

微分・積分 第2回「関数」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今回の内容

1. 関数

- 写像との関係
- グラフ
- 定義域

2. 多項式関数, 有理関数, 無理関数, 三角関数, 指数関数, 対数関数

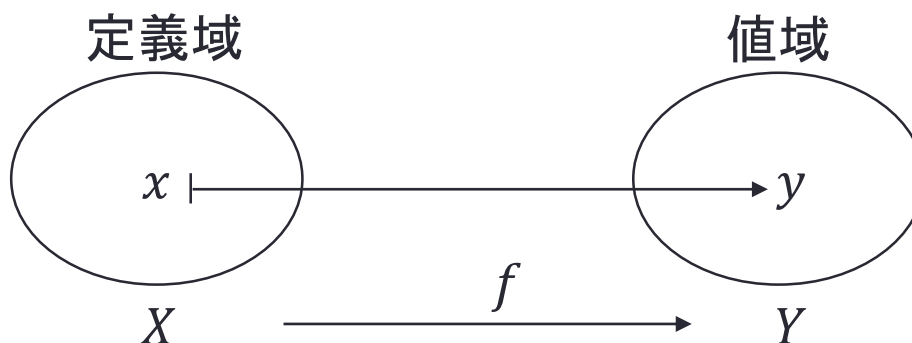
3. 符号関数, 床関数, 天井関数

写像

定義2.1

- 集合 X の各元に対して, 集合 Y の元を唯一つ定める対応のことを**写像**と呼び, $f: X \rightarrow Y$ と表す.
- X のことを**定義域**, Y のことを**値域**という.
- 写像 $f: X \rightarrow Y$ によって $x \in X$ が $y \in Y$ に対応するとき, y を f による x の**像**といい, $y = f(x)$ と書く.

$$f: X \rightarrow Y, \quad x \mapsto y$$

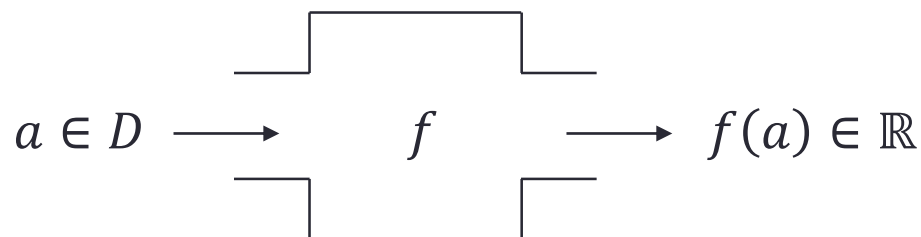


関数

- 写像の特別な場合が関数である.

定義2.2

- 実数の部分集合 $D \subset \mathbb{R}$ から実数への写像 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ を (一変数) **関数** という.
- x は **変数** と呼ばれる.
- (しばらくは一変数関数しか登場しないので, 単に関数と呼ぶ).
- 関数 f は $a \in D$ を入力すると $f(a) \in \mathbb{R}$ を出力する機械だと考えられる.



- 関数はもともと「函数」と表記されていた. 函は箱のことである.

関数(例)

例2.3

- 関数

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto (1+x)^2$$

はしばしば単に $f(x) = (1+x)^2$ と書かれる.

- これは $a \in D = \mathbb{R}$ に対して $(1+a)^2 \in \mathbb{R}$ を返す「対応」だと考えられる.

- つまり

$$f(-1) = 0, \quad f(0) = 1, \quad f(0.3) = 1.69, \quad f(10) = 121$$

といった具合である.

- f の像は $\mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ である.

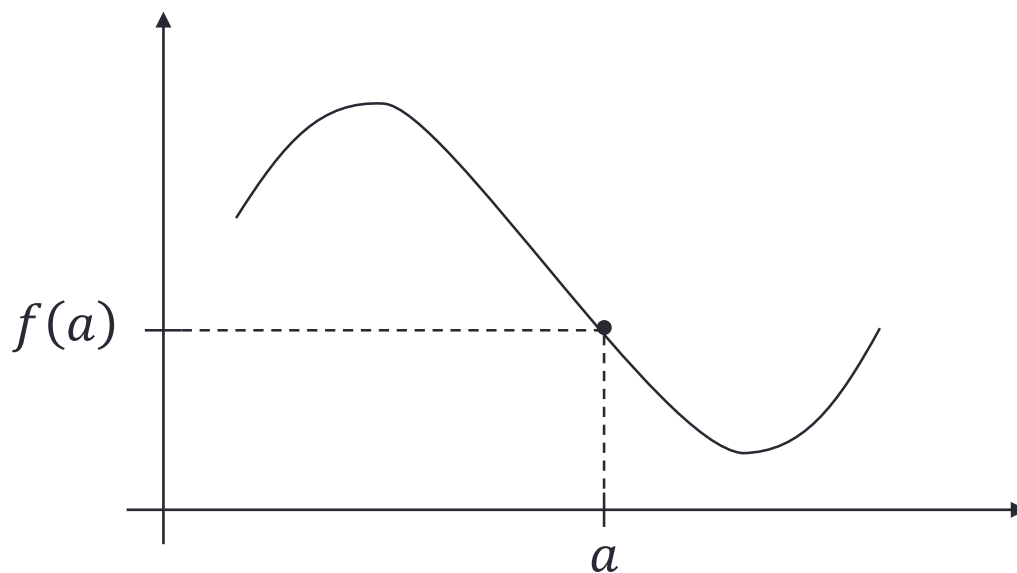
関数のグラフ

定義2.4

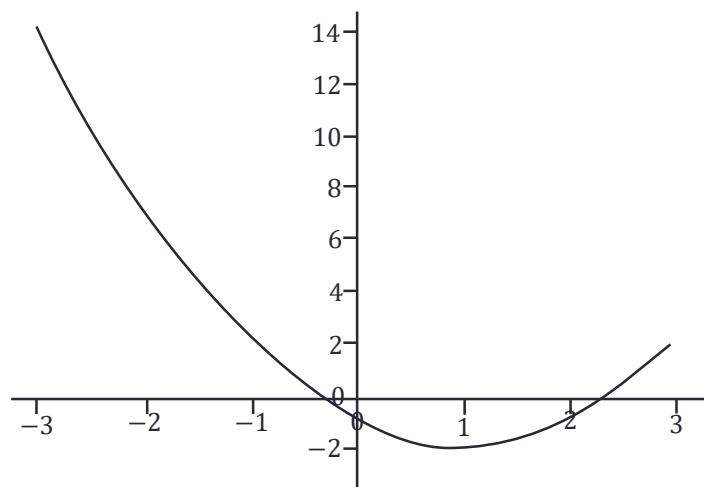
- xy -平面 $\mathbb{R}^2$ 上の点 $(x, f(x))$ を考えることで, 関数 f を可視化できる.
- 集合

