微分・積分
第4回「微分の基礎」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. 平均変化率，微分係数，接線の傾き

2. 導関数，導関数の性質

極限の別表示

- 前回，関数 $f(x)$ の a における極限を，

$$\lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \alpha$$

であるときに，$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$ と定義した．

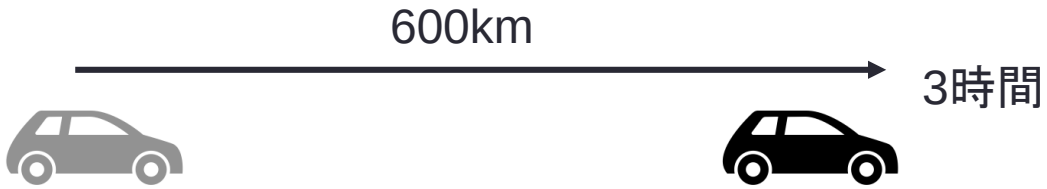
- 上記の条件は，$x = a + h$ と表すと，

$$\lim_{h \to +0} f(a+h) = \lim_{h \to -0} f(a+h) = \alpha$$

と同値であり，これを $\lim_{h \to 0} f(a+h) = \alpha$ と書く．

- 今回の講義では後者の記号を用いる．

平均変化率



問題4.1

- 600km の移動に 3 時間かかったとき，速度は何 km/h だろうか?

- 答えは簡単で，

$$\frac{600\ \mathrm{km}}{3\ \text{時間}} = 200\ \mathrm{km/h}$$

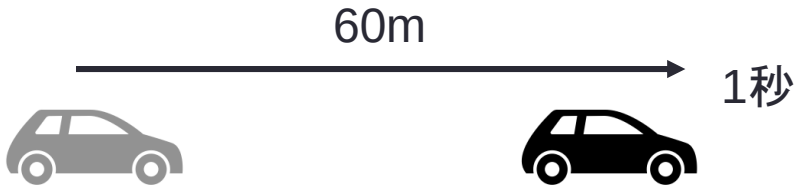
  と答えたくなる.

- しかしながら，これは平均速度であり，常に一定の速度で移動するとは限らない．つまり，ある特定の時刻での速度は必ずしも 200 km/h になるとは限らない.

- この問題設定からは，平均速度しか求めることができない.

平均変化率

問題4.2
- 出発からちょうど1時間後の速度はどのように求めれば良いだろうか?



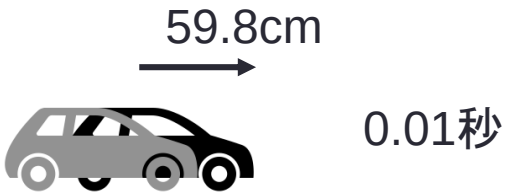
- 出発してから1時間後において，1秒間に60m移動していたとすると，

$$\frac{60\ \mathrm{m}}{1\ \text{秒}} = \frac{0.06\ \mathrm{km}}{1/3600\ \text{時間}} = 216\ \mathrm{km/h}$$

と答えたくなる.

- しかしながら，時間スケールを変えただけで，状況は先の問題と変わっていない.
- これは1秒間の平均速度であり，1秒間の間に速度が変化している可能性がある.

平均変化率



- 時間をさらに細かく刻んで 0.01 秒間にどれだけ移動したかを計測したところ，59.8cm 移動したことが判明した．
- すると，この 0.01 秒間の平均速度は

$$\frac{59.8\text{cm}}{0.01\text{秒}} = \frac{0.000598\text{km}}{1/360000\text{時間}} = 215.28\text{km/h}$$

となる．

- もちろん，この 0.01 秒間の間に速度が変化している可能性があるが，良い近似になっていることが期待される．

平均変化率

- 一般に，時間軸をどんどん短くすることで，その時刻での速度をより正確に測定できることが期待される．
- つまり，ある時刻での速度は，

$$\frac{\text{微小な位置の変化}}{\text{微小な時間の変化}}$$

の極限として得られると考えられる．

- このような極限を扱う理論が，微分である．

微分係数

定義4.3

- 関数 $f(x)$ の定義域を D とする.
- 点 $a \in D$ に関して，極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき，$f(x)$ は a で微分可能であるといい，$f'(a)$ で表す.

- $f'(a)$ は $f(x)$ の a における微分係数と呼ばれる.

