線形代数
第10回「ベクトル空間」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- 数ベクトル空間の性質を抽象化した一般のベクトル空間を解説する.
- 部分ベクトル空間とそれらから作られるベクトル空間に関しても解説する.

1. ベクトル空間，部分空間

2. 共通部分，和空間

動機

- これまで n 個の実数の組をベクトル $\boldsymbol{v}$, それらの集合を n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ と呼んできた.
- 一方で, $\mathbb{R}^3$ の原点を通る平面

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y + z = 0 \right\}$$

は平面 $\mathbb{R}^2$ と同じように見えるが, 「ベクトル空間」であろうか?

- 他にも, 方程式 $z = 0$ で定義される $\mathbb{R}^3$ 内の xy 平面は自然に $\mathbb{R}^2$ と同一視できそうに思える.

抽象化

- 数学ではしばしば対象の本質的な構造を抽出し公理化する.
- 姿形が違っていても, 同じ「構造」を持てば, 同じ理論の枠組みで議論できるからである.
- 例えば,
  - 2個のみかんと3個のみかんで5個のみかん
  - 2個のみかんが3組で6個のみかん

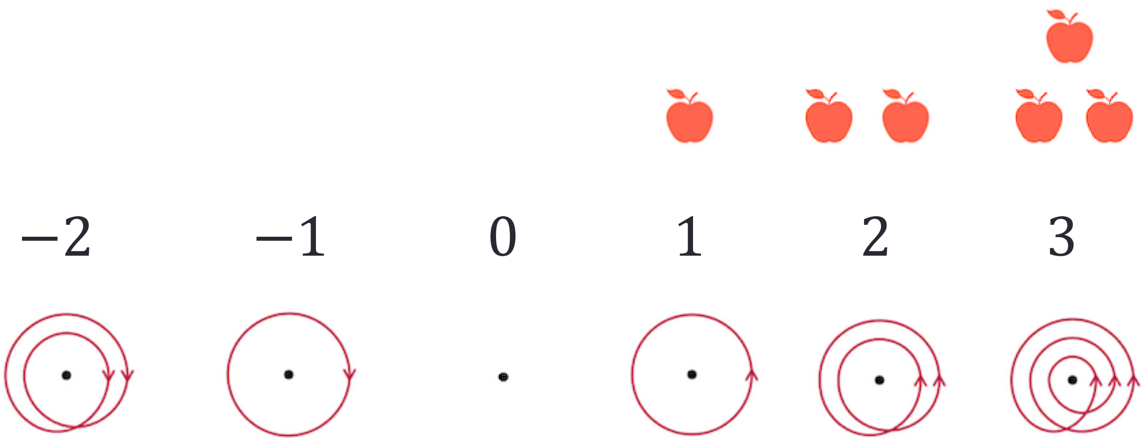
  といった事実はみかん特有のものではなく, リンゴでも車でも成立する.
- 数という構造が存在し,

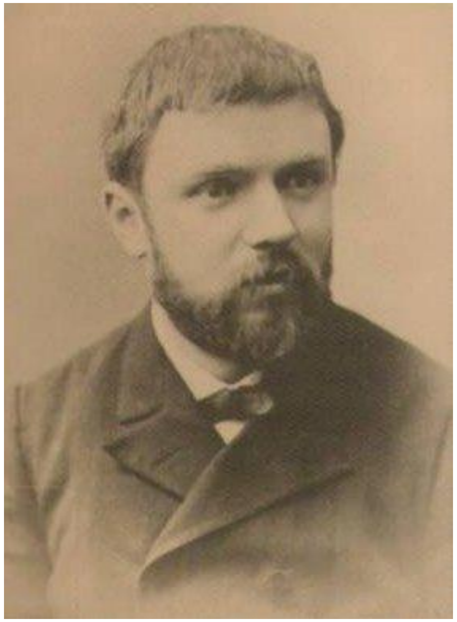
$$2 + 3 = 5, \quad 2 \times 3 = 6$$

という関係式の実現の一例だと考えられる.