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

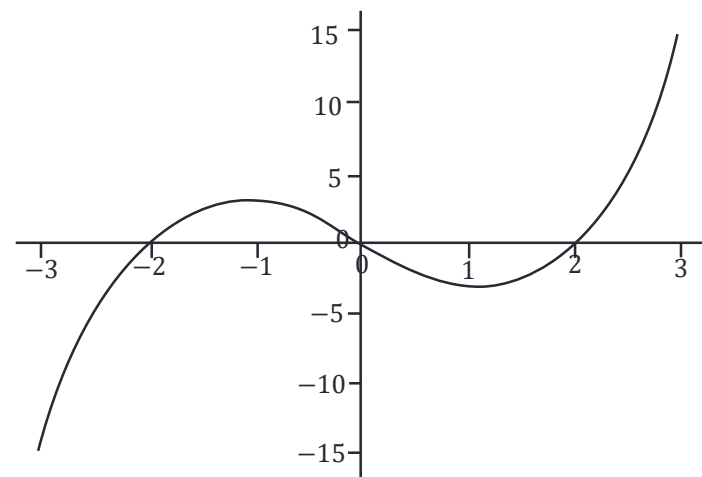
を関数 f の**グラフ**という.



関数のグラフ(例)



$$f(x) = (x - 1)^2 - 2$$



$$f(x) = x(x^2 - 4)$$

関数のグラフ(問題)

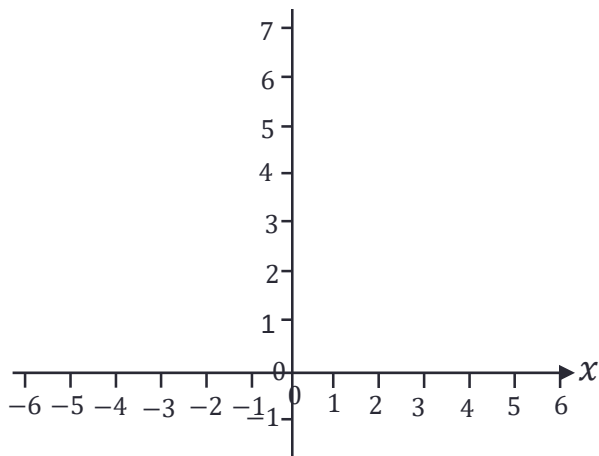
問題2.5

• 次の関数のグラフを描け.

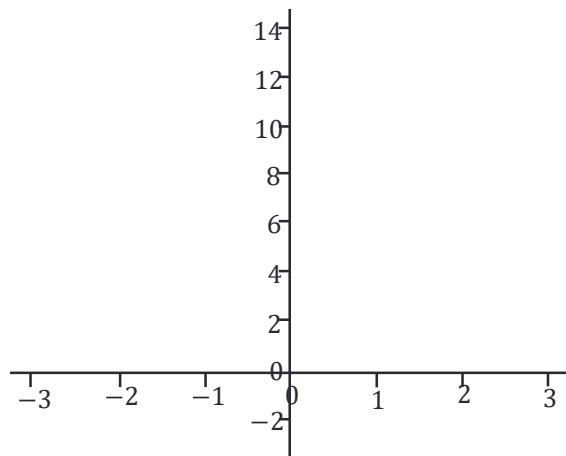
1. $f(x) = 2x + 5$

2. $g(x) = x^2 + x - 2$

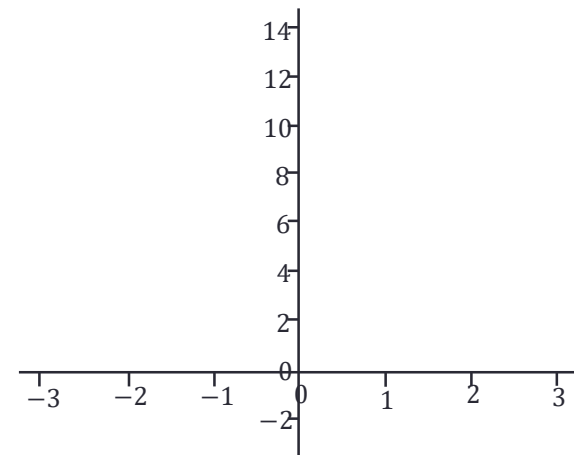
3. $h(x) = |x^2 + x - 2|$



$$f(x) = 2x + 5$$



$$g(x) = x^2 + x - 2$$



$$h(x) = |x^2 + x - 2|$$

関数の定義域

例2.6

- 次の2つの関数は定義域が異なるので、厳密には異なる関数である.

$$f_1: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$f_2: \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

- しかしながら、特に言及がなければ $\frac{1}{x}$ と書かれた関数は前者を指す.
- このように、特に定義域を指定せずに式だけで与えられた関数はその式に代入可能な実数全体を定義域とする関数と考える.

例2.7

- $x^2 + 3x$ は $\mathbb{R}$ 上で定義された関数である.
- $\frac{3x+1}{x^2-5}$ は分母が 0 にならない範囲, つまり $x \neq \pm\sqrt{5}$ で定義された関数である.
- $\sqrt{x-3}$ は平方根の中身が非負である範囲, つまり $x \geq 3$ で定義された関数である.

多項式関数

定義2.8

- $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

の形の関数を**多項式関数**という.

- 例

$$-2x + 3, \quad x^3 - x^2 + 7x + 10, \quad x^{100}$$

- a_i は x^i の**係数**, a_0 は**定数項**と呼ばれる.
- $a_n \neq 0$ であるとき, n を $f(x)$ の**次数**, $f(x)$ を n 次多項式関数という.
- 多項式関数の定義域は $\mathbb{R}$.

有理関数

定義2.9

- 多項式関数 $f(x), g(x)$ の有理式, つまり

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

の形で書かれる関数を有理関数という.

- 例

$$\frac{1}{x+1}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}, \quad \frac{(x-1)(x+5)}{(x-3)(x+1)(x-7)}$$

- 多項式関数は有理関数の特別な場合 ($g(x) = 1$ の場合).
- 有理関数の定義域は $D = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$.

無理関数

定義2.10

- 多項式と根号の有理式で表され, 変数が根号に含まれる関数を**無理関数**という.

- 例

$$\sqrt{x^2 - 1} + x^3 + \frac{5}{2}, \quad \frac{\sqrt{x}}{x-1} + 2, \quad \sqrt[3]{\frac{x^2 + x + 1}{5x^2 - 7}} + 100x$$

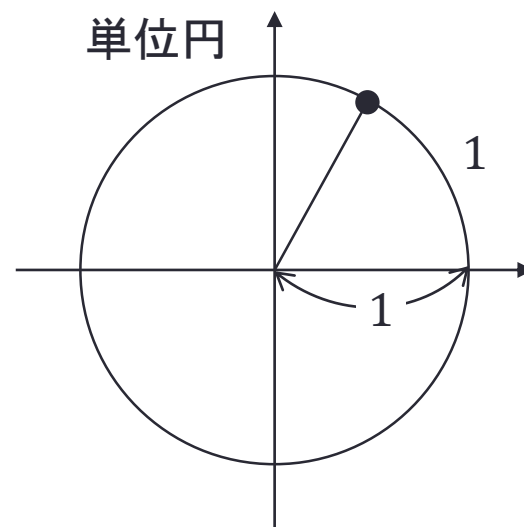
- 無理関数の定義域は一般に複雑である.
- 例えば, 上の関数の定義域はそれぞれ次のようになる.

