

微分・積分

第13回「定積分」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slides/>

今日の内容

1. 面積

- 区分求積法
- リーマン積分
- 定積分

2. 微積分の基本定理

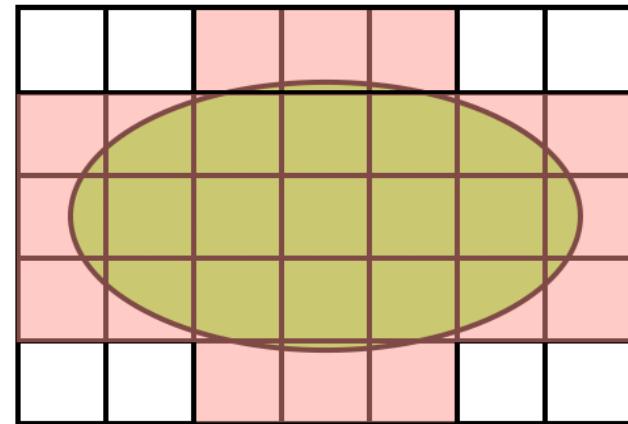
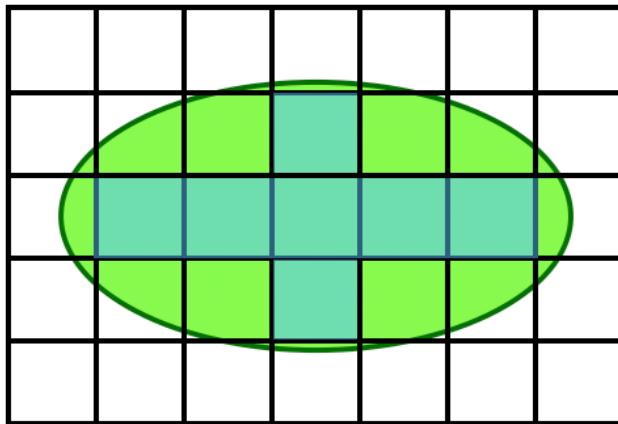
- 定積分の計算

面積

- 平面図形の面積
- 長方形の面積は「縦の長さ × 横の長さ」で定義することができるが、一般の図形の面積とは何であろうか？
- 一般の図形に対して、小さな長方形の集まりでその図形を近似した極限をもって面積を定義することを考える。
- この「長方形を面積の基礎とする」という観点からは、三角形の面積や円の面積の計算は自明ではない。

平面図形の正方形分割

- 下図の図形(橢円)の面積 S が存在したとして、面積 1 の正方形を用いて近似することを考える。

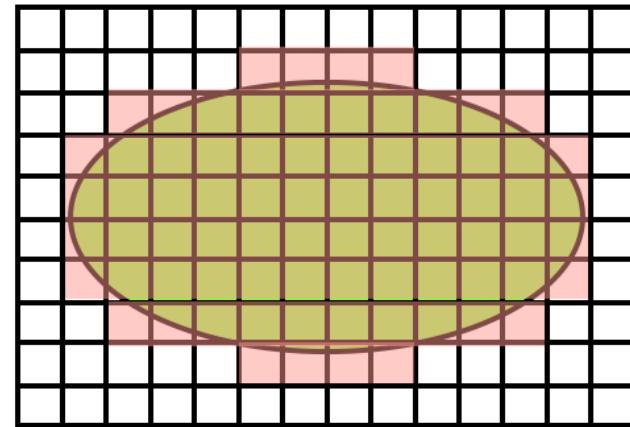
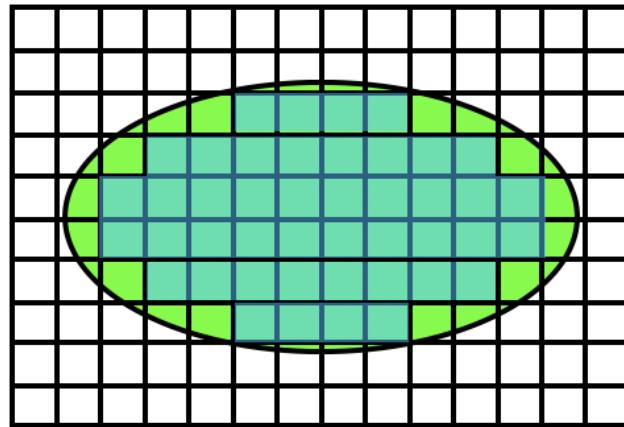