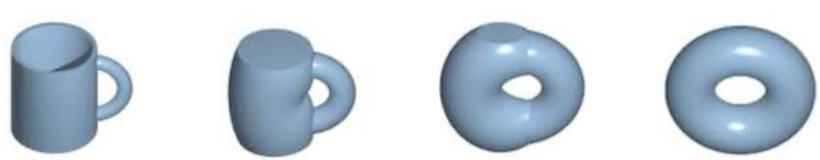
抽象化

- 「数学とは異なるものを同じとみなす技術」ポアンカレ
- 本質を見抜き，抽象化する技術





- 位相構造：マグカップ＝ドーナツ



高い抽象性＝高い汎用性

高い普遍性

ベクトル空間

- 列ベクトルに関して我々が使った性質は，ベクトル和とスカラー倍のみである．
- これを逆手にとって，次のような定義を考える．

定義10.1

- 集合 V が（実）ベクトル空間であるとは，2つの演算
  1. ベクトル和：$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$
  2. スカラー倍：$\boldsymbol{v} \in V$, $k \in \mathbb{R}$ に対して，$k\,\boldsymbol{v} \in V$

  が定義され，次のベクトル空間の公理を満たすことをいう．
- また，ベクトル空間 V の元をベクトルと呼ぶ．

ベクトル空間の公理

定義10.2（ベクトル空間の公理）

- 全ての $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ と $k, l \in \mathbb{R}$ について

1. 結合律: $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$
2. 可換律: $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
3. 単位元の存在: $\exists \boldsymbol{0} \in V, \forall \boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{v}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{v}$
4. 逆元の存在: $\forall \boldsymbol{v} \in V, \exists -\boldsymbol{v} \in V, \boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=\boldsymbol{0}$
5. 分配律: $k(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=k\,\boldsymbol{u}+k\,\boldsymbol{v},\ (k+l)\,\boldsymbol{v}=k\,\boldsymbol{v}+l\,\boldsymbol{v}$
6. 乗法の両立条件: $(kl)\,\boldsymbol{v}=k\,(l\,\boldsymbol{v})$
7. 乗法の単位元の存在: $1\,\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$

- ベクトル空間の公理は，和とスカラー倍が自然なものであれば，一般に成立するのであまり神経質になる必要はない．

n 次元数ベクトル空間

例10.3

- n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ はベクトル空間となる.
- 和とスカラー倍は以下のように与えられる.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{bmatrix}, \quad k \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\ x_1 \\ \vdots \\ k\ x_n \end{bmatrix}$$

- 零ベクトルと逆ベクトルは以下のように与えられる.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad -\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$$

原点を通る平面

例10.4

- $\mathbb{R}^3$ の xy 平面

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| z = 0 \right\}$$

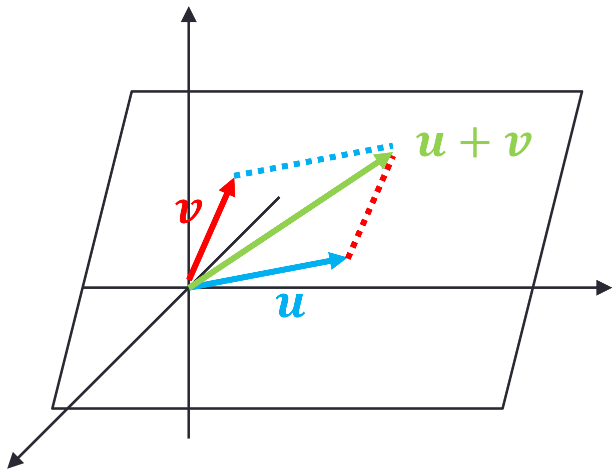
はベクトル空間である.

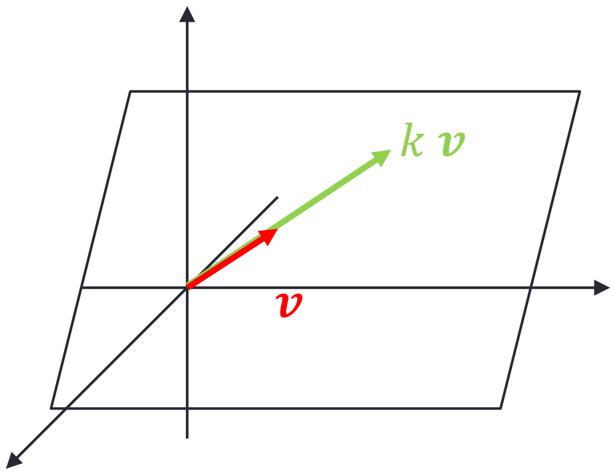
- より一般的に原点を通る平面

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| a\,x + b\,y + c\,z = 0 \right\}$$

はベクトル空間である.