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, x \neq 1\}, \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm\sqrt{7/5}\}$$

三角関数

定義2.11

- **三角関数**とは、平面三角法の角度と線分長の関係を記述する関数の族、およびそれらを拡張して得られる関数の総称である。
 - **正弦関数** $\sin \theta$, **余弦関数** $\cos \theta$, **正接関数** $\tan \theta$ が代表的な関数である。
-
- 大学では、変数 θ の単位として、度数法(度)ではなく、弧度法(radian)を考えることが多い。
 - $1 \text{ radian} = \text{“半径} = \text{弧長”なる角度}$ 。
 - $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$
 - つまり $1 \text{ rad} = 360^\circ / 2\pi \approx 57.3^\circ$ 。



$$2\pi \text{ rad} = 360^\circ$$

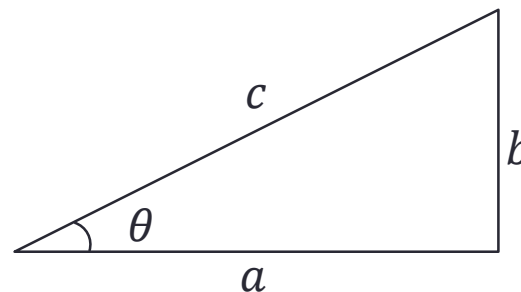
三角関数

定義2.12

- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるとき

$$\sin \theta = \frac{b}{c} \quad \cos \theta = \frac{a}{c}$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a}$$



- 具体的には

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan \frac{\pi}{4} = 1$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

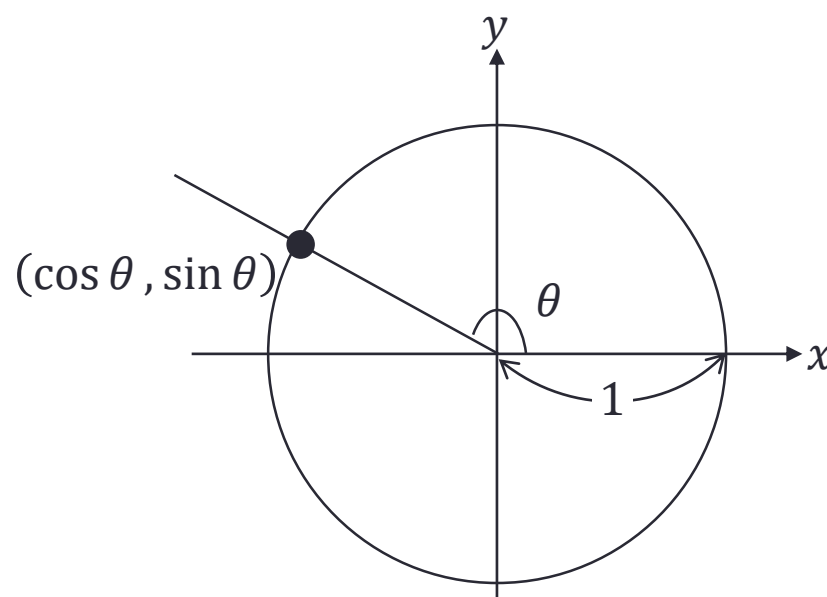
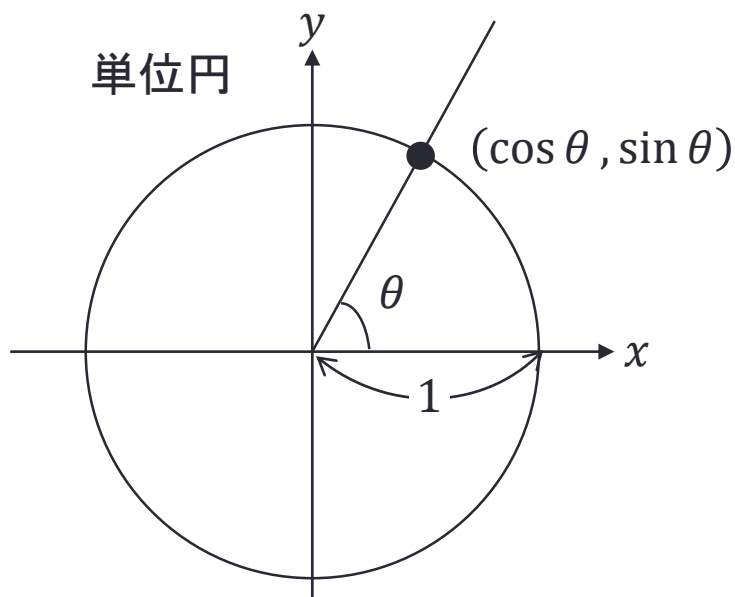
$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

三角関数

定義2.13

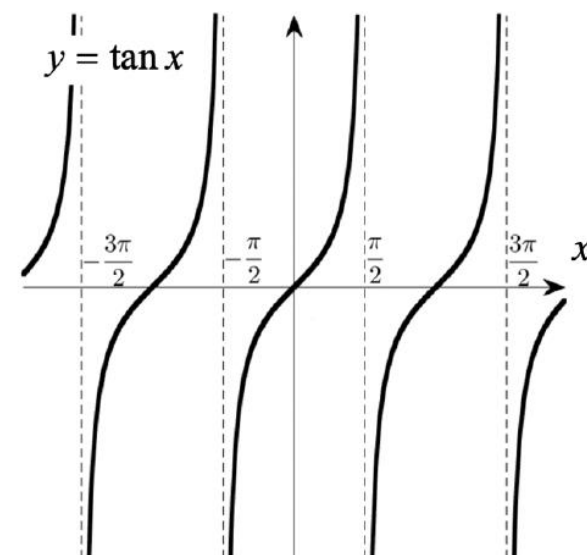
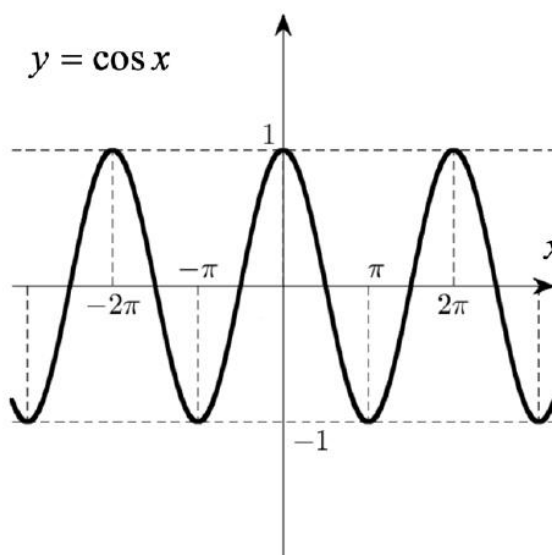
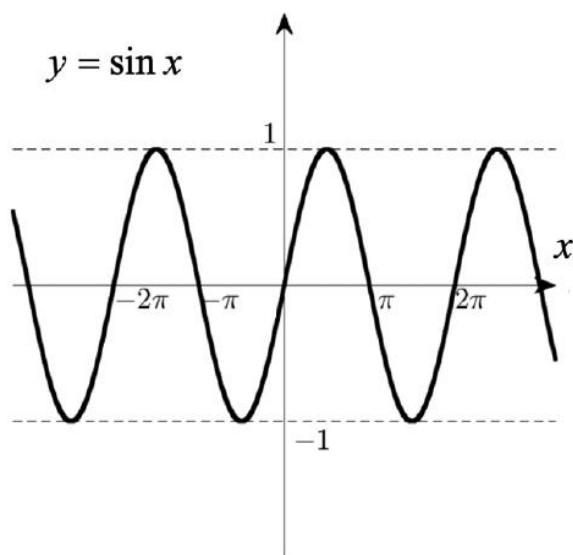
- x 軸の正の部分を中心を中心に反時計回りに θ だけ回転させた半直線と単位円の交点の座標を $(\cos \theta, \sin \theta)$ と定義する.
- $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$
- $\cos \theta \neq 0$ のとき, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ と定義する.
- $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であるときは, 定義2.12と一致する.



