

微分・積分

第3回「関数の極限と連続性」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

1. 極限

- 右極限
- 左極限
- 極限
- 極限の性質

2. 連続

- 点連続
- 連続関数
- 中間値の定理

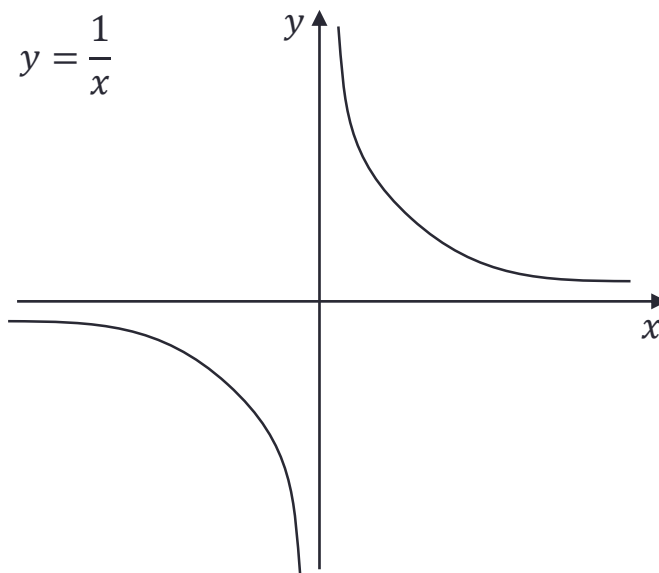
3. 不定形の極限

極限

- 除法において, 0 で割ることはできない.
 - $1/0$ や $0/0$ は存在しない.
- 無限大 ∞ という数は存在しない.
 - $\infty - 0$, $1/\infty$, $\infty - \infty$ などは意味を持たない.
- しばしば, $1/0$, $1/\infty$, $\infty - \infty$ などに近いものを扱う必要がある.
 - 微分: 微小変化 ($0/0$ に近いもの) を評価する.
 - 積分: 微小量の無限和 ($\infty \times 0$ に近いもの) を評価する.
- このようなものを数学的に適切に扱うために, ‘**極限**’ の概念が必要になる.

右極限・左極限

- 関数の値の‘**極限**’を考えたい.
- 例えば, 関数 $1/x$ は原点 0 では定義されないが, 原点の近傍では定義されている.
- $x > 0$ の方から原点に近づくと, 関数の値は正の値で発散, つまり $+\infty$ になる.
- $x < 0$ の方から原点に近づくと, 関数の値は負の値で発散, つまり $-\infty$ になる.



右極限

定義3.1

- 関数 $f(x)$ に関して, $x > a$ を満たしながら x が a に近づくとき
- $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することを次のように表す.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha$$

- $f(x)$ がいくらでも大きく(小さく)なることを, 正(負)の無限大に発散するといい, 次のように表す.

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

- これらを $f(x)$ の a における**右極限**という.

- $a = 0$ の場合は特別で, $x \rightarrow 0 + 0$ と書かずに, $x \rightarrow +0$ と書く.

左極限

定義3.2

- 関数 $f(x)$ にかんして, $x < a$ を満たしながら x が a に近づくとき
- $f(x)$ が $\alpha \in \mathbb{R}$ に収束することを次のように表す.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha$$

- $f(x)$ がいくらでも大きく(小さく)なることを, 正(負)の無限大に発散するといい, 次のように表す.

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = +\infty \quad (-\infty)$$

- これらを $f(x)$ の a における**左極限**という.

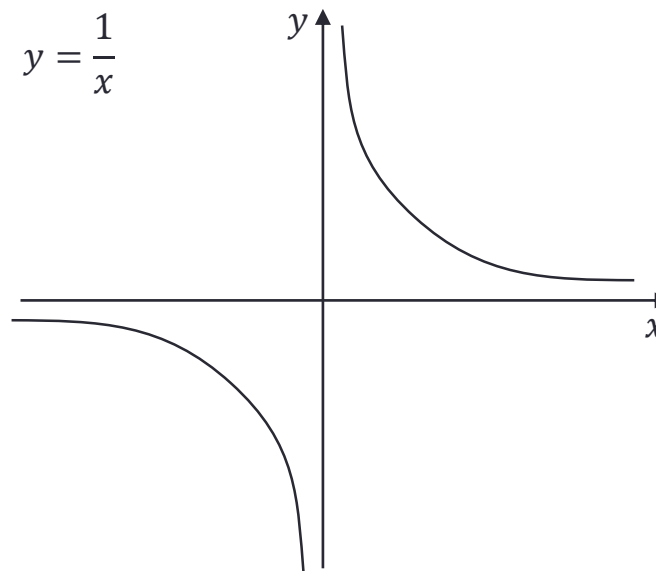
- $a = 0$ の場合は特別で, $x \rightarrow 0 - 0$ と書かずに, $x \rightarrow -0$ と書く.