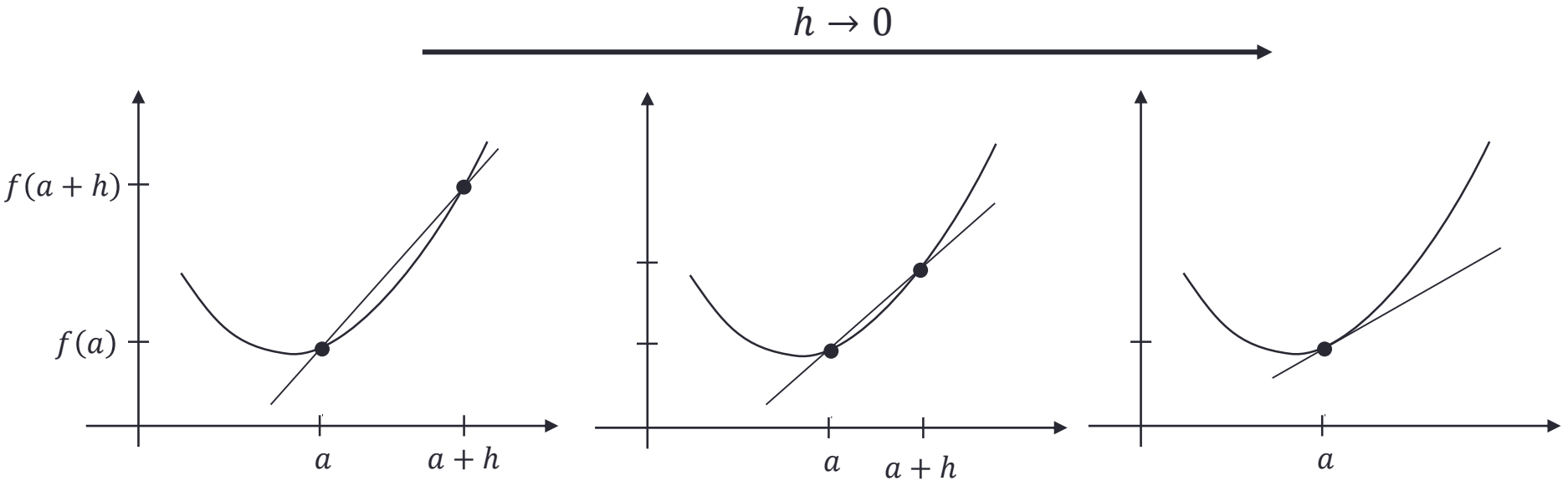
- $f(x)$ が a で微分可能ならば，$f(x)$ は a で連続であることが分かるが，その逆は一般には成立しない.

微分係数と接線の傾き

- 微分係数

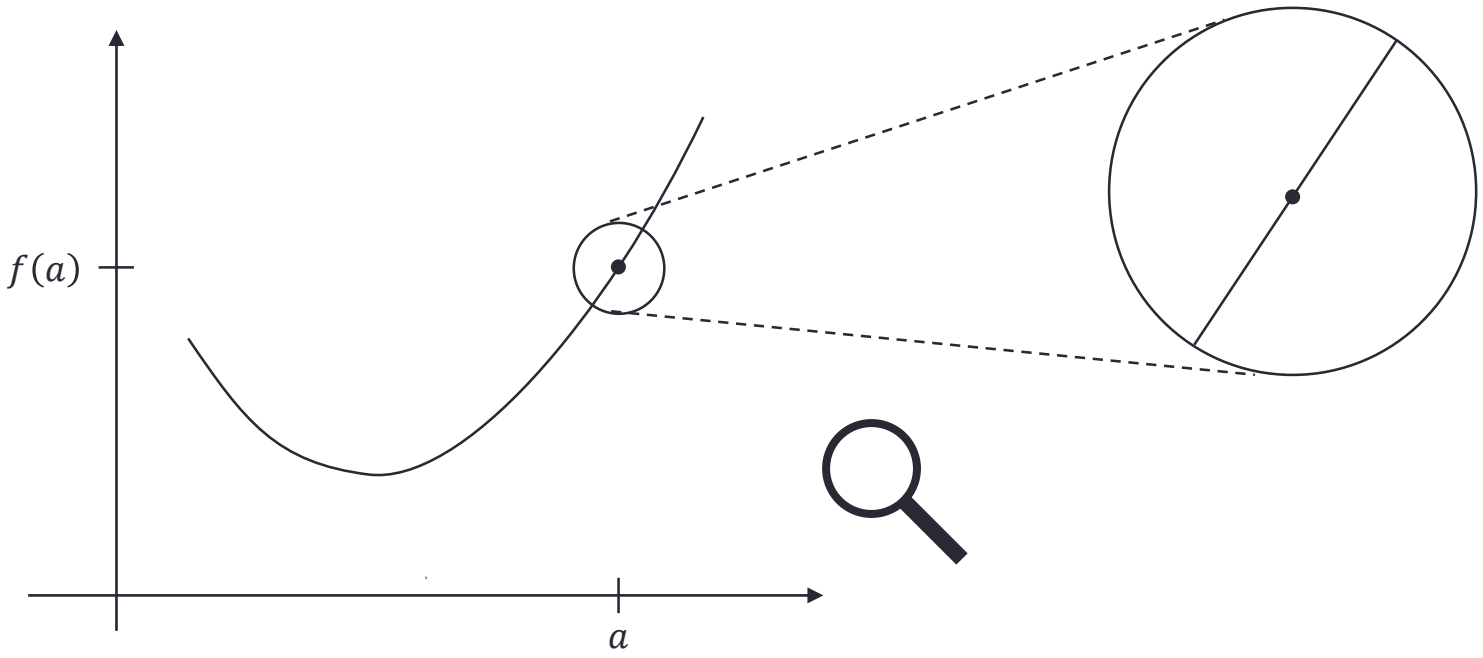
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

