 0, f_{xx}(a, b) < 0$  ならば  $f(x, y)$  は  $(a, b)$  で極大,
- $H(a, b) < 0$  ならば  $(a, b)$  は  $f(x, y)$  の鞍点.

- $H(a, b) > 0$  の下で、条件  $f_{xx}(a, b) \geq 0$  は条件  $f_{yy}(a, b) \geq 0$  と同値であることに注意する。

# 極値問題

## 例10.22

- 関数  $f(x, y) = x^2 + x^2y + y^2$  の極値を調べる.
- まず

$$f_x(x, y) = 2x + 2xy = 2x(1 + y) = 0 \quad f_y(x, y) = x^2 + 2y = 0$$

を解くことで、停留点は

$$(x, y) = (0, 0), (\pm\sqrt{2}, -1)$$

だと分かる.

- また、2次偏導関数は

$$f_{xx}(x, y) = 2(1 + y) \quad f_{xy}(x, y) = 2x \quad f_{yy}(x, y) = 2$$

であるから

$$H(x, y) = 2(1 + y) \cdot 2 - (2x)^2 = 4(1 + y - x^2)$$

- 点  $(0, 0)$  に関して

$$H(0, 0) = 4 > 0 \quad f_{xx}(0, 0) = 2$$

であるから、 $f(x, y)$  は  $f(0, 0) = 0$  において極小値である.

- 点  $(\pm\sqrt{2}, -1)$  に関して

$$H(\pm\sqrt{2}, 0) = -8 < 0$$

であるから、 $f(x, y)$  は  $(\pm\sqrt{2}, -1)$  において極値を取らない.

# 極値と停留点(発展)

## 発展10.23

- 二変数関数に関しても、テイラー展開を行うことが可能で  $C^2$  級関数  $f(x, y)$  は停留点  $(a, b)$  の近傍で次の形に近似される。(停留点という条件から、一次部分は消えている。)

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &\approx f(a, b) + \frac{1}{2} f_{xx}(a, b)(x - a)^2 \\
 &\quad + f_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + \frac{1}{2} f_{yy}(a, b)(y - b)^2 \\
 &= f(a, b) + \frac{1}{2} [x - a \quad y - b] \begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

- ヘッセ行列式  $H(a, b)$  は  $\begin{bmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{bmatrix}$  の行列式に他ならない。
- 定理10.21は対称2次形式の分類に関係する。

# まとめ

1. 二変数関数, 極限, 連續性
2. 偏微分, 高次偏導関数, 全微分
3. 接平面, 極値問題, ヘッセ行列式