三角関数の性質

定理2.14

- 周期: $\sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta$, $\cos(\theta + 2\pi) = \cos \theta$, $\tan(\theta + \pi) = \tan \theta$
- $\sin(-\theta) = -\sin \theta$, $\cos(-\theta) = \cos \theta$, $\tan(-\theta) = -\tan \theta$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$
- $\sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$, $\cos(\theta + \pi) = -\cos \theta$
- $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$



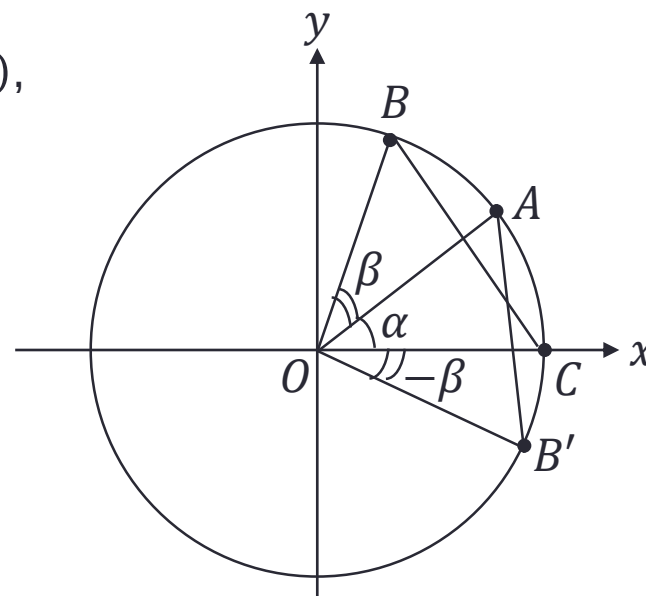
加法定理の証明

定理2.14

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

証明

- $A(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $B(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$, $C(1, 0)$, $B'(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ とすると, $BC = AB'$ なので
- $(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha + \beta) = (\cos \alpha -$
- $(\cos(\alpha + \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha + \beta) = (\cos \alpha -$
- $\cos^2(\alpha + \beta) - 2 \cos(\alpha + \beta) + 1 + \sin^2(\alpha + \beta) =$
 $\cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha +$
 $2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta$
- $2 - 2 \cos(\alpha + \beta) = 2 - 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \sin \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$



他の定理は, $\cos$ と $\sin$ の関係とその性質を使えば, 示すことができる.

三角関数(問題)

問題2.15

- 三角関数 $\sin x, \cos x, \tan x$ の定義域と像を求めよ.

- $\sin x$
 - 定義域:
 - 像:
- $\cos x$
 - 定義域:
 - 像:
- $\tan x$
 - 定義域:
 - 像:

三角関数(問題)

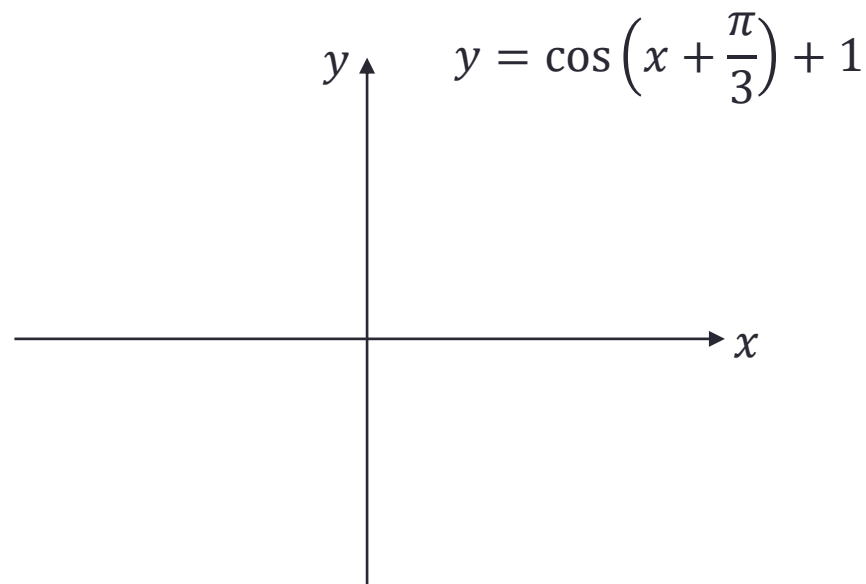
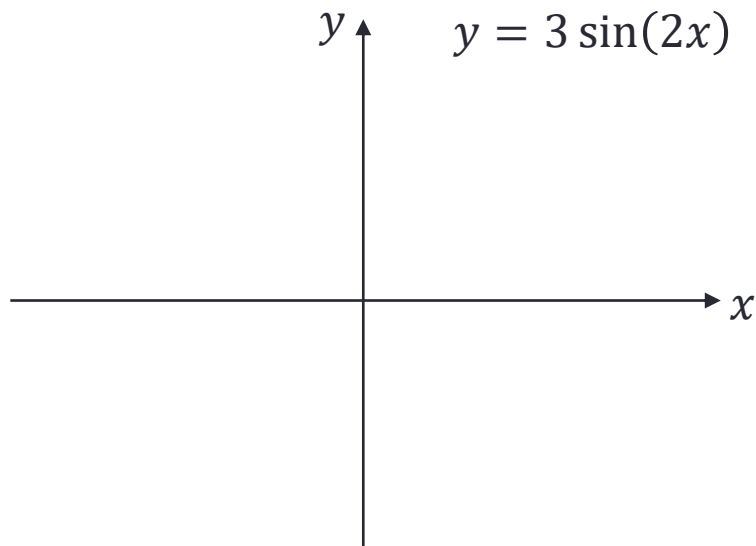
問題2.16

- 次の関数のグラフを描け.