は $f(x)$ のグラフの点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線の傾きとみなすことができる.



微分可能性

- 関数 $f(x)$ が a において微分可能であることは，$f(x)$ のグラフが点 $\big(a, f(a)\big)$ における接線が定義できるくらいなめらかであることを意味する.
- 点 $\big(a, f(a)\big)$ の近傍でグラフが直線のように見えるともいえる.



導関数

定義4.4

- 関数 $f(x)$ がその定義域 D の任意の点において微分可能であるとする.
- $a \in D$ に対して，その点における微分係数 $f'(a)$ を返す関数

$$f' : D \to \mathbb{R}, \quad a \mapsto f'(a)$$

を $f(x)$ の導関数と呼び，$f'(x)$ を求めることを $f(x)$ を微分するという.

- $f'(x)$ は $\frac{df}{dx}(x)$ と書かれる場合もある.

導関数(x, x^2)

例4.5

- $f(x) = x$ の導関数を定義に従って計算する.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

$f(x) = x$ のグラフの点 (a, a) における接線の傾きは 1.

- $f(x) = x^2$ の導関数を定義に従って計算する.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2hx + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h) = 2x$$

$f(x) = x^2$ のグラフの点 (a, a^2) における接線の傾きは $2a$.

導関数(x^3)

問題4.6

- $f(x) = x^3$ の導関数を定義に従って計算せよ. つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

を求めよ.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3hx^2 + 3h^2x + h^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2) = 3x^2$$

- $f(x) = x^3$ のグラフの点 (a, a^3) における接線の傾きは $3a^2$.

導関数(x^n)

定理4.7

- $n \in \mathbb{N}$ に対して，$f(x) = x^n$ の導関数は $f'(x) = n\,x^{n-1}$ である．

- $f(x) = x^n$ の導関数を定義にしたがって計算すると

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{n\,h\,x^{n-1} + \dfrac{n(n-1)}{2} h^2 x^{n-2} + \cdots + h^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(n\,x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} h\,x^{n-2} + \cdots + h^{n-1} \right)$$

$$= n\,x^{n-1}$$

- $f(x) = x^n$ のグラフの点 (a, a^n) における接線の傾きは $n\,a^{n-1}$．

導関数(定数)

定理4.8

- 定数関数 $f(x) = c$ の導関数は $f'(x) = 0$ である.

- $f(x) = c$ の導関数を定義にしたがって計算すると

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

- $f(x) = c$ のグラフの点 (a, c) における接線の傾きは 0.

微分の性質

定理4.9

- $f(x), g(x)$ を（共通の定義域で）微分可能な関数とする.

1. $\big(a\,f(x)+b\,g(x)\big)' = a\,f'(x)+b\,g'(x) \qquad (a,b\in\mathbb{R})$
2. $\big(f(x)\,g(x)\big)' = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$
3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$

- これから

$$(f(x)^2)' = 2f'(x)\,f(x) \qquad \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}$$

などが分かる.