片側極限

- 右極限と左極限は片側極限とも呼ばれる.
- 関数 $f(x)$ の a における右極限と左極限は一般に一致しない.
- $f(a)$ は定義されるとは限らないし, 定義されていても極限と一致するとは限らない.

例3.3

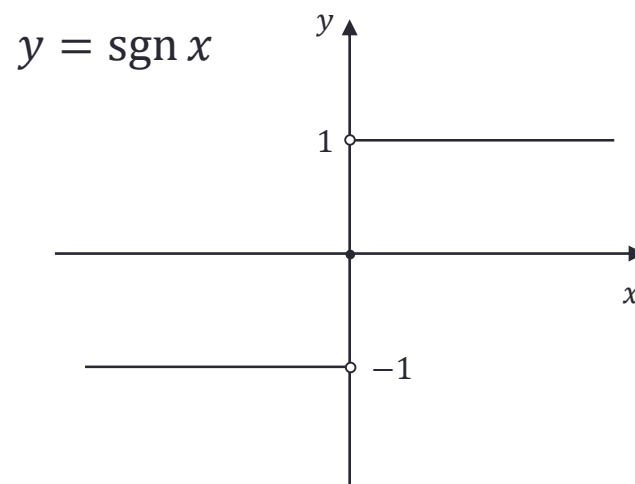
- $f(x) = \frac{1}{x}$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$



片側極限

例3.4

- $f(x) = \operatorname{sgn} x$
- $\operatorname{sgn} 0 = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn} x = 1$
- $\lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn} x = -1$



極限

定義3.5

- 関数 $f(x)$ の a における右極限と左極限が存在し、それらが一致するとき、その値を

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

と書いて、 $f(x)$ の a における**極限**という.

- つまり、 x が a にどのような近づき方をしても、その値があいまいなく定まるときに極限が定義される.
- 定義より、極限が存在するとき

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$$

極限(例)

例3.6

- 右極限と左極限が一致しないので, 極限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \qquad \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(x)$$

は存在しない.

例3.7

- 一方で

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

であるから, 極限が存在して

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

極限(問題)

問題3.8

- $\lim_{x \rightarrow +0} |x|, \lim_{x \rightarrow -0} |x|$ を求めよ.
- $\lim_{x \rightarrow 0} |x|$ は存在するか?

問題3.9

- $\lim_{x \rightarrow +0} \operatorname{sgn}(|x|), \lim_{x \rightarrow -0} \operatorname{sgn}(|x|)$ を求めよ.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn}(|x|)$ は存在するか?

問題3.10

- $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 - x}{|x|}, \lim_{x \rightarrow -0} \frac{x^2 - x}{|x|}$ を求めよ.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{|x|}$ は存在するか?

極限(注意事項)

注意3.11

- 「 x が a に近づくときに, $f(x)$ が α に収束する」を厳密に定義するには, ε - δ 論法を用いる必要がある.
- 本講義は入門的な位置づけなので, 厳密性にはあまりこだわらないで議論を進める.

注意3.12

- $f(a)$ が定義されていなくても, $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ などの極限は議論できる.
- $1/x$ の例からも分かるように, x の近くづく先 a が定義域に含まれている必要はない.
- しかし, a が f の定義域 D 内の点で近似できないと $f(x)$ の a における極限は定義できない.
- a は D もしくはその境界 ∂D に含まれる必要がある. (閉包 $\bar{D} = D \cup \partial D$)

発展: ε - δ 論法

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$

- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

- 任意の $K > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して
$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$

- 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $L > 0$ が存在して
$$x > L \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

- 任意の $K > 0$ に対して, ある $L > 0$ が存在して
$$x > L \Rightarrow f(x) > K$$

極限の性質

定理3.13

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ で $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. このとき
 - $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \alpha$
 - $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x) g(x) = \alpha \beta$
 - $\beta \neq 0$ であれば, $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$
 - a の近傍で $f(x) \leq g(x)$ であれば, $\alpha \leq \beta$
- 最後の主張は少し注意が必要で, a の近傍で $f(x) < g(x)$ であっても $\alpha < \beta$ とは限らない. ($f(x) < g(x)$ であれば $f(x) \leq g(x)$ なので, $\alpha \leq \beta$ は正しい.)