1. $3 \sin(2x)$

2. $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 1$

- 一般に, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ に対して, $a f(b x + c) + d$ のグラフは, $f(x)$ のグラフを x 軸方向に $1/b$ 倍し, c だけ左にずらし, y 軸方向に a 倍し, d だけ上にずらしたものである.



指数

定義2.17

- $n \in \mathbb{N}, a > 0$ に対して, べき乗 $a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{n\text{個}}$ であった.
 - a を **底**, n を **指数** と呼ぶ.
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a^0 = 1$ と定めることで, 指数が整数の場合にもべき乗が定義される.
- 有理数 $x \in \mathbb{Q}$ に対して, a のべき乗 a^x を次のように定義する.
 - $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z}, a > 0$ に対して, $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n} (= (\sqrt[m]{a})^n)$
- 実数 $x \in \mathbb{R}$ に対しても, 有理数の**稠密性**を用いて, $a^x \in \mathbb{R}$ を定義することができる.

- 例(整数)

$$2^5 = 32 \qquad 2^{-4} = \frac{1}{16} \qquad 2^0 = 1$$

- 例(有理数)

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} \approx 2.924 \qquad 2^{-\frac{3}{4}} = 2^{\frac{-3}{4}} = \sqrt[4]{1/2^3} \approx 0.5946$$

指数法則

定義2.17(つづき)

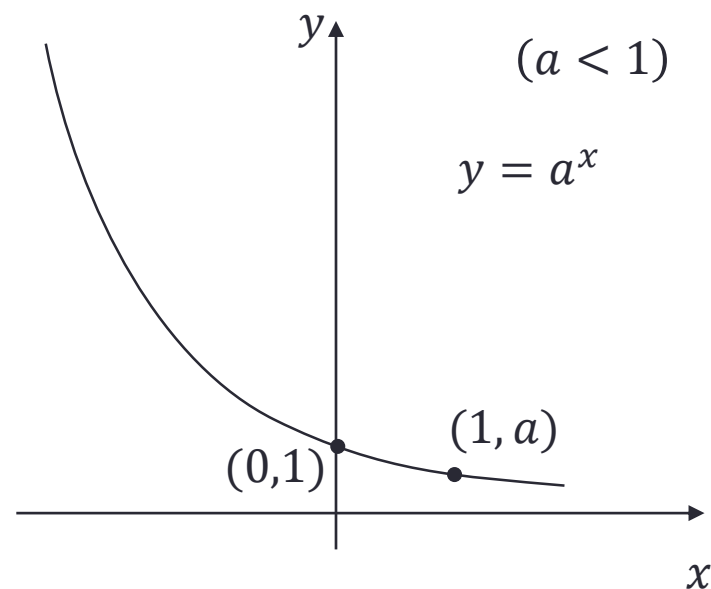
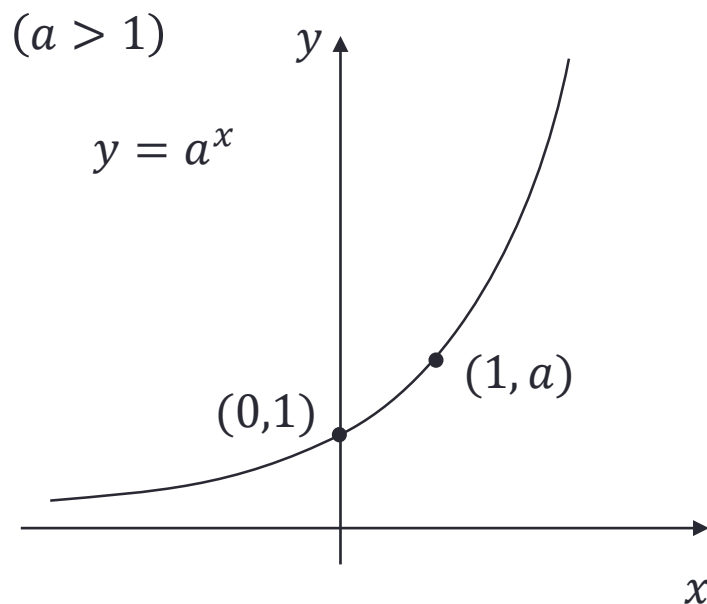
$a > 0, b > 0, x, y \in \mathbb{R}$ について次が成り立つ.

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $a^x \div a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$
- $a^0 = 1$
- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

指数関数

定義2.18

- 関数 $f(x) = a^x$ を a を底とする**指数関数**という.
- ネイピア数** $e = 2.718281828 \dots$ を底とする場合が多い.



対数関数

定義2.19

- $a \neq 1$ を正の実数とすると, 任意の $x \in \mathbb{R}_+$ に対して

$$x = a^y$$

となる $y \in \mathbb{R}$ が唯一つ存在する.

- これを $y = \log_a x$ と書き, a を底とする x の対数という.
- $f(x) = \log_a x$ を a を底とする対数関数という.
- 定義域が $\mathbb{R}_+$ であることに注意 ($f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log_a x$).

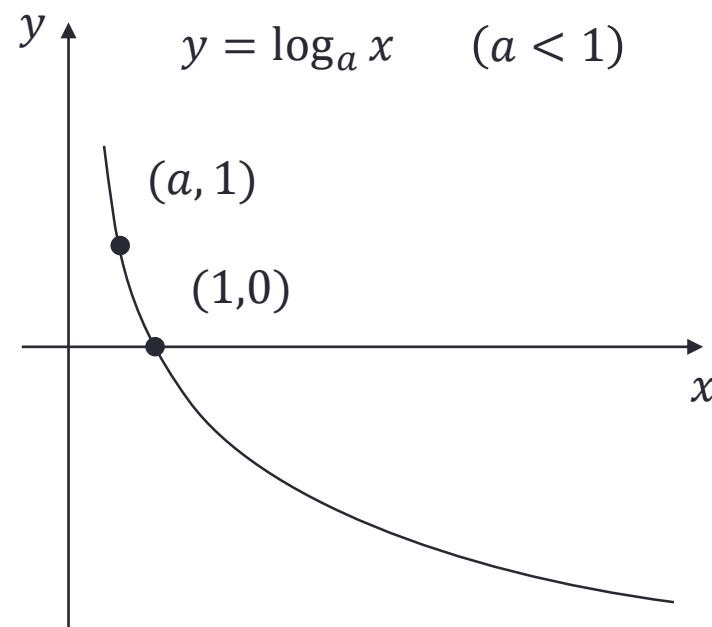
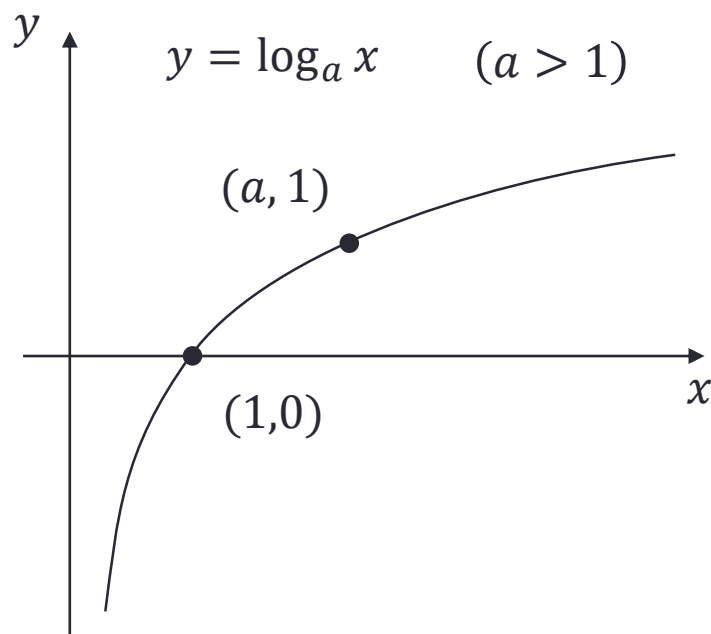
- 例