原点を通る平面





- 原点を通る平面 V に関して次が成立する.

1. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ に対して，$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$．つまり，$V$ の元を2つ足したものは，また V 上にある.
2. $\boldsymbol{v} \in V, k \in \mathbb{R}$ に対して，$k\,\boldsymbol{v} \in V$．つまり，V の元を定数倍したものも，V 上にある.

- これに加えて，ベクトル空間の公理を確認する必要がある.

原点を通らない平面

例10.5

- $\mathbb{R}^3$ の平面

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| z = 1 \right\}$$

はベクトル空間ではない.

- 実際, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in V$ だが

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \notin V, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \notin V$$

高々 n 次の多項式全体

例10.6

- 実数を係数とする高々 n 次の多項式全体

$$\mathbb{R}[x]_n = \left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

  はベクトル空間となる.

- 和とスカラー倍はそれぞれ

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i \qquad c\left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{n} (c\, a_i) x^i$$

- 零ベクトルは零多項式.

- 同様に，次数に条件を課さない，多項式全体 $\mathbb{R}[x]$ もベクトル空間である.

高々 n 次の多項式全体

- $\mathbb{R}[x]_n$ と $n+1$ 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^{n+1}$ とは自然な同一視ができる.

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \longleftrightarrow \begin{bmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

- この同一視において，和とスカラー倍の構造が互いに対応している.
- $\mathbb{R}[x]_n$ と $\mathbb{R}^{n+1}$ は姿形が違っても，ベクトル空間として同じ構造を持つ.
- 上記の議論を一般化すると，$\mathbb{R}[x]$ は $\mathbb{R}^{\infty}$ と同一視することができる.

関数空間(発展)

- 次の例は少し抽象的であるので，参考にする程度で良い.

例10.7

- 区間 $(a,b) \subset \mathbb{R}$ で連続な実数値関数全体を $C(a,b)$ と書く.
- $C(a,b)$ は関数の和と定数倍によってベクトル空間となる.