発展: 極限の性質(証明)

定理3.13(一部)

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ で $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. このとき
 - $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|x - a| < \delta$ ならば $|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ が存在することを示せばよい.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ であるから, $\frac{\epsilon}{2} > 0$ に対して, $\delta' > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta'$ ならば $|f(x) - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$ となる.
- $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ であるから, $\frac{\epsilon}{2} > 0$ に対して, $\delta'' > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta''$ ならば $|g(x) - \beta| < \frac{\epsilon}{2}$ となる.
- δ' と δ'' の小さい方を δ とすれば, $|x - a| < \delta$ であれば

三角不等式

$$|x| + |y| \geq |x + y|$$

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| &= |(f(x) - \alpha) + (g(x) - \beta)| \\ &\leq |f(x) - \alpha| + |g(x) - \beta| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \end{aligned}$$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|x - a| < \delta$ ならば $|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$

極限の性質(問題)

問題3.14

- 次を計算せよ.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + 3x + 5)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} (2x + 5) \operatorname{sgn}(|x|)$

問題3.15

- 0 の近傍で $f(x) < g(x)$ であり, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ となる関数 $f(x), g(x)$ を1つ見つけよ.

±∞ に対する極限

- これまでは $a \in \mathbb{R}$ に対して極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ を考えていたが, $a = \pm\infty$ に対しても同様の議論ができる. 次の定義は厳密には不十分であるが, この講義では特に問題にならない.

定義3.16

- x が十分に大きくなるとき, $f(x)$ が α に収束することを

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$$

- x が十分に小さいなるとき, $f(x)$ が α に収束することを

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha$$

と書く.

連続

定義3.17

- $f(x)$ が a で連続であるとは

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

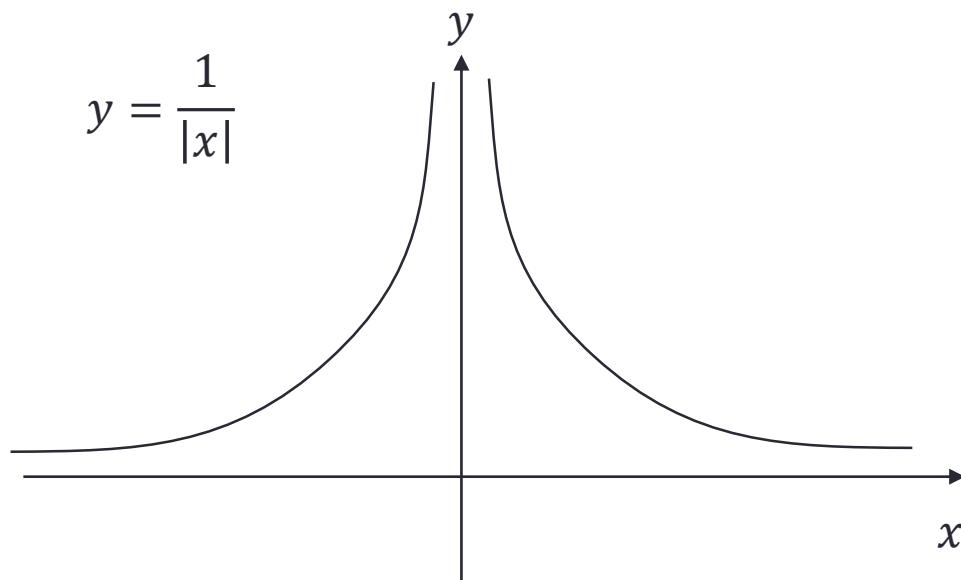
が成り立つ場合をいう. つまり, 極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在し, $f(a) \in \mathbb{R}$ が定義され, それらが一致する場合である.

- 連続でないとき, **不連続**であるという.
- $f(x)$ の定義域のすべての点において連続である場合, $f(x)$ は**連続関数**であるという.
- $f(x)$ が a で連続であるとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq \pm\infty$ であることに注意.

不連続

例3.18

- $1/x$ や $\text{sgn}(x)$ は 0 において不連続. ($x \neq 0$ では連続)
- $1/|x|$ は $1/|0|$ が定義されないから, 0 において不連続.
($\lim_{x \rightarrow 0} 1/|x| = +\infty$ でもある.)