$$\log_2 \frac{1}{2} = -1 \quad \log_2 1 = 0 \quad \log_2 2 = 1 \quad \log_2 4 = 2 \quad \log_2 8 = 3 \quad \log_2 16 = 4$$

$$2^{-1} = \frac{1}{2} \quad 2^0 = 1 \quad 2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^4 = 16$$

対数関数

- 定義より
 - $a^{\log_a x} = x$
 - $\log_a a = 1$
 - $\log_a 1 = 0$
- 特別な底に関して、対数は特別な名前を持つ.
 - 常用対数: $\log_{10} x = \text{Log } x$
 - 自然対数: $\log_e x = \log x = \ln x$
 - 二進対数: $\log_2 x$



対数関数

定理2.20

- $\log_a x y = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a x^b = b \log_a x$
- (底の変換公式) 正の実数 $a, b (\neq 1)$ と x に対して

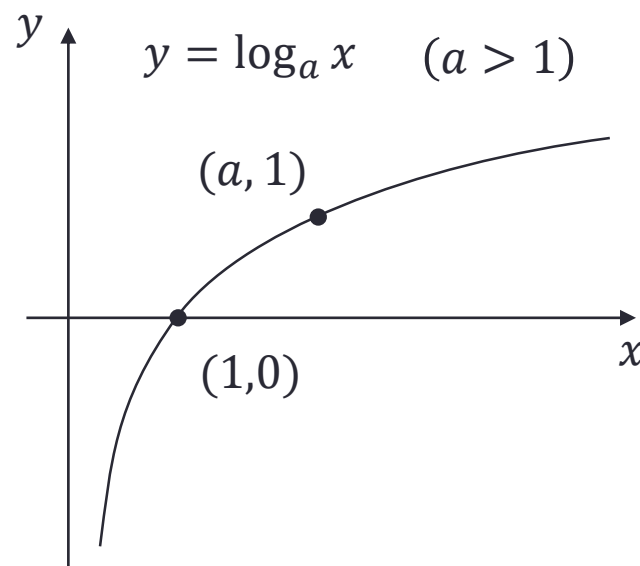
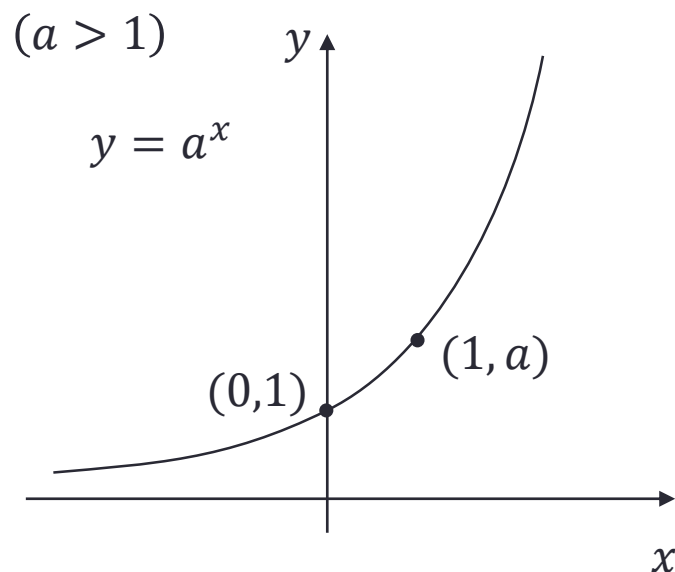
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

- 例
 - $\log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + \log_2 5$
 - $\log_3 12 = \log_3 3 + \log_3 2^2 = 1 + 2 \log_3 2$
 - $\log_5 \frac{15}{4} = \log_5 15 + \log_5 \frac{1}{2^2} = 1 + \log_5 3 - 2 \log_5 2$
 - $\log_7 5 = \frac{\log_2 5}{\log_2 7}$

指数関数と対数関数

- $a \neq 1$ に関して, 指数関数 $f(x) = a^x$ の像は $\mathbb{R}_+$,
- 対数関数 $g(x) = \log_a x$ の定義域は $\mathbb{R}_+$.
- $f(x)$ と $g(x)$ は互いに**逆関数**(逆写像).

$$g(f(x)) = \log_a(a^x) = x, \quad f(g(x)) = a^{\log_a x} = x$$



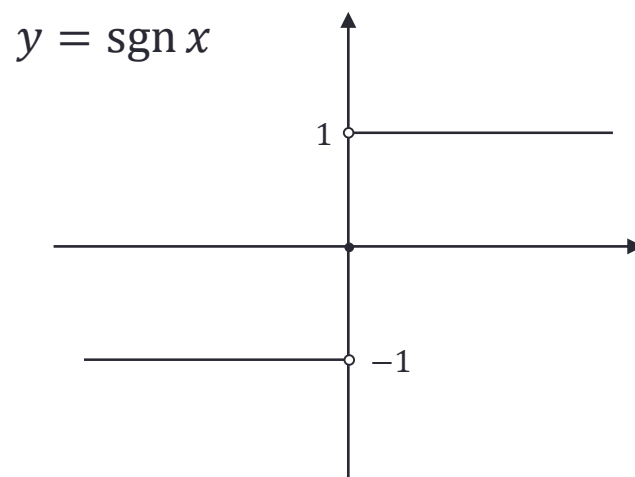
(一般に, 逆写像のグラフは $y = x$ に関して鏡映対称)

符号関数

定義2.21

- 符号関数

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} = \begin{cases} 1 & (x > 0) \\ 0 & (x = 0) \\ -1 & (x < 0) \end{cases}$$