$$(f+g) : (a,b) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x)+g(x)$$

$$c\,f : (a,b) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto c\,f(x)$$

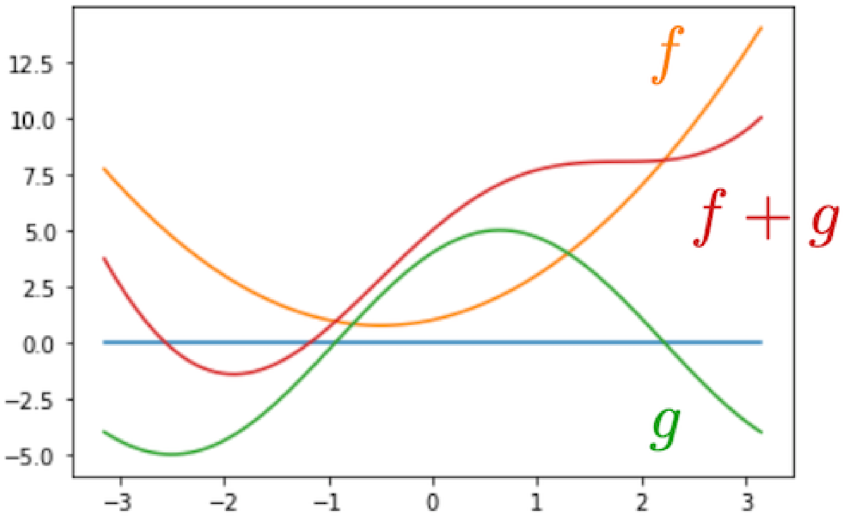
- 零ベクトルは零関数

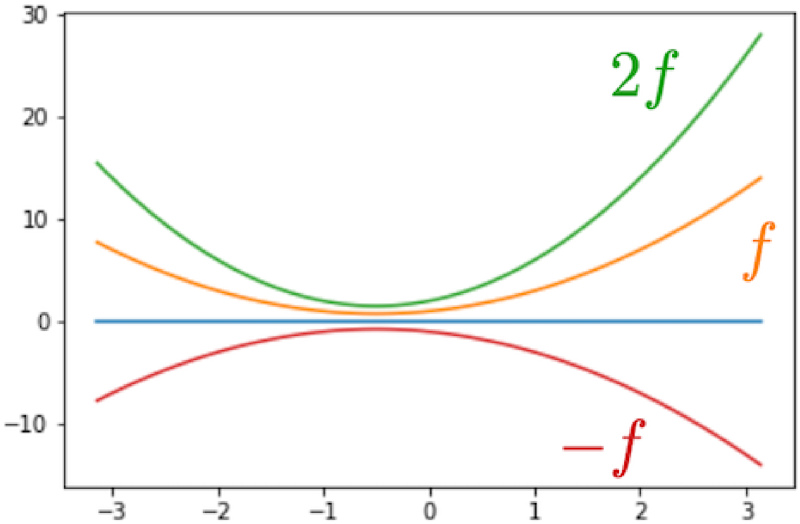
$$\mathbf{0} : (a,b) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto 0$$

- 関数 f の逆ベクトルは

$$-f : (a,b) \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto -f(x)$$

関数空間(発展)





$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$g(x) = 3\sin x + 4\cos x$$

直和

定義10.8
- ベクトル空間 U, V の直積集合 $U \times V$ は自然にベクトル空間となる.
- 和とスカラー倍はそれぞれ以下のように与えられる.

1. $(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{v}_1) + (\boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_2) = (\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2)$
2. $k\,(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (k\,\boldsymbol{u}, k\,\boldsymbol{v})$

- このベクトル空間は U と V の直和と呼ばれ, $U \oplus V$ と書かれる.

例10.9
- ベクトル空間 $\mathbb{R}^k$ と $\mathbb{R}^l$ の直和 $\mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l$ は $\mathbb{R}^{k+l}$ と同一視される.
- 例えば, $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2$ は $\mathbb{R}^3$ と同一視される.

$$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad \left(x, \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}\right) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

ベクトル空間の例?(問題)

問題10.10

- 次はベクトル空間であるか?

1. 第一象限

$$\left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x \geq 0, y \geq 0\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

- 逆元が第一象限に存在しないので，ベクトル空間ではない.

2. 平面 $\mathbb{R}^2$ 内の直線

$$L = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| x + y = 1\right\}$$

- 和やスカラー倍で閉じていないのでベクトル空間ではない．原点を通る場合に限りベクトル空間になる.

3. $\mathbb{R}^3$ 内の直線

$$L = \left\{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y + z = 0, -2x + 3y + 5z = 0\right\}$$

- ベクトル空間である.

部分空間

- ベクトル空間の中に，より小さなベクトル空間を見つけることができる場合がある.

定義10.11

- ベクトル空間 V の空でない部分集合 $W \subset V$ が下記を満たせば**部分空間**と呼ばれる.

  1. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$
  2. $\boldsymbol{v} \in W, k \in \mathbb{R}$ ならば $k\,\boldsymbol{v} \in W$

- 部分空間 $W \subset V$ が空でないことから，任意の $\boldsymbol{v} \in W$ に対して，$k = 0$ を取れば，$\mathbf{0} = 0\,\boldsymbol{v} \in W$
- W は V の演算に関して自動的にベクトル空間となる.
- ベクトル空間の公理を確認する必要はない.

部分空間

- 部分空間の定義の2つの条件は
  - $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$, $k, l \in \mathbb{R}$ ならば $k\,\boldsymbol{u} + l\,\boldsymbol{v} \in W$

  と同値である(しばしばこちらの条件を使う).
- 実際，定義の2つの条件は，上記の条件の
  1. $k = l = 1$ の場合
  2. $l = 0$ の場合

  である.
- 逆に定義の条件を組み合わせることで上記の条件が得られることも簡単に分かる.