多項式の微分

- 定理4.9を使うと，多項式の導関数は簡単に計算できる．

例4.10

- $(3x^2 - 5x + 1)' = 6x - 5$
- $(x^4 - 15x^2 + 5x + \pi)' = 4x^3 - 30x + 5$
- $(-x^{100} + 57x^2 + \pi\, x + \log_2 7)' = -100x^{99} + 114x + \pi$

- 関数のグラフが描けなくても，接線の傾きはすぐ分かる．

積の微分

例4.11

- $(x^3+5)(4x+1)$ の導関数を2通りの方法で計算する.
- 定理4.9(2)を使うと

$$\begin{aligned}\big((x^3+5)(4x+1)\big)' &= (x^3+5)'(4x+1)+(x^3+5)(4x+1)' \\ &= 3x^2(4x+1)+(x^3+5)\cdot 4 \\ &= 16x^3+3x^2+20\end{aligned}$$

- 微分の計算の前に展開すれば

$$\begin{aligned}\big((x^3+5)(4x+1)\big)' &= (4x^4+x^3+20x+5)' \\ &= 16x^3+3x^2+20\end{aligned}$$

導関数$(1/x^n)$

定理4.12

- 有理関数 $f(x)=\frac{1}{x^n}$ の導関数は $f'(x)=\frac{-n}{x^{n+1}}$ である.

- 逆数の微分公式 $\left(\frac{1}{g(x)}\right)'=-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$ を用いると

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{(x^n)'}{(x^n)^2}=-\frac{n\,x^{n-1}}{x^{2n}}=\frac{-n}{x^{n+1}}$$

定理4.13

- $n\in\mathbb{Z}$ に対して, $f(x)=x^n$ の導関数は $f'(x)=n\,x^{n-1}$ である.

微分可能なら連続

定理4.14

- 関数 $f(x)$ は a で微分可能であれば，連続である.

- 実際

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \text{ が有限の値として存在}$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h)-f(a)=0$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0} f(a+h)=f(a)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \text{ が存在してその値が } f(a) \text{ と一致する}$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ が } x=a \text{ で連続}$$

- 対偶を考えれば，「a で連続でなければ，微分可能ではない」とも表現できる.

導関数の非存在

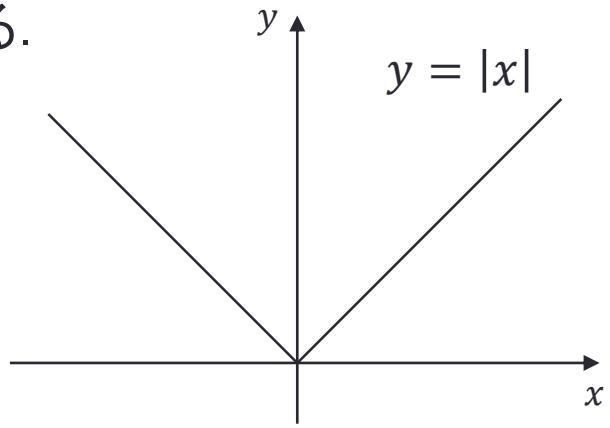
- 関数 $f(x)$ は $x = a$ で連続でなければ微分可能でないが，連続であっても微分可能とは限らない．

例4.15

- $f(x) = |x|$ は $x = 0$ で微分不可能である．
- 直感的には，$x = 0$ で接線が引けないからである．
- $f(x) = |x|$ が $x = 0$ で微分可能であれば，極限

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$$

が存在するはずであるが．



$$\lim_{h \to +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\lim_{h \to -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to -0} \frac{|h|}{h} = \lim_{h \to +0} \frac{-h}{h} = -1$$

となり右極限と左極限は一致しない．

導関数の計算

問題4.16

- $(3x^2+5)(x^3+x)$ の導関数を（1）展開してから計算，（2）積の微分公式を用いて計算，の2通りで求め，答えが一致することを確かめよ.

問題4.17

- $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ の導関数を計算せよ.

問題4.18

- $\frac{x}{x+1}-(x+1)(x^2-4)$ の導関数を計算せよ.