- 図形に含まれる正方形は7個、図形と共に通部分を持つ正方形は27個であるから

$$7 \leq S \leq 27$$

平面図形の正方形分割

- 正方形の一辺を半分にして、面積 $\frac{1}{4}$ の正方形を用いて近似することを考える。

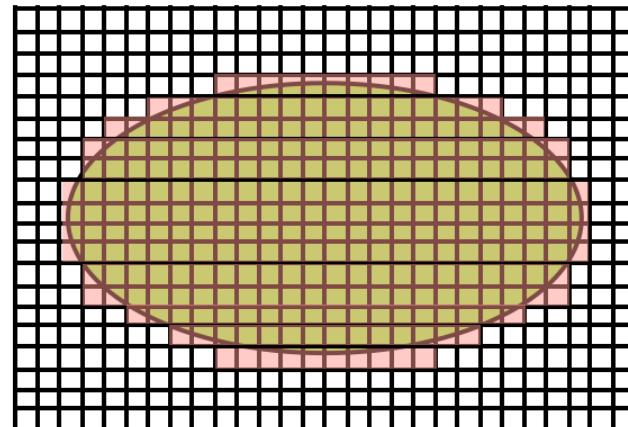
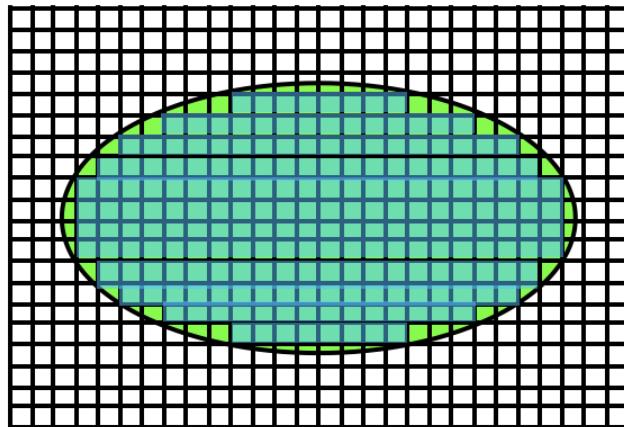


- 図形に含まれる正方形は44個、図形と共通部分を持つ正方形は76個であるから

$$11 \leq S \leq 19$$

平面図形の正方形分割

- 正方形の一辺をさらに半分にして、面積 $\frac{1}{16}$ の正方形を用いて近似することを考える。

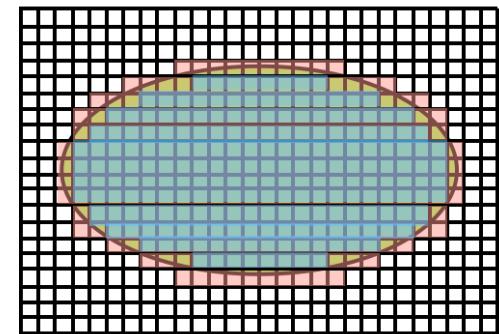
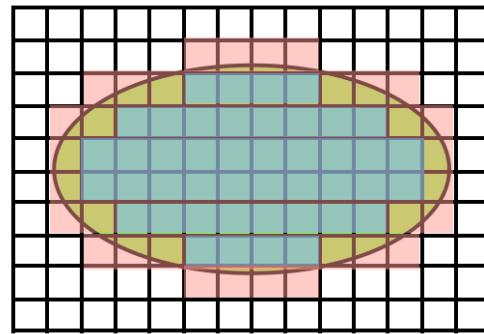
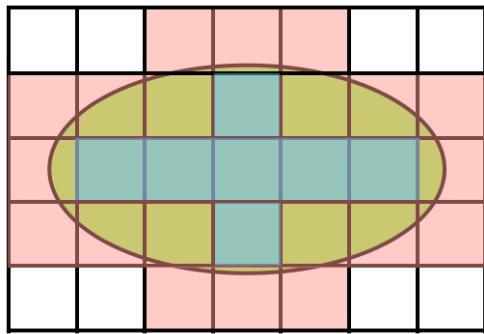


- 図形に含まれる正方形は208個、図形と共に通部分を持つ正方形は272個であるから

$$13 \leq S \leq 17$$

平面図形の正方形分割

- 面積が $\frac{1}{2^n}$ の正方形を用いて近似することを考える.



