微分・積分
第5回「微分（1）」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

1. 三角関数，指数関数，対数関数の微分

2. 合成関数の微分，対数微分

三角関数の微分(準備)

- 三角関数の微分を議論するために必要な準備を行う.

定理5.1

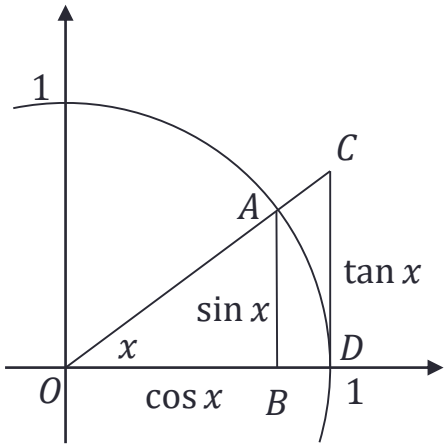
1. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$
2. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

- $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ において, 扇形 AOD と三角形 AOB と三角形 COD の面積を比べると

$$\frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\tan x$$

- $\dfrac{1}{2}\sin x$ で割ると

$$\cos x<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$$



三角関数の微分（準備）

- 逆数を取ると

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$$

であるから

$$\lim_{x\to 0} \cos x \leq \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}$$

- $\lim_{x\to 0} \cos x = 1$ であり $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ であるから，挟み撃ちの定理により $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ より

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x}$$

であるから

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{1+\cos x} \right) = 1 \cdot \frac{0}{1+1} = 0$$

三角関数の微分

定理5.2

1. $(\sin x)' = \cos x$
2. $(\cos x)' = -\sin x$
3. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

- 三角関数の加法定理より

$$\begin{aligned}\sin(x+h) - \sin x &= \sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x \\ &= \cos x \cdot \sin h + \sin x \cdot (\cos h - 1)\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}(\sin x)' &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \left(\cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \frac{\cos h - 1}{h} \right) \\ &= \cos x \cdot 1 + \sin x \cdot 0 = \cos x\end{aligned}$$

三角関数の微分

- 三角関数の加法定理より

$$\cos(x+h)-\cos x=\cos x\cdot\cos h-\sin x\cdot\sin h-\cos x$$
$$=\cos x\,(\cos h-1)-\sin x\cdot\sin h$$

であるから

$$(\cos x)'=\lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\cos h-1}{h}-\sin x\frac{\sin h}{h}\right)$$
$$=\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

- 商の微分の公式より

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x}$$
$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

三角関数の微分（問題）

問題5.3

- 次の関数の導関数を求めよ.

1. $\sin^2 x$
2. $\sin^3 x$
3. $\sin x \cdot \cos x$
4. $\dfrac{\cos x}{x}$

ネイピア数

定義5.4

- ネイピア数 e を次の式で定義する.

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

- e の値は 2.718281828 ... の無理数であることが知られている.

- 上の式で e が定義できるためには, $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が収束することを示さなくてはならないが, 数列 $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が単調増加で, $a_n < 3$ であることから示すことができる.
- また, $e = \lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ と定義しても同じになる.
- そのため, $e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ とも同値である.
- 二項定理を使って展開することで, $e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$ であることが分かる.

指数関数と対数関数（準備）

- 指数関数と対数関数の微分を議論するために必要な準備を行う.

定理5.5

1. $\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$
2. $\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$

- まず，(2)を示す.

（対数関数の連続性）

$$\lim_{h\to 0}\frac{\log(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\log(1+h)^{\frac{1}{h}}\overset{\downarrow}{=}\log\left(\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}\right)=\log e=1$$

- 次に，(1)を示す. $t=e^h-1$ とおくと，$h\to 0$ のとき $t\to 0$ である.
- また，$e^h=1+t$ より $h=\log(1+t)$ であるから，(2)より

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log(1+t)}=1$$

指数関数の微分

- 指数関数 e^x は微分しても不変であるという特殊な性質を持つ.

定理5.6

$$(e^x)' = e^x$$

- 定理5.5(1)より

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x$$

- 微分して不変な関数は e^x の定数倍しかないことも知られている.
- つまり, 微分方程式 $f'(x) = f(x)$ の解は $f(x) = C \cdot e^x$ の形(Cは定数)となる.
- 底が e でない場合は講義の後半で扱う.

