線形代数
第9回「余因子展開」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- 行列式は行列の正則性を判定する指標であった(幾何学的な説明を与えただけで, 証明はしていない).
- 前回に引き続き, その具体的な計算方法に関して解説する.
- また行列式を利用した, 逆行列の具体的な計算方法も紹介する.

1. 乗法性, ブロック行列

2. 余因子展開, 余因子行列

乗法性

- 行列の乗法性は重要な性質なので，再掲する.

定理9.1

- n 次正方行列 A, B に対して

$$|A\,B| = |A||B|$$

- n 次正方行列 A は線形写像 $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ の符号付き体積拡大率という意味を持っていた.
- この幾何学的意味から，行列式の乗法性を理解することができる（数学的な証明ではない）.

乗法性(2次正方行列)

例9.2

- 2次正方行列 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$ について，行列式の乗法性を確認する.

$$
\begin{aligned}
|A\,B| &= \begin{vmatrix} ae+bg & ag+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{vmatrix} \\
&= (ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg) \\
&= aecf+adef+bcfg+bdgh-(acef+adfg+bcef+bdgh) \\
&= adef+bcfg-adfg-bcef \\
&= (ad-bc)(eh-fg) \\
&= |A||B|
\end{aligned}
$$

スカラー倍

- 行列のスカラー倍に関しては，A を n 次正方行列，$k \in \mathbb{R}$ としたとき，次が成り立つことに注意．

$$|k\,A| = k^n\,|A|$$

例9.3

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 6 & 2 & 0 \\ 4 & 10 & -6 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 10 & -6 \end{vmatrix}$$

$$= 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

ブロック行列

定義9.4

- A, B, C, D をそれぞれ $k \times k, k \times l, l \times k, l \times l$ 型の行列とする.
- このとき，次の形の $(k+l)$ 次正方行列を**ブロック行列**（区分行列）という.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

- 与えられた行列にブロック行列としての分解を与えることを，**ブロック行列分解**という.

ブロック行列(例)

例9.5

- ブロック行列分解

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

において, $A = [1]$, $B = [2\ 3]$, $C = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ となる.

- 同じ行列に対して, 複数のブロック行列分解が存在する.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 & 9 \end{array}\right]$$

- ブロック数を増やしたり, 行と列で分解を変えることで, より一般のブロック行列を定義することができるが, 簡単のため, この講義では上記のような分解のみを考える.

ブロック行列

定理9.6

- A, B, C, D をそれぞれ $k \times k, k \times l, l \times k, l \times l$ 型の行列とする.
- また O を零行列とする.

1. $C = O$ であるとき

$$\begin{vmatrix} A & B \\ O & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

2. $B = O$ であるとき

$$\begin{vmatrix} A & O \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D|$$

ブロック行列（例）

例9.7

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} |9| = -27$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-4) \cdot (-2) = 8$$

ブロック行列(問題)

問題9.8

- 次の行列式を計算せよ.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{cc|ccc} 3 & 5 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 0 & 9 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 7 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \left|\begin{array}{cc|c} 7 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 3 \end{array}\right| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} |3| = 264$$

余因子

定義9.9

- n 次正方行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ の第 i 行と第 j 列を取り除いて得られる $(n-1)$ 次正方行列を A_{ij} と書く.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

（赤字部分を除く）

- これらは A の余因子と呼ばれる.

余因子（例）

例9.10

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & 0 \\ 2 & 6 & 5 \end{bmatrix}$$

とすれば，9個の余因子が考えられる．例えば

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_{22} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad A_{31} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

例9.11

- $A = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して，4つの余因子が考えられる．

$$A_{11} = [d] \qquad A_{12} = [c] \qquad A_{21} = [b] \qquad A_{22} = [a]$$

余因子展開

定理9.11

- n 次正方行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ に関して

1. $|A|$ の第 i 行に関する余因子展開として次が成り立つ.

$$|A|=(-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}|+\cdots+(-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$$

2. $|A|$ の第 j 列に関する余因子展開として次が成り立つ.

$$|A|=(-1)^{1+j}a_{1j}\left|A_{1j}\right|+\cdots+(-1)^{n+j}a_{nj}\left|A_{nj}\right|$$

余因子展開(例)

例9.12

- 第1行に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 7\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 63 + 52 \quad = 1$$

- 第2列に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -7\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -63 + 4 + 60 \quad = 1$$

- 各項の符号に注意せよ.