- 図形に含まれる正方形の面積の合計 s_n を内部面積, 図形と共に通部分を持つ正方形の面積の合計 S_n を外部面積という.
- 図形の面積が存在すれば

$$s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots \leq S \leq \cdots \leq S_3 \leq S_2 \leq S_1$$

- 正方形を小さくすることで, 内部と外部からの図形の面積の近似精度が上がると考えられる.

区分求積法

定義13.1

- 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ が存在し、両者が一致するとき、図形は面積確定、もしくはジョルダン可測と呼ばれ、その面積を

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

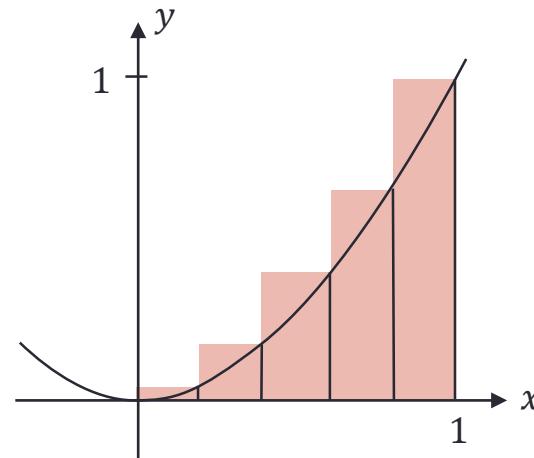
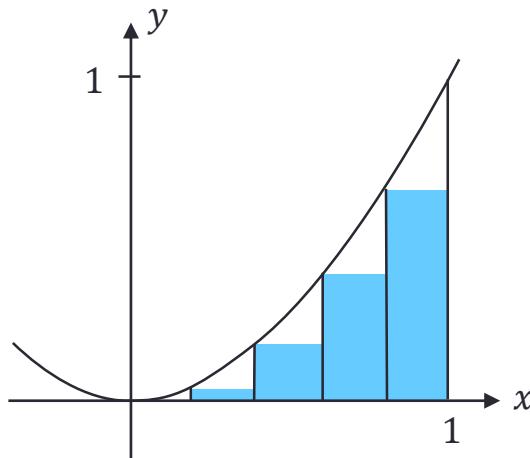
と定義する。

- 一般に、長方形を用いて面積を定義・計算する方法を区分求積法という。

- 面積確定でない図形も存在する。
- 実際、様々な測度（面積の定め方）が存在し、与えられた図形の面積が定義できるか否かは測度に依存する。
- この講義では、上記の意味での面積を考えることにする。

区分求積法

- 区分求積法を用いて, $f(x) = x^2$ のグラフ, x -軸, 直線 $x = 1$ に囲まれた領域の面積 S を求める.
- 区間 $[0,1]$ を n 等分して, 各小区間の幅を一边とする長方形を考える.

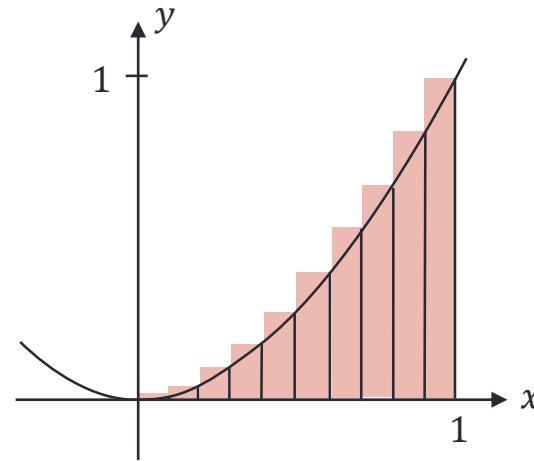
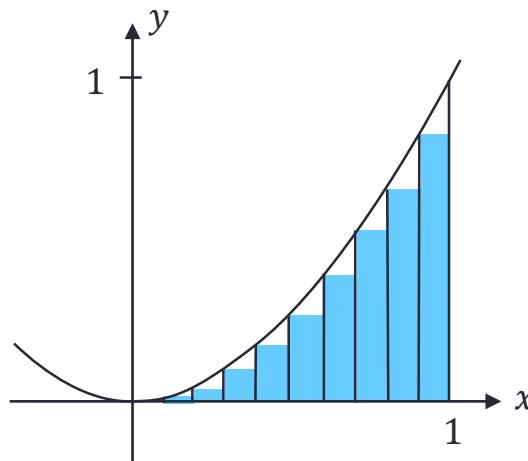