対数関数の微分

定理5.7

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

- 定理5.5(2)より

$$(\log x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log\left(1 + \frac{h}{x}\right) \qquad \left(t = \frac{h}{x} \text{ とおく}\right)$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1}{tx} \log(1+t) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{x} \frac{\log(1+t)}{t}$$

$$= \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x}$$

合成関数

定義5.8

- 関数 $g\colon D \to \mathbb{R},\ x \mapsto g(x)$ と $f\colon E \to \mathbb{R},\ y \mapsto f(y)$ で，像 $\operatorname{Img} g$ が E に含まれる場合，**合成関数**

$$f \circ g\colon D \to \mathbb{R},\quad x \mapsto f\big(g(x)\big)$$

を考えることができる．

- これは合成写像の特別な場合であるが，関数であることを強調して $f\big(g(x)\big)$ という記号を使うことが多い．

合成関数の微分

定理5.9

- $f(y), g(x)$ が微分可能であれば，合成関数 $f\big(g(x)\big)$ も微分可能で

$$\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)$$

- $y = g(x), z = f(y)$ とすれば

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

  と表現することも可能.

- 導関数は分数ではないが，形式的に約分できると思うと，右辺から左辺が得られる.

合成関数の微分の大雑把な証明

- 十分小さな h に関して $k = g(x+h) - g(x) \neq 0$ を仮定する.
- $g(x)$ の連続性より, $h \to 0$ で $k \to 0$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\Big(f\big(g(x)\big)\Big)' &= \lim_{h\to 0} \frac{f\big(g(x+h)\big) - f\big(g(x)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f\big(g(x+h)\big) - f\big(g(x)\big)}{g(x+h) - g(x)} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f\big(g(x)+k\big) - f\big(g(x)\big)}{k} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x)
\end{aligned}$$

- 仮定が成立しない場合もあるので, 厳密な証明としては不十分.

発展：合成関数の微分の証明（厳密版）

- 一般に，$f(x)$ が a で微分可能なとき，関数 $\delta(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a)$ とおくと，$\lim_{x\to a} \delta(x) = 0$ であり，

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \delta(x)(x-a)$$

- a を $g(x)$, x を $g(x+h)$ に置き換えることで

$$f\big(g(x+h)\big) = f(g(x)) + f'\big(g(x)\big)\big(g(x+h) - g(x)\big) + \delta\big(g(x+h)\big)\big(g(x+h) - g(x)\big)$$

- これより

$$\frac{f\big(g(x+h)\big) - f\big(g(x)\big)}{h} = f'\big(g(x)\big)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \delta\big(g(x+h)\big)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

- $h \to 0$ としたとき，右辺の第1項は $f'\big(g(x)\big)\cdot g'(x)$ に，第2項は 0 に収束する．

合成関数の微分（例）

例5.10

- $\left((5x^2+3)^9\right)'$ を計算することを考える.
- もちろん，展開してから微分しても良いが，計算が面倒である.
- 今，$f(y)=y^9$ と $g(x)=5x^2+3$ とすると，$f\left(g(x)\right)=(5x^2+3)^9$ となることから

$$\left((5x^2+3)^9\right)' = (y^9)' \qquad (y=g(x) \text{ とおいた})$$
$$= 9y^8 \cdot y'$$
$$= 9(5x^2+3)^8 \cdot 10x$$
$$= 90x(5x^2+3)^8$$

合成関数の微分（例）

例5.11

- $\left(e^{3x^2+7}\right)'$ を計算することを考える.
- $f(y)=e^y$ と $g(x)=3x^2+7$ とすると, $f\left(g(x)\right)=e^{3x^2+7}$ となることから

$$\left(e^{3x^2+7}\right)' = (e^y)' \qquad (y=g(x) \text{ とおいた})$$
$$= e^y \cdot y'$$
$$= e^{3x^2+7} \cdot 6x$$
$$= 6xe^{3x^2+7}$$

合成関数の微分（問題）

問題5.12

- 次の関数の導関数を求めよ.