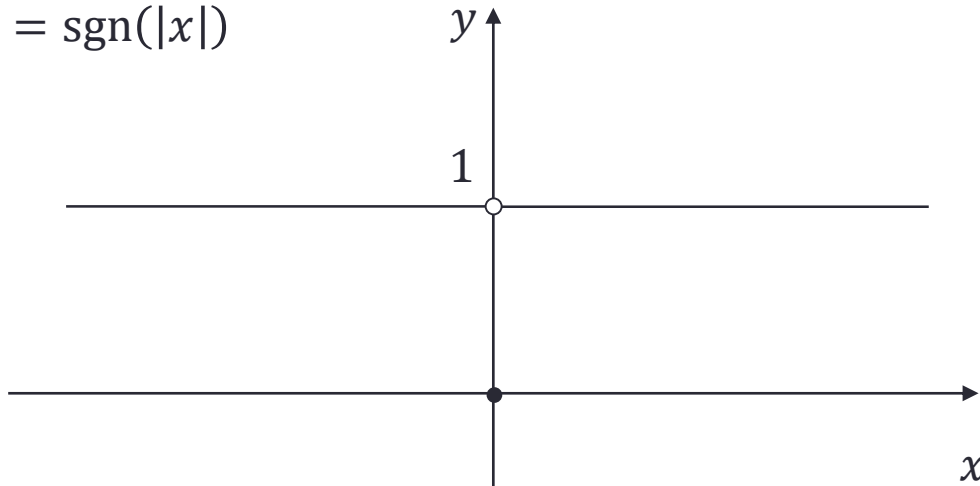
不連続

例3.19

- $\text{sgn}(|x|)$ は, $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(|x|)$ が存在し, $\text{sgn}(|0|)$ も定義されるが

$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(|x|) \neq \text{sgn}(|0|)$$

$$y = \text{sgn}(|x|)$$

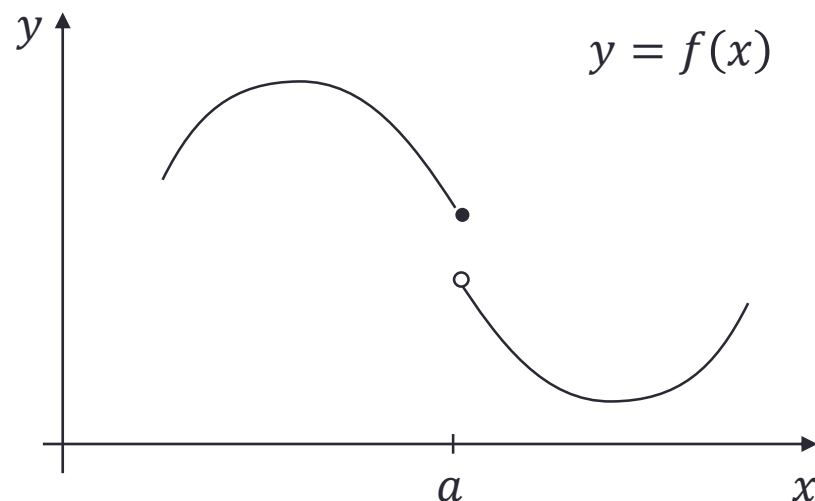
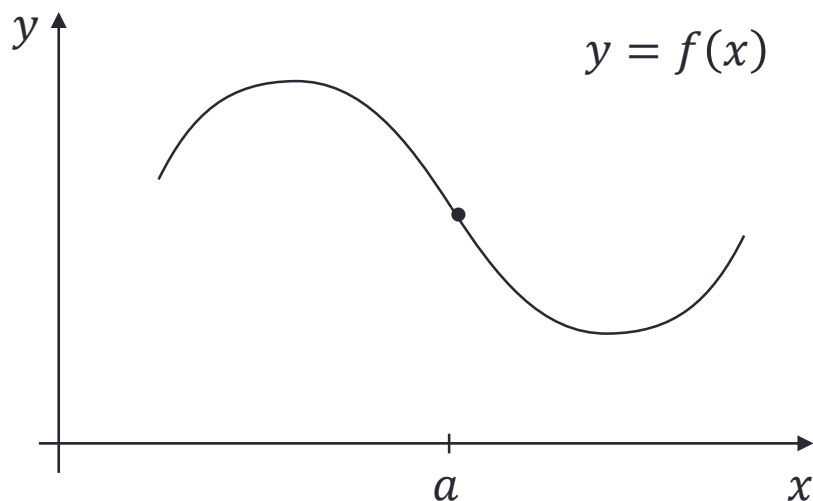


$$\lim_{x \rightarrow 0} \text{sgn}(|x|) = 1$$

$$\text{sgn}(|0|) = 0$$

連続関数の直感

- 関数 $f(x)$ が a において連続とは, $f(x)$ のグラフが $(a, f(a))$ でつながっているという直感を持てばよい.



- 左図の関数は a で連続, 右図の関数は a で不連続.
- 連続関数とは, グラフが(定義域において)つながっている. 左図のような関数.