- $n = 5$ のとき

$$S_5 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^3} \sum_{k=1}^4 k^2 = \frac{6}{25}$$

$$S_5 = \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \cdot \left(\frac{5}{5}\right)^2 = \frac{1}{5^3} \sum_{k=1}^5 k^2 = \frac{11}{25}$$

区分求積法



- $n = 10$ のとき

$$s_{10} = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{2}{10}\right)^2 + \dots = \frac{1}{10^3} \sum_{k=1}^9 k^2 = \frac{57}{200}$$

$$S_{10} = \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{0}{10}\right)^2 + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \dots = \frac{1}{10^3} \sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{77}{200}$$

- $S_{10} - s_{10} = \frac{1}{10}$ に注意する。

区分求積法

- 一般に

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{k}{n} \right)^2 = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\
 &= \frac{1}{n^3} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right)
 \end{aligned}$$

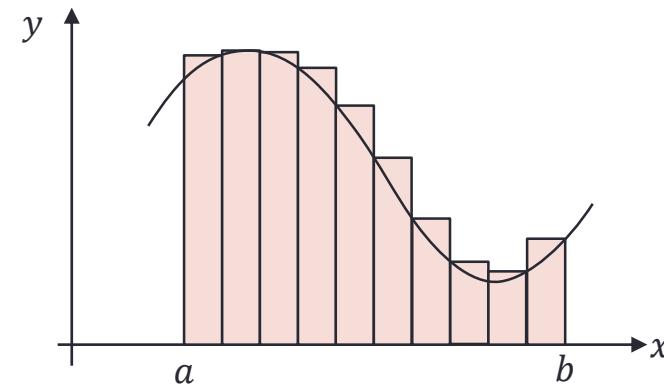
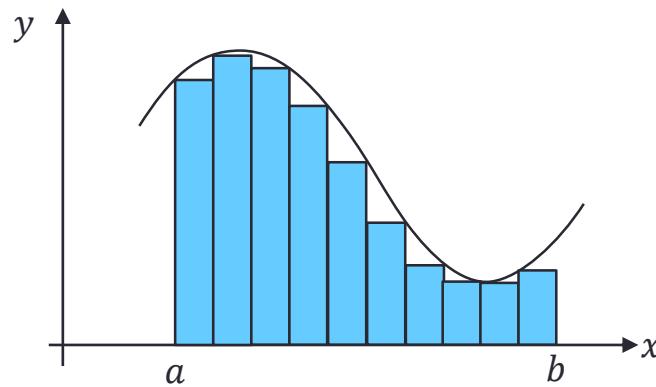
- したがって, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$
- 一方で, $S_n - s_n = \frac{1}{n}$ に注意すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{1}{3}$ なので,

領域の面積は

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$$

区分求積法

- 一般の関数 $f(x)$ について考える.
- まずは, $f(x) \geq 0$ のとき, $f(x)$ のグラフ, x -軸, 直線 $x = a, x = b$ で囲まれた領域を考える.
- 区間 $[a, b]$ を n 等分する小区間の幅を $\Delta x = (b - a)/n$ とおく.



- k 番目の小区間において, $f(x)$ の最小を与える点を x_k , 最大値を与える点を X_k とし, 領域を内側と外側から近似する長方形の集まりの面積をそれぞれ s_n, S_n とすると

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(X_k) \Delta x$$

リーマン和

- $s_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$ は下ダブルー和と呼ばれ $s_1 \leq s_2 \leq \dots$

$$S_* = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

を区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の下積分という,

- $S_n = \sum_{k=1}^n f(X_k) \Delta x$ は上ダブルー和と呼ばれ $S_1 \geq S_2 \geq \dots$

$$S^* = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

を区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の上積分という,

- 有界な単調増加(減少)数列であることから収束が保証される.

リーマン積分

定義13.2

- 下積分 S_* と上積分 S^* が一致するとき, $f(x)$ はリーマン積分可能といい, その値 $S_* = S^*$ を

$$\int_a^b f(x) dx$$

と表す.

- この値を $f(x)$ のリーマン積分, もしくは定積分という.
- $f(x)$ は被積分関数, $[a, b]$ は積分区間, a は下端, b は上端と呼ばれる.
- 一般に, $\sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x$ の形の和をリーマン和という (x_k^* は k 番目の小区間の点).
- $n \rightarrow \infty$ のとき, リーマン和が x_k^* の取り方によらずある値に収束することと, リーマン積分可能性は同値であり, その極限値がリーマン積分である.

