

# 微分・積分

## 第11回「不定積分(1)」

---

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slides/>

# 今日の内容

1. 原始関数

2. 不定積分

3. 部分積分

# 原始関数

- 関数の微分に対する逆の演算を考える

## 定義11.1

- 関数  $f(x)$ ,  $F(x)$  が開区間  $I$  で定義され

$$F'(x) = f(x)$$

を満たすとき、関数  $F(x)$  を  $f(x)$  の**原始関数**という。

- $x^2$  と  $x^2 + 5$  は共に  $2x$  の原始関数である。
- $e^x$  と  $e^x + 3$  は共に  $e^x$  の原始関数である。
- $\sin x$  と  $\sin x - 2$  は共に  $\cos x$  の原始関数である。

# 原始関数の一意性

## 定理11.2

- 与えられた関数  $f(x)$  の原始関数は定数差を除いて一意的に決まる。
- 実際,  $F(x), G(x)$  を  $f(x)$  の原始関数とすれば

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

であり, 導関数が 0 となる関数は定数関数に限ることから, 原始関数は定数差を除いて一意的に決まることが分かる。

- 定数関数の導関数が 0 であることはすぐ分かるが, 逆は定義から自明ではない。
- 実際,  $H'(x) = 0$  とすれば, 平均値の定理より任意の  $a < b$  に対して  $c \in (a, b)$  が存在して

$$H(b) - H(a) = H'(c)(b - a) = 0$$

であるから,  $H(x)$  は定数関数である。

# 不定積分

## 定義11.3

- 関数  $f(x)$  の原始関数全体を**不定積分**と呼び、原始関数  $F(x)$  を用いて

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

と表す。

- $C$  は**積分定数**と呼ばれ、原始関数が定数差を除いて一意的に定まるることを表す。
- また、 $f(x)$  の不定積分を求めることを、**積分**するといい、 $f(x)$  は**被積分関数**と呼ばれる。

# 不定積分(例)

## 例11.4

- 不定積分は微分の逆であるから

$$1. \alpha \neq -1 \text{ に対して, } \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C$$

$$2. \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

などが成立する。

# 積分定数に関する注意

- 積分定数に関して注意しておく.
- 関数  $\frac{1}{x}$  の定義域は  $(-\infty, 0)$  と  $(0, \infty)$  の和集合であるから、厳密には定数  $C_1, C_2$  を用いて
  - $(x > 0): \int \frac{1}{x} dx = \log x + C_1$
  - $(x < 0): \int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + C_2$

と書かれるべきであるが、これを暗黙の了解として

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

と書く。（原始関数の差は局所定数関数というのが正しい。）

- 記号の簡略化のために、積分定数はしばしば省略される。
- この講義でも以下では省略する。

# 不定積分の性質

- ・和・差や定数倍の微分は、微分の和・差や定数倍となった。
- ・積分に関しても同様である。
- ・微分と積分のこの性質は線形性と呼ばれる。

## 定理11.5

- ・ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  に対して

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

- ・例えば、

$$\int (4x^3 - 5x) dx = 4 \int x^3 dx - 5 \int x dx = x^4 - \frac{5}{2}x^2$$

$$\int (\sin x - 2e^x) dx = \int \sin x dx - 2 \int e^x dx = -\cos x - 2e^x$$

# 不定積分(問題)

## 問題11.6

- 次の不定積分を計算せよ.
- $\int (4x^3 - 6x^2 + \sqrt{x} - 1)dx$
  - $\int (e^x - 3 \cos x) dx$

# 対数微分の公式から

- 対数微分の定理によると、微分可能な関数  $f(x)$  に対して

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

であった。

- これを積分の公式で書き換えると。

## 定理11.7

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)|$$

# $\tan x$ の積分

例11.8

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx = -\log|\cos x|$$

- 実際、

$$(-\log|\cos x|)' = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

# $\tan^2 x$ の積分

例11.9

$$\begin{aligned}
 \int \tan^2 x \, dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx \\
 &= \int \left( \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx - \int \, dx \\
 &= \tan x - x
 \end{aligned}$$

- 実際、

$$(\tan x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

# 部分積分の公式

- 微分と積分は互いに逆の演算であるから、微分に関する公式は積分の公式に書き直すことができる。

定理11.10(部分積分の公式)

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

- 実際、積の微分法より

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺を積分すると

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

# 部分積分の公式(例)

## 例11.11

- 部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

を用いて  $\int xe^x dx$  を計算する.

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)'e^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x \end{aligned}$$

- 実際,

$$(xe^x - e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

# 部分積分の公式(例)

例11.12

$$\begin{aligned}\int \log x \, dx &= \int (x)' \log x \, dx = x \log x - \int x (\log x)' \, dx \\ &= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x\end{aligned}$$

• 実際、

$$(x \log x - x)' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x$$

# 部分積分の公式(例)

例11.13

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, dx &= \int x(\sin x)' \, dx = x \sin x - \int (x)' \sin x \, dx \\&= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x\end{aligned}$$

• 実際、

$$(x \sin x + \cos x)' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

# 部分積分の公式(問題)

## 問題11.14

- 次の不定積分を計算せよ.

$$1. \int (3x + 1)e^x dx$$

$$2. \int x \log x \, dx$$

$$3. \int x^2 \sin x \, dx$$

$$4. \int x(\log x)^2 \, dx$$

$$5. \int e^x \cos x \, dx$$

$$6. \int \frac{\log x}{2\sqrt{x}} \, dx$$

# まとめ

1. 原始関数

2. 不定積分

3. 部分積分