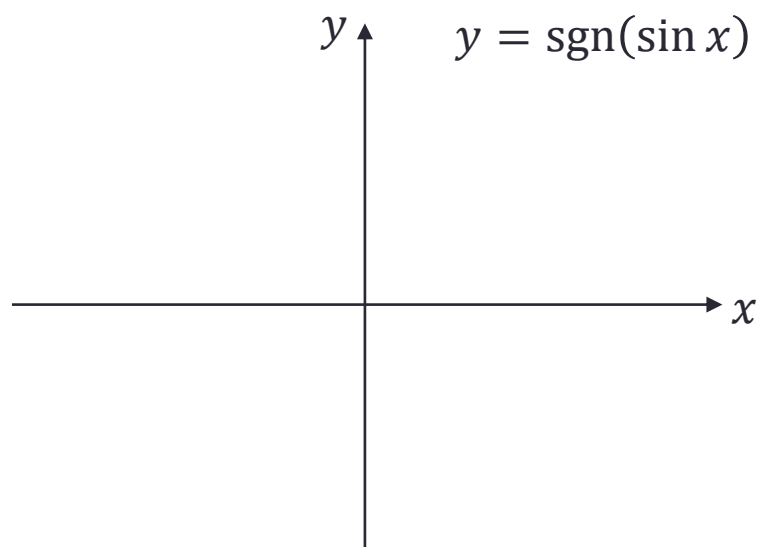
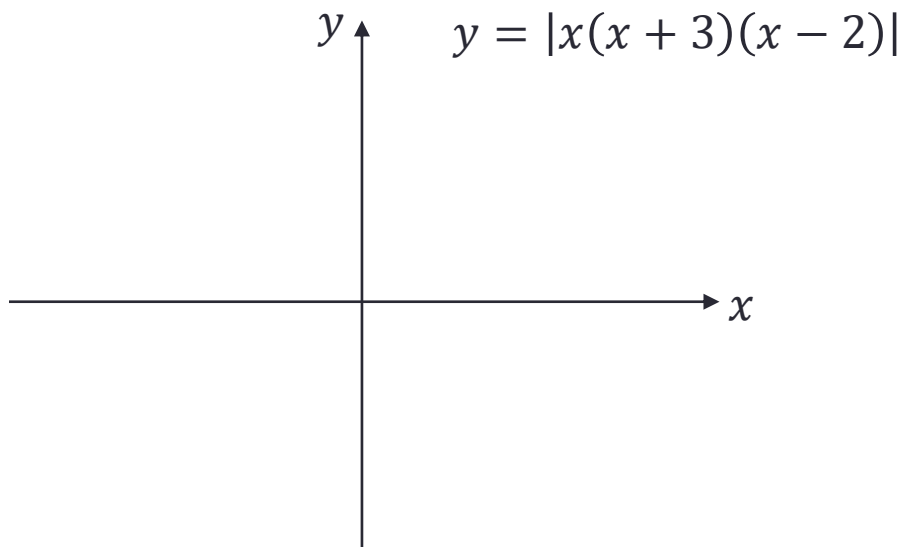
連続(問題)

問題3.20

• 次の関数のグラフを描け. また, これらは連続関数か?

1. $|x(x + 3)(x - 2)|$

2. $\operatorname{sgn}(\sin x)$



連続関数の加減乗除

定理3.21

- $f(x), g(x)$ が a において連続であるとする.
 - $c f(x), f(x) + g(x), f(x) g(x)$ は a において連続である.
 - $g(a) \neq 0$ であれば, $f(x)/g(x)$ は a において連続である.
- 恒等関数 $f(x) = x$ が連続関数であることから, 多項式関数および有理関数も(定義域において)連続関数である.
- 三角関数, 指数関数, 対数関数は連続関数であることが知られているため, $2 \sin x - 3 \log x$ や $e^x \cos x$ など連続関数である.

合成関数の連続性

定理3.22

- 関数 $f(x), g(x)$ に関して,
 - 関数 $g(x)$ は a において連続であり,
 - 関数 $f(x)$ の定義域が $g(a)$ を含み $g(a)$ において連続であるとき,
- 合成関数 $f(g(x))$ も a において連続である.

例3.23

- 次の関数は連続関数である.