1. $(x^2 + x + 1)^9$
2. $(x^2 + 1)^2(2x^3 - 1)^4$
3. $\sin^5 x$
4. $\cos x^2$

一般の指数関数の微分

定理5.13

- $a > 0$ に関して

$$(a^x)' = a^x \log a$$

- $a = e^{\log a}$ であるから

$$a^x = \left(e^{\log a}\right)^x = e^{x \log a}$$

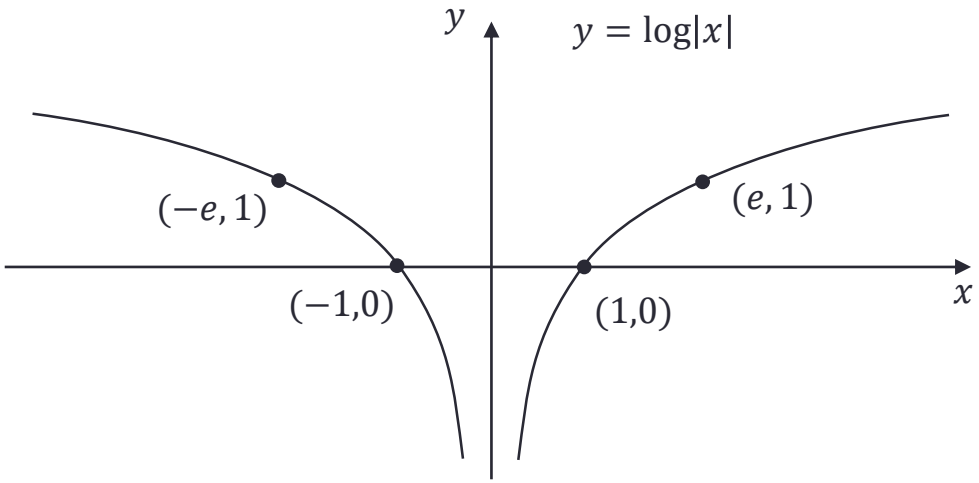
と書くことができる.

- $f(y) = e^y$, $g(x) = x \log a$ とすると, $f\left(g(x)\right) = e^{x \log a} = a^x$ であるから

$$\begin{aligned}(a^x)' &= (e^y)' \qquad (y = x \log a \text{ とおいた})\\ &= e^y \cdot y'\\ &= e^{x \log a} \cdot \log a\\ &= a^x \log a\end{aligned}$$

対数関数の微分の拡張

- $\log x$ の定義域は $x > 0$ であるが，$\log|x|$ を考えることで，定義域を $x \neq 0$ なる実数全体に拡張することができる．



定理5.14

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

- $x > 0$ の場合に成り立つのは定理5.7のままであり，$x < 0$ の場合

$$(\log|x|)' = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

対数微分

定理5.15

- 微分可能な関数 $g(x)$ に対して

$$(\log|g(x)|)' = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

- $f(y) = \log|y|$ とすると $f\big(g(x)\big) = \log|g(x)|$ と書くことができることから

$$(\log|g(x)|)' = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

- 関数の対数を取ってから微分する方法は対数微分と呼ばれ，様々な場面に現れる.

対数微分(応用)

定理5.16

- $a \in \mathbb{R}$ に関して, $x > 0$ において

$$(x^a)' = a\, x^{a-1}$$

- $g(x) = x^a$ とすると

$$(\log|g(x)|)' = (\log x^a)' = (a \log x)' = \frac{a}{x}$$

- 定理5.15より

$$\frac{a}{x} = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{(x^a)'}{x^a}$$

であるから, $(x^a)' = a\, x^{a-1}$.

- 例えば

$$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\sqrt[3]{x^2}\right)' = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{x}}$$

まとめ

1. 三角関数，指数関数，対数関数の微分

2. 合成関数の微分，対数微分

発展：ネイピア数の性質（1）

定理5.17

- $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ である.（n は自然数）

- 二項定理を使うと

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k \frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}\frac{1}{n^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} 1\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots = 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

発展：ネイピア数の性質（2）

定理5.18

- $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ とすると，$a_n < a_{n+1}$ である．a_n は単調増加数列．

- 相加相乗平均の不等式は $\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n}$ であり，等号は $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ のときに成り立つ．
- n 個の $\frac{n+1}{n}$ と1個の 1 に対して，相加相乗平均の不等式を使うと

$$\frac{\frac{n+1}{n} \cdot n + 1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$1 + \frac{1}{n+1} > \sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$a_{n+1} > a_n$$

発展：ネイピア数の性質（3）

定理5.19

- $e = \lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

- $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ が定義であったが，$n \to -\infty$ でも同じになる．

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = 1\cdot e = e$$

定理5.20

- $e = \lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$