

微分・積分 第11回「不定積分(1)」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

1. 原始関数
2. 不定積分
3. 部分積分

原始関数

- 関数の微分に対する逆の演算を考える

定義11.1

- 関数 $f(x)$, $F(x)$ が開区間 I で定義され

$$F'(x) = f(x)$$

を満たすとき, 関数 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**という.

- x^2 と $x^2 + 5$ は共に $2x$ の原始関数である.
- e^x と $e^x + 3$ は共に e^x の原始関数である.
- $\sin x$ と $\sin x - 2$ は共に $\cos x$ の原始関数である.

原始関数の一意性

定理11.2

- 与えられた関数 $f(x)$ の原始関数は定数差を除いて一意的に決まる.
- 実際, $F(x), G(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすれば

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

であり, 導関数が 0 となる関数は定数関数に限ることから, 原始関数は定数差を除いて一意的に決まることが分かる.

- 定数関数の導関数が 0 であることはすぐ分かるが, 逆は定義から自明ではない.
- 実際, $H'(x) = 0$ とすれば, 平均値の定理より任意の $a < b$ に関して $c \in (a, b)$ が存在して

$$H(b) - H(a) = H'(c)(b - a) = 0$$

であるから, $H(x)$ は定数関数である.

不定積分

定義11.3

- 関数 $f(x)$ の原始関数全体を**不定積分**と呼び, 原始関数 $F(x)$ を用いて

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

と表す.

- C は**積分定数**と呼ばれ, 原始関数が定数差を除いて一意的に定まることを表す.
- また, $f(x)$ の不定積分を求めることを, **積分**するといい, $f(x)$ は**被積分関数**と呼ばれる.

不定積分(例)

例11.4

- 不定積分は微分の逆であるから

1. $\alpha \neq -1$ に対して,
$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + C$$

2.
$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

3.
$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

4.
$$\int e^x dx = e^x + C$$

などが成立する.

積分定数に関する注意

- 積分定数に関して注意しておく.
- 関数 $\frac{1}{x}$ の定義域は $(-\infty, 0)$ と $(0, \infty)$ の和集合であるから, 厳密には定数 C_1, C_2 を用いて
 - $(x > 0): \int \frac{1}{x} dx = \log x + C_1$
 - $(x < 0): \int \frac{1}{x} dx = \log(-x) + C_2$と書かれるべきであるが, これを暗黙の了解として

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$$

と書く. (原始関数の差は局所定数関数というのが正しい.)

- 記号の簡略化のために, 積分定数はしばしば省略される.
- この講義でも以下では省略する.

不定積分の性質

- 和・差や定数倍の微分は、微分の和・差や定数倍となった.
- 積分に関しても同様である.
- 微分と積分のこの性質は線形性と呼ばれる.

定理11.5

- $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx$$

- 例えば,

$$\int (4x^3 - 5x) dx = 4 \int x^3 dx - 5 \int x dx = x^4 - \frac{5}{2}x^2$$

$$\int (\sin x - 2e^x) dx = \int \sin x dx - 2 \int e^x dx = -\cos x - 2e^x$$

不定積分(問題)

問題11.6

• 次の不定積分を計算せよ.

1. $\int (4x^3 - 6x^2 + \sqrt{x} - 1) dx$

2. $\int (e^x - 3 \cos x) dx$

対数微分の公式から

- 対数微分の定理によると、微分可能な関数 $f(x)$ に対して

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

であった.

- これを積分の公式で書き換えると.

定理11.7

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log|f(x)|$$

$\tan x$ の積分

例11.8

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx = -\log|\cos x|$$

• 実際,

$$(-\log|\cos x|)' = -\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

$\tan^2 x$ の積分

例11.9

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \, dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \, dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \, dx \\ &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) \, dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx - \int dx \\ &= \tan x - x\end{aligned}$$

• 実際,

$$(\tan x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$$

部分積分の公式

- 微分と積分は互いに逆の演算であるから、微分に関する公式は積分の公式に書き直すことができる.

定理11.10(部分積分の公式)

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

- 実際、積の微分法より

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

両辺を積分すると

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

部分積分の公式(例)

例11.11

- 部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

を用いて $\int xe^x dx$ を計算する.

$$\begin{aligned}\int xe^x dx &= \int x(e^x)' dx = xe^x - \int (x)'e^x dx \\ &= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x\end{aligned}$$

- 実際,

$$(xe^x - e^x)' = e^x + xe^x - e^x = xe^x$$

部分積分の公式(例)

例11.12

$$\begin{aligned}\int \log x \, dx &= \int (x)' \log x \, dx = x \log x - \int x (\log x)' \, dx \\ &= x \log x - \int 1 \, dx = x \log x - x\end{aligned}$$

- 実際,

$$(x \log x - x)' = \log x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log x$$

部分積分の公式(例)

例11.13

$$\begin{aligned}\int x \cos x \, dx &= \int x(\sin x)' \, dx = x \sin x - \int (x)' \sin x \, dx \\ &= x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x\end{aligned}$$

- 実際,

$$(x \sin x + \cos x)' = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x$$

部分積分の公式(問題)

問題11.14

• 次の不定積分を計算せよ.

1. $\int (3x + 1)e^x dx$

2. $\int x \log x \, dx$

3. $\int x^2 \sin x \, dx$

4. $\int x(\log x)^2 \, dx$

5. $\int e^x \cos x \, dx$

6. $\int \frac{\log x}{2\sqrt{x}} \, dx$

まとめ

1. 原始関数
2. 不定積分
3. 部分積分