$$\sin(x^3 + 5x + 2)$$

$$e^{x^3} + \log(x^2 + 1)$$

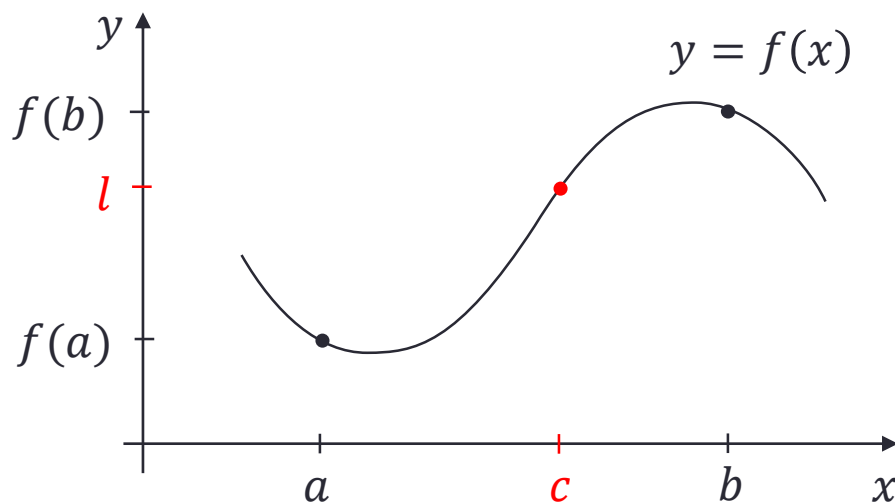
- 他にも, $\log(x + 1)$ は $x \leq -1$ で定義されないが, $x > -1$ において連続である.

中間値の定理

- 連続関数に関する最も重要な定理が、次の**中間値の定理**である.

定理3.24(中間値の定理)

- 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で, $f(a) < f(b)$ であるとき,
- 任意の $l \in (f(a), f(b))$ に対して, $l = f(c)$ となる点 $c \in (a, b)$ が存在する.



極限計算

- 定義より、関数が連続な点に関しては、極限値を単に代入して求めることができる。

例3.25

- $(x^2 + 2x - 3)/(x^2 - 1)$ は $x \neq \pm 1$ において連続であるから

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{3^2 + 2 \cdot 3 - 3}{3^2 - 1} = \frac{3}{2}$$

- 一方で、1 は $(x^2 + 2x - 3)/(x^2 - 1)$ の定義域に入っていないため、この点においてこの関数は連続でない。無理に代入すると

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1^2 + 2 \cdot 1 - 3}{1^2 - 1} = \frac{0}{0} \quad ??$$

- しかし、 $x \rightarrow 1$ において $x - 1 \neq 0$ であるから、次のように極限が求まる。

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 3}{x + 1} = \frac{1 + 3}{1 + 1} = 2$$

不定形

- 一般に, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$ といった形は**不定形**と呼ばれる.
- 特別な場合には, これらは数学的に意味を持ち, 計算可能である.

例3.26

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8}$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 - 10}{7x^3 + 5x + 2}$

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x^2)$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + 100} - \sqrt{x})$

不定形(例)

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x^2 + 2x + 4} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x^2 - 10}{7x^3 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{2}{x} - \frac{10}{x^3}}{7 + \frac{5}{x^2} + \frac{2}{x^3}} = \frac{4}{7}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x^2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \left(3 + \frac{2}{x} \right) = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+100} - \sqrt{x}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+100} - \sqrt{x})(\sqrt{x+100} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+100} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100}{\sqrt{x+100} + \sqrt{x}} = 0 \end{aligned}$$

不定形(問題)

問題3.27

• 次の極限を計算しなさい.

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{1 - x^2}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - x^2 - 4x + 3}{-x^3 + x^2 - x + 1}$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2 - x + 2}{-6x^3 + 2x^2 - 3x + 1}$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + 2x - 1}{x^3 + 4x^2 - x - 2}$

まとめ

1. 極限

- 右極限
- 左極限
- 極限
- 極限の性質

2. 連続

- 点連続
- 連続関数
- 中間値の定理

3. 不定形の極限

発展：中間値の定理(証明)

定理3.24(中間値の定理)

- 関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で, $f(a) < f(b)$ であるとき, 任意の $l \in (f(a), f(b))$ に対して, $l = f(c)$ となる点 $c \in (a, b)$ が存在する.

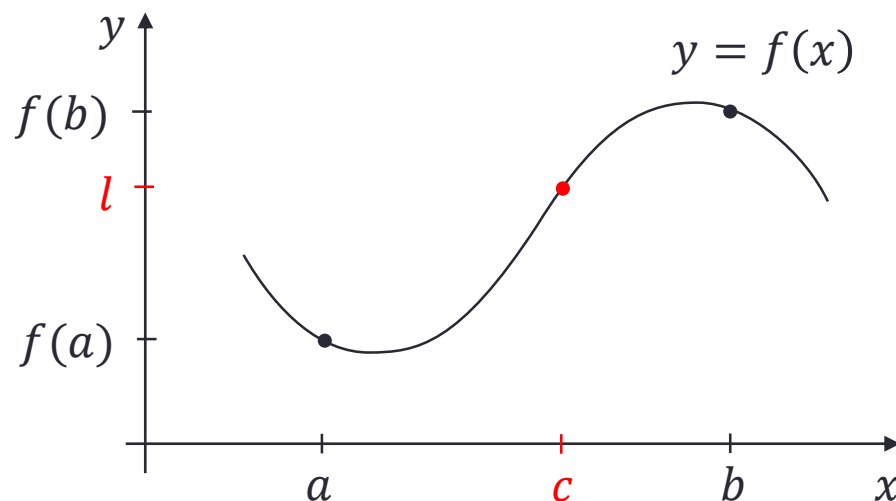
- 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を次のように定義する.