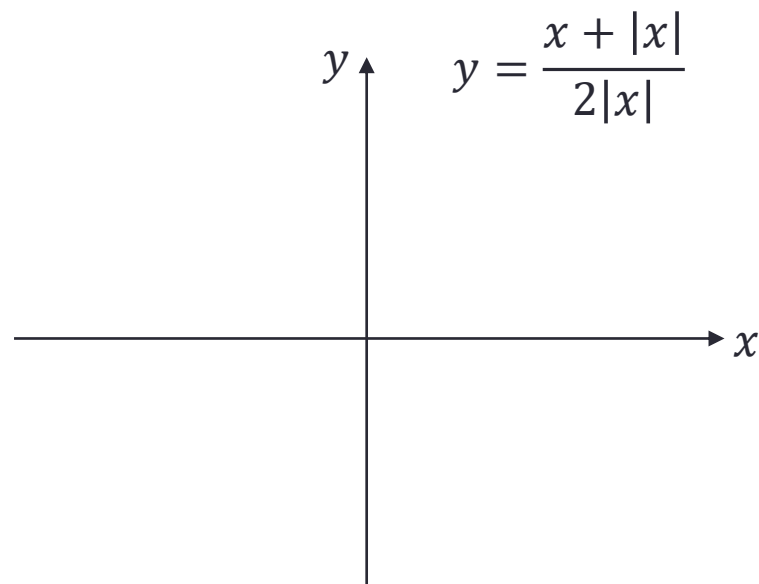
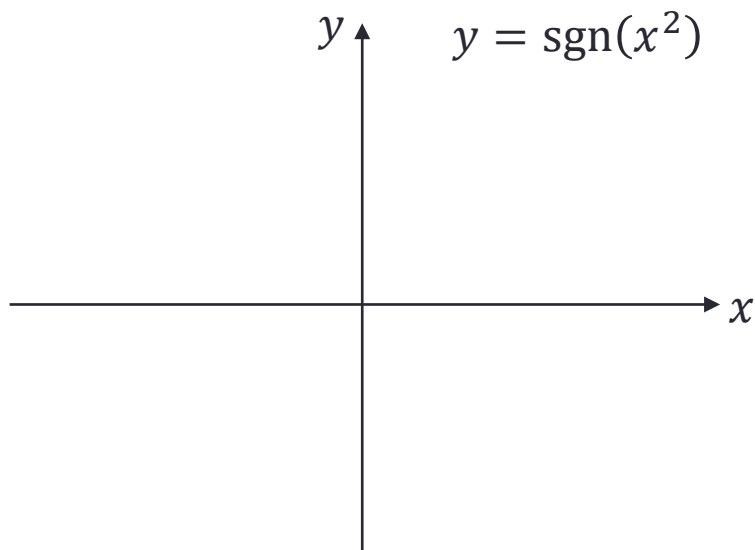
符号関数(問題)

問題2.22

• 次の関数のグラフを描け.

1. $\operatorname{sgn}(x^2)$, $\operatorname{sgn}(x^3)$

2. $\frac{x+|x|}{2|x|}$ ($x \neq 0$) (ヘヴィサイドの階段関数)



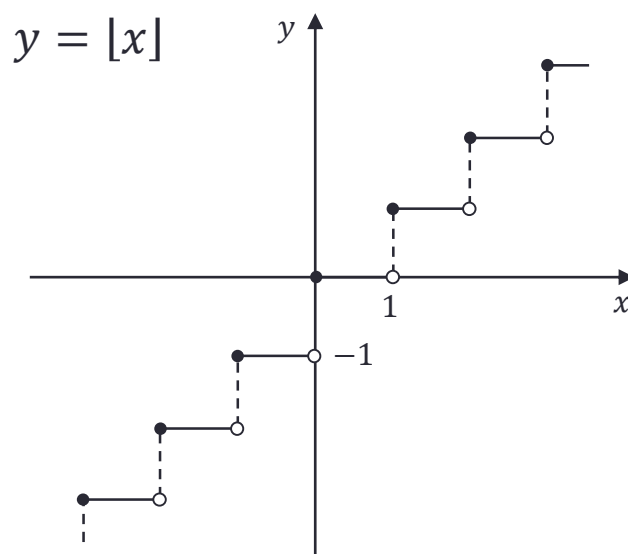
床関数

定義2.23

• 床関数 $\lfloor x \rfloor = \max\{ n \in \mathbb{Z} \mid x \geq n \}$

• 例

$$\lfloor 1/2 \rfloor = 0 \quad \lfloor -\pi \rfloor = -4 \quad \lfloor 5 \rfloor = 5 \quad \lfloor 5.1 \rfloor = 5$$



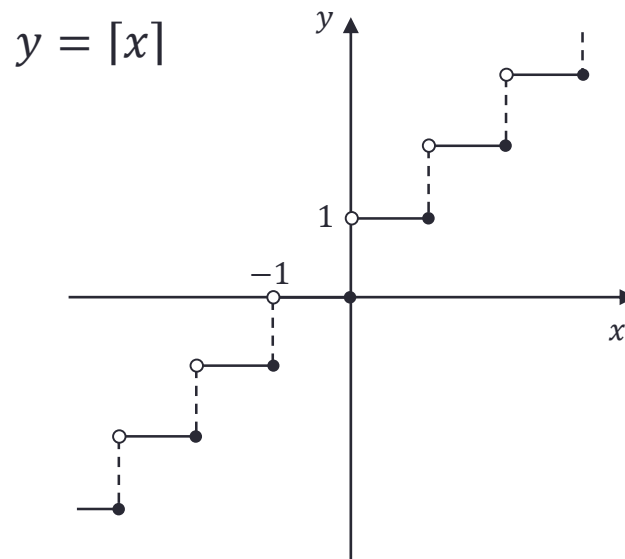
天井関数

定義2.24

- 天井関数 $\lceil x \rceil = \min\{ n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n \}$

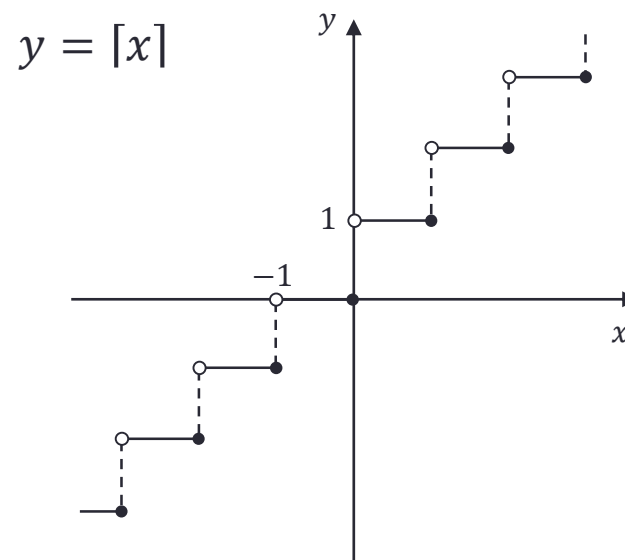
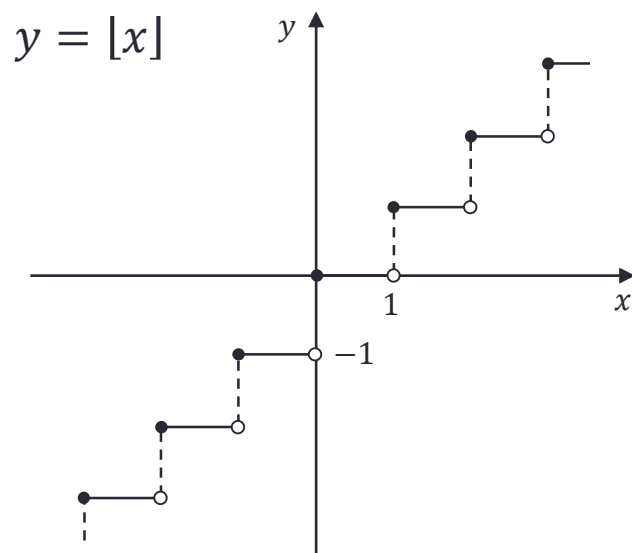
- 例