余因子展開(問題)

問題9.13

- 第2行に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -3 + 4 - 0 = 1$$

- 第3行に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -8 + 60 - 51 = 1$$

余因子展開(問題)

問題9.14

- 第1列に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 12 - 3 - 8 = 1$$

- 第3列に関する余因子展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 52 - 0 - 51 = 1$$

余因子行列

定義9.15

- n 次正方行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ に対して

$$a_{ij}^{*} = (-1)^{i+j}\left|A_{ji}\right|$$

とおき，余因子という(a_{ij}^{*} と A_{ji} の添え字が逆になっていることに注意).

- n 次正方行列

$$\tilde{A} = \left(a_{ij}^{*}\right)$$

とおき，A の余因子行列という.

余因子行列(例)

例9.16

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対して

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1}|A_{11}| = d$$

$$a_{12}^* = (-1)^{1+2}|A_{21}| = -b$$

$$a_{21}^* = (-1)^{2+1}|A_{12}| = -c$$

$$a_{22}^* = (-1)^{2+2}|A_{22}| = a$$

であるから

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

余因子行列(例)

例9.17

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ に対して

$$a_{11}^* = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6 \qquad a_{12}^* = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$a_{13}^* = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5 \qquad a_{21}^* = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -9$$

$$a_{22}^* = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad a_{23}^* = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

$$a_{31}^* = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -3 \qquad a_{32}^* = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 7$$

$$a_{33}^* = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

なので，A の余因子行列は

$$\tilde{A} = \left(a_{ij}^*\right) = \begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

余因子行列(定理)

定理9.18

- n 次正方行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ に関して

$$A\,\tilde{A} = \tilde{A}\,A = |A|\,E_n$$

が成り立つ.

例9.19

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の余因子行列は $\tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ であるので,

$$A\,\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = |A|E_2$$

$$\tilde{A}\,A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = |A|E_2$$

余因子行列（例）

例9.20

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ の行列式は $|A| = -21$，余因子行列は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}$$

であり

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{bmatrix} = -21E_3$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -7 & -5 \\ -9 & -7 & 4 \\ -3 & 7 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -21 & 0 & 0 \\ 0 & -21 & 0 \\ 0 & 0 & -21 \end{bmatrix} = -21E_3$$

余因子行列（定理）

定理9.21

- n 次正方行列 A が正則である必要十分条件は $|A| \neq 0$ であり，このとき逆行列は
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$
で与えられる.

- 一般に，逆行列を計算するのには掃き出し法を用いるのが簡単である（第6回講義）.
- しかし，理論的に逆行列の存在を保証したい場合なのでは，定理9.21が便利である.

定理9.21の証明

- 十分性は定理9.18から示すことができる．つまり

$$A\,\tilde{A} = \tilde{A}\,A = |A|\,E_n$$

より

$$A\left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right) = \left(\frac{1}{|A|}\tilde{A}\right)A = E_n$$

- 逆に，逆行列が存在すると仮定すると，$A\,A^{-1} = E_n$ であるから，両辺の行列式を考えて

$$1 = |E_n| = |A\,A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}|$$

- 特に $|A| \neq 0$ である.

余因子行列と逆行列

例9.22

- $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の余因子行列は $\tilde{A} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ であり

$$A\,\tilde{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = |A|E_2$$

$$\tilde{A}\,A = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{bmatrix} = |A|E_2$$

であることから，逆行列の公式

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

を再現することができる.

余因子行列と逆行列

例9.23

- $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 4 & 1 & 5\end{bmatrix}$ の余因子行列は $\tilde{A}=\begin{bmatrix}6 & -7 & -5\\ -9 & -7 & 4\\ -3 & 7 & -1\end{bmatrix}$ であった.
- A の逆行列は

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=\frac{1}{-21}\begin{bmatrix}6 & -7 & -5\\ -9 & -7 & 4\\ -3 & 7 & -1\end{bmatrix}$$

余因子行列(問題)

問題9.24

- 次の行列が正則かどうか判定し，正則の場合には余因子行列を計算することで逆行列を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

余因子行列(問題)

- A の行列式は，第1行に関して余因子展開すると

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

であるから，A は正則である．逆行列は

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -7 & 4 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

- B の行列式は，第1列に関して余因子展開すると

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

であるから，B は正則ではない．

余因子行列(問題)

- C の行列式は，第3列に関して余因子展開すると

$$|C| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

であるから，C は正則である.

- 余因子行列の計算は面倒だが，結果だけを書いておくと

$$\tilde{C} = C^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 実際に逆行列になっていることを確認せよ.

まとめ

- ブロック行列
- 余因子展開
- 余因子行列