リーマン積分不可能な関数

例13.3

- 不連続関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$$

を考える。

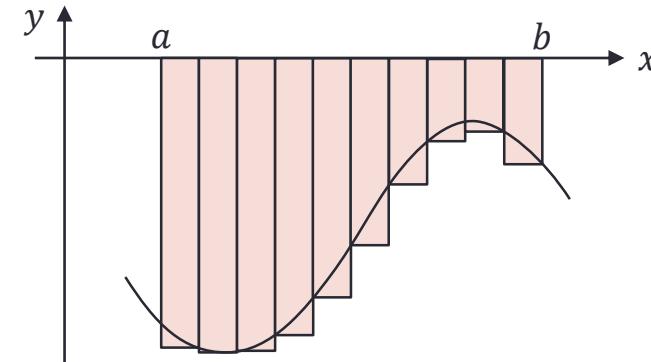
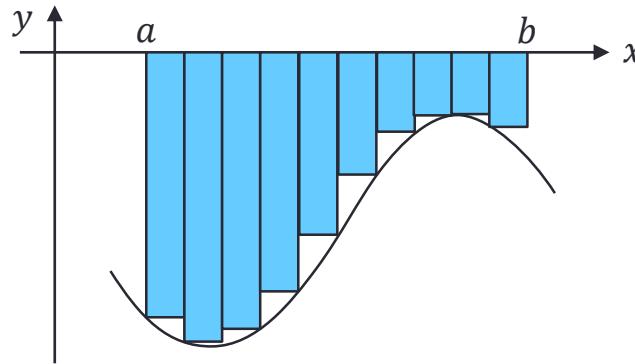
- 任意の小区間において有理数と無理数はどちらも存在するため

$$s_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x = 0$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(X_k) \Delta x = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x = n \Delta x = b - a$$

- 上積分と下積分が一致しないので, $f(x)$ はリーマン積分不可能.
- 一方で, 連続な関数はリーマン積分可能であることが知られている.

リーマン積分



- これまで被積分関数が積分区間上で非負の場合を考えたが、一般的な場合も定積分は考えられる。
- まず $f(x) \leq 0$ の場合も同様に積分区間を分割して、上下のダブル一和を計算する。

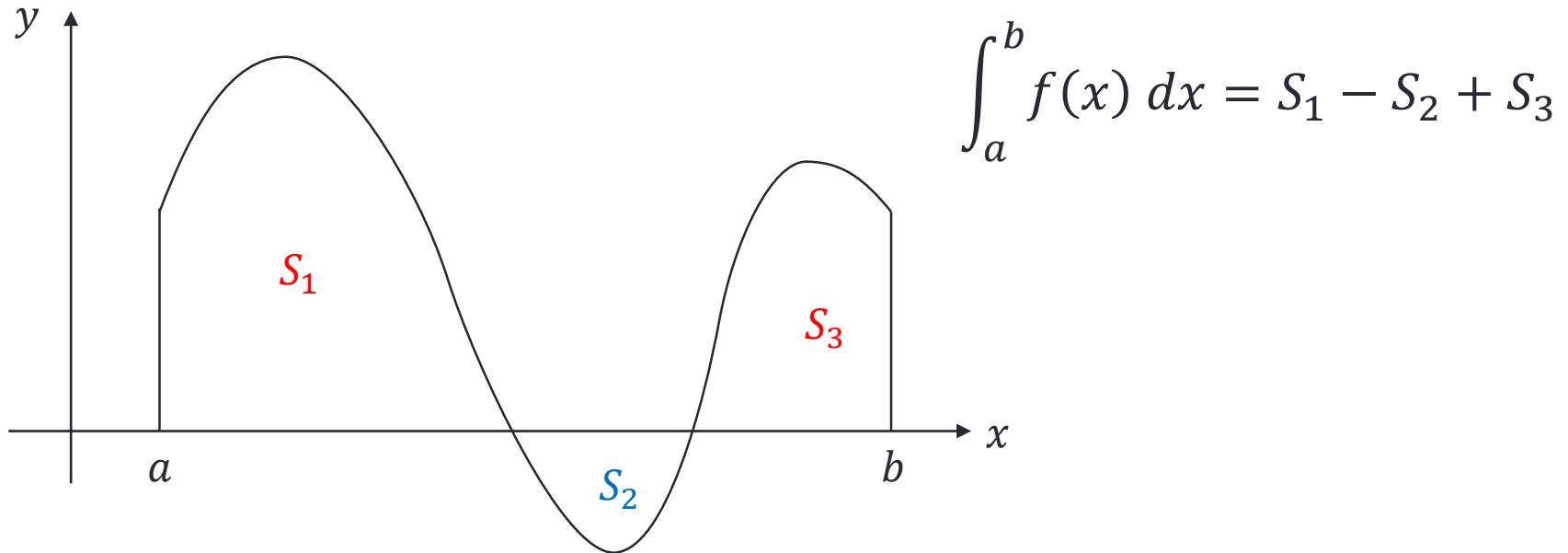
$$s_n = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x$$