まとめ

1. 平均変化率，微分係数，接線の傾き

2. 導関数，導関数の性質

発展：定理4.9(1)の証明

- 公式 $\big(f(x)+g(x)\big)' = f'(x)+g'(x)$ を証明する.

$$\begin{aligned}\big(f(x)+g(x)\big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(x+h)+g(x+h)\big)-\big(f(x)+g(x)\big)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)\ +\ g'(x)\end{aligned}$$

- 公式 $\big(a\,f(x)\big)' = a\,f'(x)$ を証明する.

$$\begin{aligned}\big(a\,f(x)\big)' &= \lim_{h\to 0}\frac{a\,f(x+h)-a\,f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}a\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= a\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ = a\,f'(x)\end{aligned}$$

発展：定理4.9(2)の証明

- 公式 $\big(f(x)\,g(x)\big)' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$ を証明する.

$$\big(f(x)\,g(x)\big)'$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x+h)}{h} + \frac{f(x)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$$= f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

発展：定理4.9(3)の証明

- 公式 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ を証明する.
- $f(x) = \frac{f(x)}{g(x)}g(x)$ に積の微分の公式を適用すると

$$f'(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}g(x)\right)' = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' g(x) + \frac{f(x)}{g(x)}g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' g(x) = f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)}g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

発展：実数の構成

- 自然数から始まり有理数までは具体的に構成することが比較的簡単ではあるが，実数はどのように構成するのか?

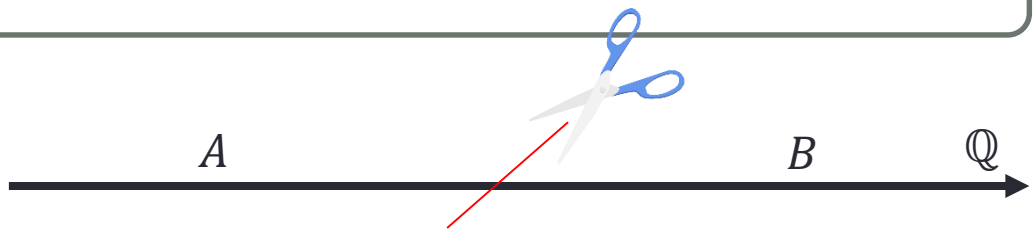
定義4.19

- 実数は有理数を完備化したものである.
  - 完備化＝上に有界である集合は上限を持つ.
  - 構成方法はいくつか知られているが，どれも同値である.

定義4.20（デデキント切断）

- 有理数 $\mathbb{Q}$ のデデキント切断とは，以下を満たす集合の組 $\langle A, B \rangle$ のことである.
  - $A \cup B = \mathbb{Q}, A \cap B = \emptyset, A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$
  - $a \in A, b \in B$ にたいして $a < b$

- デデキント切断は有理数を大小2つの部分に切断したものである.



発展：デデキント切断

定理4.21

- デデキント切断は次の3つに分類される.

1. A は最大元を持ち，B は最小元を持たない.
2. A は最大元を持たず，B は最小元を持つ.
3. A は最大元を持たず，B も最小元を持たない.

- $r \in \mathbb{Q}$ のとき，$\langle \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leq r\}, \{b \in \mathbb{Q} \mid b > r\} \rangle$ は上記1の場合である.
- $r \in \mathbb{Q}$ のとき，$\langle \{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}, \{b \in \mathbb{Q} \mid b \geq r\} \rangle$ は上記2の場合である.
- たとえば，$\langle \{a \in \mathbb{Q} \mid a^2 \leq 2 \vee a < 0\}, \{b \in \mathbb{Q} \mid b^2 > 2 \wedge b > 0\} \rangle$ は上記3の場合である.
- 上記1と2の場合を有理数と同一視し，$r \in \mathbb{Q}$ に対して上記は同じ有理数を表すため，上記2の場合は考えないことにする.
- 上記3の場合が無理数である.
- 実数 $\mathbb{R}$ を次のように定義する.

定義4.22

- 実数 $\mathbb{R} = \{\langle A, B \rangle \mid \langle A, B \rangle$ は $\mathbb{Q}$ のデデキント切断であり A は最大限を持たない$\}$

発展：デデキント切断の完備性

定義4.23

- $\langle A_1, B_1 \rangle \leq \langle A_2, B_2 \rangle$ を $A_1 \subseteq A_2$ で定義する.

定理4.24

- 上の有界な $\mathbb{R}$ の部分集合は上限を持つ.

- S を上の有界な $\mathbb{R}$ の部分集合とするとき
  - $A' = \bigcup_{\langle A,B \rangle \in S} A$
  - $B' = \bigcap_{\langle A,B \rangle \in S} B$

  とすれば，$\langle A', B' \rangle$ はデデキント切断であり，S の上限となっている.

- $\mathbb{R}$ を本当の実数にするには，四則演算なども定義する必要がある.

- デデキント切断以外にも，収束する $\mathbb{Q}$ のコーシー列によっても実数を定義する方法もある．その他，複数が知られているが，すべて同値である.