- $a_1 = a, b_1 = b$

- $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ としたとき,

- $f(c_n) \leq l$ ならば, $a_{n+1} = c_n, b_{n+1} = b_n$

- $f(c_n) > l$ ならば, $a_{n+1} = a_n, b_{n+1} = c_n$



発展: 中間値の定理(証明)(つづき)

- 次が成り立つ

$$\textcircled{1} \quad a = a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1 = b$$

$$\textcircled{2} \quad b_n - a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b - a)$$

$$\textcircled{3} \quad f(a_n) \leq l < f(b_n)$$

- 上に有界な非減少数列は収束する(上限が存在する)ので, $\textcircled{1}$ より数列 $\{a_n\}$ は収束し $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とする.
- 同様に下に有界な非増加数列 $\{b_n\}$ も収束し $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とする.
- $\textcircled{2}$ より $\beta = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (b - a) \right) = \alpha$
- $\beta = \alpha = c$ とすると, $\textcircled{3}$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) = l$
- したがって $f(c) = l$ となる $c \in (a, b)$ が存在する. (QED)

発展: 極限の性質(証明)

定理3.13(一部)

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ のとき
 - $\lim_{x \rightarrow a} c f(x) = c \alpha$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|x - a| < \delta$ ならば $|c f(x) - c \alpha| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ が存在することを示せばよい.
- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ であるから, $\frac{\epsilon}{|c|} > 0$ に対して, $\delta > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \frac{\epsilon}{|c|}$ となる.
- したがって

$$\begin{aligned} |c f(x) - c \alpha| &= |c (f(x) - \alpha)| \\ &= |c| |f(x) - \alpha| \\ &< |c| \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon \end{aligned}$$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|x - a| < \delta$ ならば $|c f(x) - c \alpha| < \epsilon$ (QED)

発展: 極限の性質(証明)

定理3.13(一部)

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ で $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. このとき
 - $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x)g(x) - \alpha\beta| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ が存在することを示せばよい.
- $\epsilon' = \frac{\epsilon}{|\alpha| + |\beta| + 1}$ としたとき(さらに $\epsilon' < 1$ となるようにする), $\epsilon' > 0$ にたいして, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ であるから, $\delta' > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta'$ ならば $|f(x) - \alpha| < \epsilon'$ となる.
- 同様に $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ であるから, $\epsilon' > 0$ にたいして, $\delta'' > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta''$ ならば $|g(x) - \beta| < \epsilon'$ となる.
- δ' と δ'' の小さい方を δ とすれば, $|x - a| < \delta$ であれば

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - \alpha\beta| &= |f(x)(g(x) - \beta) + (f(x) - \alpha)\beta| \leq |f(x)||g(x) - \beta| + |f(x) - \alpha||\beta| \\ &= |(f(x) - \alpha) + \alpha||g(x) - \beta| + |f(x) - \alpha||\beta| < (\epsilon' + |\alpha|)\epsilon' + \epsilon'|\beta| \\ &< (\epsilon' + |\alpha| + |\beta|)\epsilon' < (1 + |\alpha| + |\beta|)\epsilon' = \epsilon \end{aligned}$$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|x - a| < \delta$ ならば $|(f(x) + g(x)) - (\alpha + \beta)| < \epsilon$ (QED)

発展: 極限の性質(証明)

定理3.13(一部)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta \text{ で } \beta \neq 0 \text{ のとき } \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\beta}$$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|x - a| < \delta$ ならば $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta} \right| < \epsilon$ となる $\delta > 0$ が存在することを示せばよい.
- $\epsilon' = \frac{|\beta|^2 \epsilon}{2}$ としたとき (さらに $\epsilon' < \frac{|\beta|}{2}$ とする), $\epsilon' > 0$ に対して, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ であるから, $\delta > 0$ が存在し, $|x - a| < \delta$ ならば $|g(x) - \beta| < \epsilon' < \frac{|\beta|}{2}$ となる.

$$|g(x)| = |(g(x) - \beta) + \beta| \geq |\beta| - |g(x) - \beta| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2}$$

- したがって

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta} \right| = \left| \frac{\beta - g(x)}{g(x)\beta} \right| = \frac{|\beta - g(x)|}{|g(x)||\beta|} < \frac{2\epsilon'}{|\beta|^2} = \epsilon$$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $|x - a| < \delta$ ならば $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{\beta} \right| < \epsilon$ (QED)
- このことと, 一つ前の掛け算に関する性質から, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ で $\beta \neq 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/g(x) = \alpha/\beta$ であることを示すことができる.