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(X_k) \Delta x$$

- x_k は k 番目の小区間での $f(x)$ に最大値を与える点、 X_k は最小値を与える点である。
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ であるとき、その値を定積分 $\int_a^b f(x) dx$ と定める。

リーマン積分

- $f(x) \leq 0$ のとき, $f(x)$ の定積分 $\int_a^b f(x) dx$ は, $f(x)$ のグラフ, x -軸, 線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域の面積の逆符号を与える.
- 一般の関数 $f(x)$ の定積分は, $f(x)$ のグラフ, x -軸, 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた領域のうち, x -軸より上の部分の面積を正, 下の部分の面積を負として足し合わせた値として定める.



定積分の性質

- a, b の大小が異なる場合も扱えるように, $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$ と定義する.

定理13.4

- 定積分は次の性質を持つ. ($k, l \in \mathbb{R}$)

1. $\int_a^b (k f(x) + l g(x)) dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$

2. $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

3. $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \quad (a \leq b)$

4. $\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$

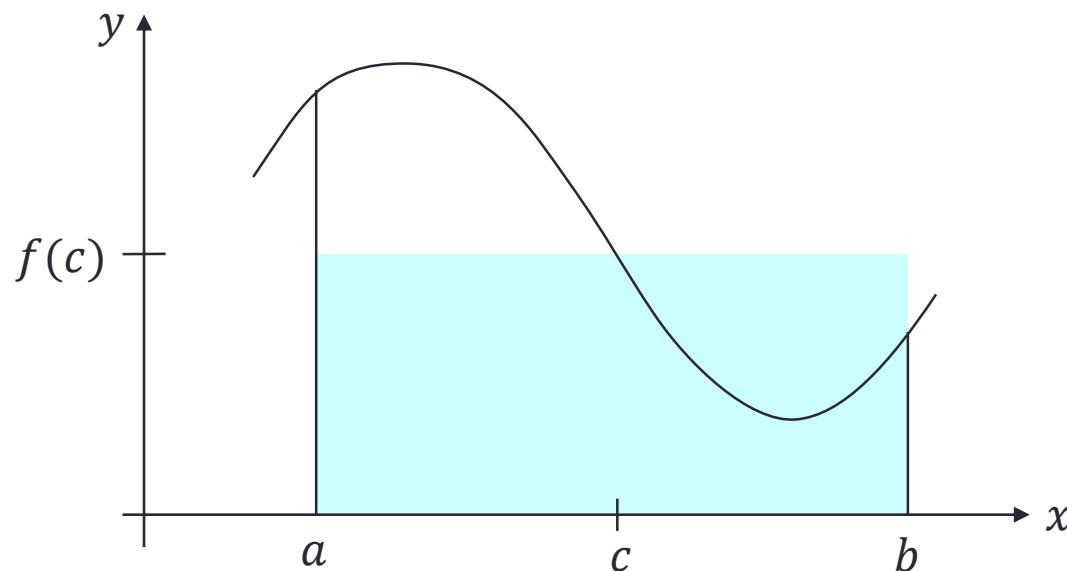
積分の平均値の定理

定理13.5

- 連続関数 $f(x)$ に関して

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する.



積分の平均値の定理(証明)

- ・ワイエルシュトラスの定理より, 連続関数 $f(x)$ は $[a, b]$ において最大値 M と最小値 m を持つ,

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a)$$

- ・これより

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx \leq M$$

- ・連続関数に関する中間値の定理より

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx = f(c)$$

を満たす $c \in (a, b)$ が存在する.