$$\lceil 1/2 \rceil = 1 \quad \lceil -\pi \rceil = -3 \quad \lceil 5 \rceil = 5 \quad \lceil 5.1 \rceil = 6$$



床関数と天井関数

- 床関数 $\lfloor x \rfloor = \max\{ n \in \mathbb{Z} \mid x \geq n \}$
- 天井関数 $\lceil x \rceil = \min\{ n \in \mathbb{Z} \mid x \leq n \}$



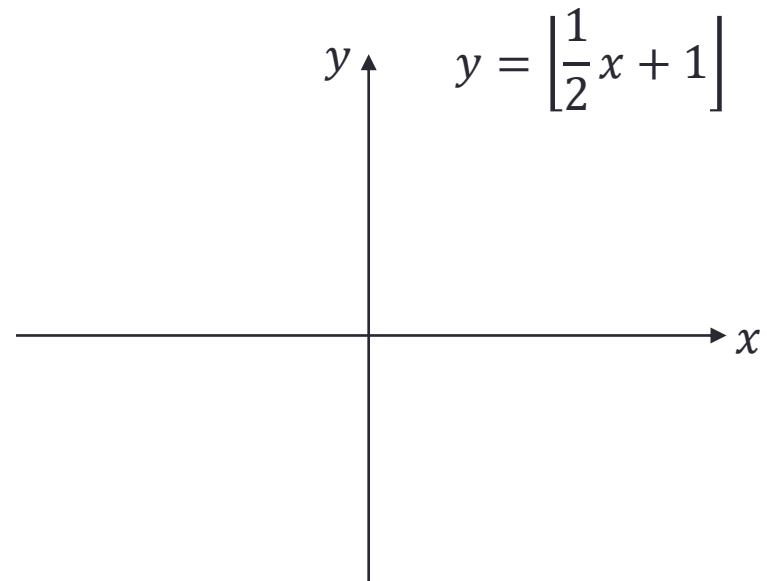
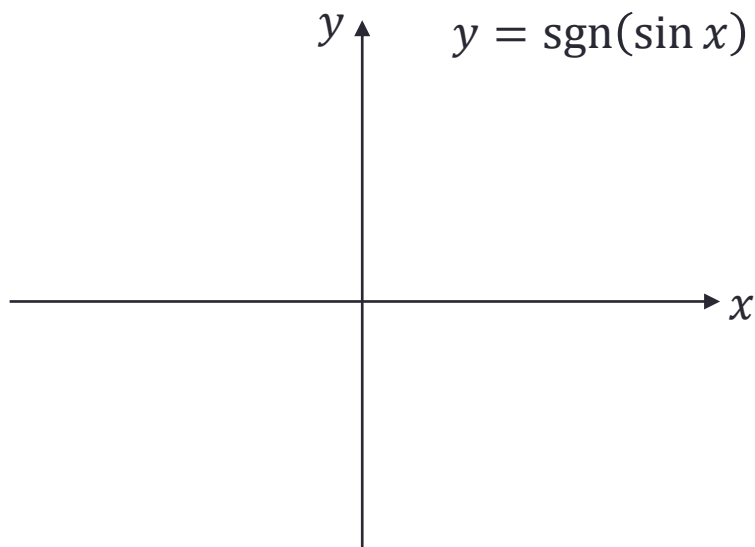
様々な関数のグラフ

問題2.25

• 次の関数のグラフを描け.

1. $\operatorname{sgn}(\sin x)$

2. $\left\lfloor \frac{1}{2}x + 1 \right\rfloor$



発展：実数と有理数の違い

定義2.26

- 自然数: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
- 整数: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$
- 有理数: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$

- **自然数**は足し算と掛け算について閉じている.
- **整数**は足し算と引き算と掛け算について閉じている.
- **有理数**は足し算と引き算と掛け算と割り算について閉じている.
- $\sqrt{2}$ は有理数ではなく, **無理数**.
- 有理数 係数の代数方程式の解をすべて加えても実数にはならない.
 - π や e は**超越数**と呼ばれる無理数であり, 有理数係数の代数方程式の解となる**代数的数**でない.

発展: 有理数の稠密性

- 有理数は数直線上に隙間なくぎっしり詰まっている.

定理2.27

- 任意の実数 x, y に対して $x < y$ であれば, 有理数 a が存在して

$$x < a < y$$
 となる. 有理数の**稠密性** (dense)という.

証明:

- $\frac{1}{y-x} < n$ となる自然数 n を取ることができる.
- $1 < ny - nx$ より $nx + 1 < ny$
- $nx < m$ となる最小の整数を m とする.
- $m \leq nx + 1$ であるから, $nx + 1 < ny$ より $nx < m < ny$
- よって, $x < \frac{m}{n} < y$ となり, $\frac{m}{n}$ が求める有理数.
- ちなみに, 無理数(有理数でない実数)も実数上で稠密である.

発展: 実数の連続性

- 実数は有理数と異なり連続性(あるいは完備性)を持ち, 例えば次の定理が成り立つ.

定理2.28

- 実数の空でない部分集合 A は, 上に有界であれば上限 $\sup A$ が存在する.
- A が上に有界である $\Leftrightarrow$ ある実数 a があり, A の任意の元 x は $x \leq a$ となっている(a を A の上界という).
- a が A の上限である $\Leftrightarrow$
 - A の任意の元 x に対して, $x \leq a$
 - 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $x \in A$ が存在して $a - \epsilon \leq x \leq a$ となる.
- A の上限は A の最小の上界と言い換えることもできる.
- 上限は A の最大元とは限らない(最大元は A の元でないといけない).
 - $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$ に最大元はないが, 上限は $\sqrt{2}$ である.
- 有理数の部分集合 $\{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ は上に有界であるが $\mathbb{Q}$ では上限が存在しない.

まとめ

1. 関数
 - 写像との関係
 - グラフ
 - 定義域
2. 多項式関数, 有理関数, 無理関数
3. 三角関数, 指数関数, 対数関数
4. 符号関数, 床関数, 天井関数