三角不等式

$$\begin{aligned} |x| + |y| &\geq |x + y| \\ |x + y| + |-y| &\geq |x| \\ |x + y| &\geq |x| - |y| \end{aligned}$$

発展: 極限の性質(証明)

定理3.13(一部)

- $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ で $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とする. このとき
 - a の近傍で $f(x) \leq g(x)$ であれば, $\alpha \leq \beta$

- 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ が存在し $|x - a| < \delta$ ならば $|f(x) - \alpha| < \epsilon$ および $|g(x) - \beta| < \epsilon$ となる.
- $|x - a| < \delta$ は a の近傍なので $g(x) - f(x) \geq 0$

$$\begin{aligned} \beta - \alpha &= (\beta - g(x)) - (\alpha - f(x)) + (g(x) - f(x)) \\ &\geq (\beta - g(x)) - (\alpha - f(x)) \\ &> -\epsilon - \epsilon = -2\epsilon \end{aligned}$$
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\beta - \alpha > -2\epsilon$ となるので $\beta \geq \alpha$ である. (QED)

発展: 連続関数の性質

定理3.28

- 連続関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ ($a < b$) において最大値および最小値を持つ.
- 最大値が存在することだけを示せば, $-f(x)$ を考えることで最小値を持つことが分かる.
- この証明には実数に関する次のボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理が必要になる.

定理3.29 (ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理)

- 数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ が有界のとき, これは収束部分列を持つ.
- 数列 $\{a_n\}$ が有界であるとは, ある $K > 0$ が存在して $|a_n| < K$ ($n \geq 1$) が成り立つことである.

発展: ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理 (証明)

定理3.29(ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理)

- 数列 $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$ が有界のとき, これは収束部分列を持つ.
- 有界であるから, $\{a_n\} \subset [p_1, q_1]$ となる $p_1 < q_1$ が存在する.
- 以下のように $\{p_m\}, \{q_m\}$ を定める.
- $r_m = \frac{p_m + q_m}{2}$ としたとき, $L_m = \{a_n \mid a_n \in [p_m, r_m]\}$ あるいは $U_m = \{a_n \mid a_n \in [r_m, q_m]\}$ のどちらかは無限集合.
- L_m が無限集合の場合には, $p_{m+1} = p_m, q_{m+1} = r_m$ とし, U_m が無限集合の場合には, $p_{m+1} = r_m, q_{m+1} = q_m$ とする. 両方ともが無限集合の場合には, どちらでもよい.
- $[p_1, q_1] \supset [p_2, q_2] \supset \cdots \supset [p_m, q_m] \supset \cdots$ であり, $[p_m, q_m]$ 無限個の a_n を含む.
- $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_m \leq \cdots \leq q_m \leq \cdots \leq q_2 \leq q_1$ であるから, $\{p_m\}$ および $\{q_m\}$ はそれぞれ有界な非減少および非増加数列であり, 実数の性質から収束する(上限および下限が存在する).
- $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p, \lim_{m \rightarrow \infty} q_m = q$ とすると, $q_m - p_m = \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1} (q_1 - p_1)$ であるから, $p = q$
- $[p_m, q_m]$ は無限個の a_n を含むため, $a_{n_m} \in [p_m, q_m]$ を $n_1 < n_2 < \cdots < n_m < \cdots$ となるように選ぶことができる.
- $p_m \leq a_{n_m} \leq q_m$ であり, $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = \lim_{m \rightarrow \infty} q_m = p$ であるから $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} = p$ である.
- $\{a_{n_m}\}$ は $\{a_n\}$ の収束部分列である. (QED)

発展: 連続関数の性質(証明)

定理3.28

- 連続関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ ($a < b$) において最大値を持つ.
- $\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ の上限を M とする. 上限が存在しない場合には $M = \infty$.
- 上限の性質から, ある点列 $\{a_n\} \subset [a, b]$ が存在して, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = M$
- ボルツァノ-ワイエルシュトラスの定理より, $\{a_n\}$ は収束する部分列 $\{a_{n_m}\}$ を持つ.
- $\lim_{m \rightarrow \infty} a_{n_m} = a$ とすると, 連続性により, $\lim_{m \rightarrow \infty} f(a_{n_m}) = f(a) = M$
- したがって, $M < \infty$ であり, $f(x)$ は a において最大値を持つ. (QED)