微積分の基本定理

定理13.6(微積分の基本定理)

- 連続関数 $f(x)$ に対して, 定積分で定まる関数

$$S(x) = \int_a^x f(t) dt$$

は, $f(x)$ の原始関数である. つまり

$$S'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

- ここで

$$S(c) - S(b) = \int_a^c f(t) dt - \int_a^b f(t) dt = \int_b^c f(t) dt$$

微積分の基本定理(証明)

- まず

$$S(x+h) - S(x) = \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+h} f(t) dt$$

であるが、積分の平均値の定理より

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(c) h$$

となる $c \in (x, x+h)$ が存在する。

- $h \rightarrow 0$ とすると、 $c \rightarrow x$ なので

$$S'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) h}{h} = f(x)$$

- 厳密には h の正負で場合分けが必要である。

定積分と不定積分の関係

定理13.7

- $f(x)$ の原始関数の一つを $F(x)$ とすると

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: [F(x)]_a^b$$

- つまり、定積分は区分求積法を用いなくとも原始関数から計算可能である。

- 原始関数 $F(x)$ は無数に存在するが、先ほど定義した $S(x)$ と定数 C を用いて $F(x) = S(x) + C$ と書けるので

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (S(b) + C) - (S(a) + C) \\ &= S(b) - S(a) = \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

定積分の計算例

例13.8

$$\int_1^2 (3x^2 + 4x - 1)dx = [x^3 + 2x^2 - x]_1^2 = 14 - 2 = 12$$

$$\int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2$$

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{1+x^2}{x} dx &= \int_1^e \frac{1}{x} + x dx = \left[\log x + \frac{1}{2}x^2 \right]_1^e \\ &= \left(\log e + \frac{e^2}{2} \right) - \left(\log 1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2 + 1}{2} \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = [-\cos x]_0^{2\pi} = -\cos 2\pi - (-\cos 0) = -(1) - (-1) = 0$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx &= \int_0^\pi \sin x dx + \int_\pi^{2\pi} (-\sin x) dx = [-\cos x]_0^\pi + [\cos x]_\pi^{2\pi} \\ &= -\cos \pi - (-\cos 0) + \cos 2\pi - \cos \pi = 4 \end{aligned}$$

部分積分

定理13.9(部分積分の公式)

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

- 実際、不定積分の部分積分の公式

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

より、 $H(x) = f(x)g(x) - \int_c^x f'(t)g(t) dt$ は $f(x)g'(x)$ の原始関数なので

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g'(x) dx &= H(b) - H(a) \\ &= f(b)g(b) - \int_c^b f'(t)g(t) dt - \left(f(a)g(a) - \int_c^a f'(t)g(t) dt \right) \\ &= [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx \end{aligned}$$

部分積分の計算例

例13.10

$$\begin{aligned}
 \int_1^2 4x \log x \, dx &= [2x^2 \log x]_1^e - \int_1^2 2x^2 \cdot \frac{1}{x} \, dx \\
 &= [2x^2 \log x]_1^e - [x^2]_1^e \\
 &= 2e^2 \log e - 2 \log 1 - (e^2 - 1) = e^2 + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \\
 &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= \frac{\pi}{2} - 0 - (0 + 1) = \frac{\pi}{2} + 1
 \end{aligned}$$

置換積分

定理13.11(置換積分の公式)

- 関数 $f(x)$ の変数 x が別の変数 t の C^1 級関数 $x = \phi(t)$ として表されるとき

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

ただし, $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$ である.

- 実際, 不定積分の置換公式

$$\int f(x) dx = \int f(\phi(t)) \phi'(t) dt$$

より, $F(x) = \int f(x) dx$ のとき, $F(\phi(t))$ は $f(\phi(t)) \phi'(t)$ の原始関数なので

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt = F(\phi(\beta)) - F(\phi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

置換積分の計算例

例13.12

- $\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ を計算する.
- $x = \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) とすると

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cos t dt \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) dt \\
 &= \left[\frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

- 途中、倍角の公式 $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ を用いた.

定積分(問題)

問題13.13

- 次の定積分を計算せよ.

1. $\int_0^1 x e^{2x} dx$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$

3. $\int_0^1 \frac{1}{4-x^2} dx$

まとめ

1. 面積

- 区分求積法
- リーマン積分
- 定積分

2. 微積分学の基本定理

- 定積分の計算