自明な部分空間

定義10.12

- V をベクトル空間とする.
- 零ベクトル $\mathbf{0}$ のみからなる $\{\mathbf{0}\}$ は V の部分空間である.

$$\{\mathbf{0}\} \subset V$$

- V 自身は V の部分空間である.

$$V \subset V$$

- これらは自明な部分空間と呼ばれる.
- 記号の濫用となるが, $\{\mathbf{0}\}$ は単に $\mathbf{0}$ と書かれることが多い.

部分空間(例)

例10.13

- 原点を通る平面

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| a\,x + b\,y + c\,z = 0 \right\}$$

は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

- 実際, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in W$ と $k, l \in \mathbb{R}$ に関して,

$$a(k\,x_1 + l\,x_2) + b(k\,y_1 + l\,y_2) + c(k\,z_1 + l\,z_2)$$

$$= k(a\,x_1 + b\,y_1 + c\,z_1) + l(a\,x_2 + b\,y_2 + c\,z_2) = 0$$

なので, $k \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + l \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,x_1 + l\,x_2 \\ k\,y_1 + l\,y_2 \\ k\,z_1 + l\,z_2 \end{bmatrix} \in W$.

部分空間(例)

例10.14

- $\mathbb{R}[x]_n \subset \mathbb{R}[x]$ は部分空間である.
- より一般に, $n \leq m$ に対して, $\mathbb{R}[x]_n \subset \mathbb{R}[x]_m$ は部分空間である.
- したがって, 次の部分空間の列が存在する.

$$\mathbf{0} \subset \mathbb{R}[x]_0 \subset \mathbb{R}[x]_1 \subset \mathbb{R}[x]_2 \subset \mathbb{R}[x]_3 \subset \cdots \subset \mathbb{R}[x]$$

解空間

定理10.15

- $m \times n$ 行列 A に対して

$$W = \{ \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid A\,\boldsymbol{v} = 0 \}$$

は部分空間である.

- W は連立一次方程式 $A\,\boldsymbol{v} = 0$ の解空間と呼ばれる.

証明

- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$, $k, l \in \mathbb{R}$ とすれば

$$A(k\,\boldsymbol{u} + l\,\boldsymbol{v}) = A(k\,\boldsymbol{u}) + A(l\,\boldsymbol{v}) \;\; = k(A\,\boldsymbol{u}) + l(A\,\boldsymbol{v})$$
$$= k\,\boldsymbol{0} + l\,\boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

であるから $k\,\boldsymbol{u} + l\,\boldsymbol{v} \in W$.

解空間(例)

例10.16

- $\mathbb{R}^3$ の部分集合

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x + 3y - z = 0, x - 2y + 3z = 0 \right\}$$

は $\mathbb{R}^3$ の部分空間である.

- 実際, U は連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

の解空間である.

部分空間（発展）

例10.17

- ベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_3$ を考える. このとき

$$W = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x]_3 \mid x\, f'(x) - 2f(x) = 0 \}$$

は $\mathbb{R}[x]_3$ の部分空間である.

- ここで $f'(x) = \dfrac{df}{dx}$ は $f(x)$ の微分である.

- 例えば, $g, h \in W$ であれば

$$x\big(g(x) + h(x)\big)' - 2\big(g(x) + h(x)\big)$$
$$= \big(x\, g'(x) - 2g(x)\big) + \big(x\, h'(x) - 2h(x)\big) = 0$$

であるから, $g + h \in W$ である.

共通部分・和空間

定理10.18

- ベクトル空間 V の部分空間 U, W を考える.

1. U と V の共通部分

$$U \cap W = \{\boldsymbol{v} \in V \mid \boldsymbol{v} \in U, \boldsymbol{v} \in W\}$$

2. U と V の和空間

$$U + W = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in U, \boldsymbol{w} \in W\}$$

はそれぞれ V の部分空間となる.

共通部分(例)

例10.19

- $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\} \qquad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

つまり xy 平面と xz 平面に関して，共通部分

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$$

は x 軸である.

和空間(例)

例10.20

- $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R} \right\} \qquad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x, z \in \mathbb{R} \right\}$$

の和空間は $\mathbb{R}^3$ 全体になる.

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x_1, x_2, y, z \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

和集合(例)

例10.21

- ベクトル空間 V の部分空間 U, W に対して，和集合 $U \cup W$ は一般にベクトル空間にならない．
- 例えば $\mathbb{R}^2$ の部分空間

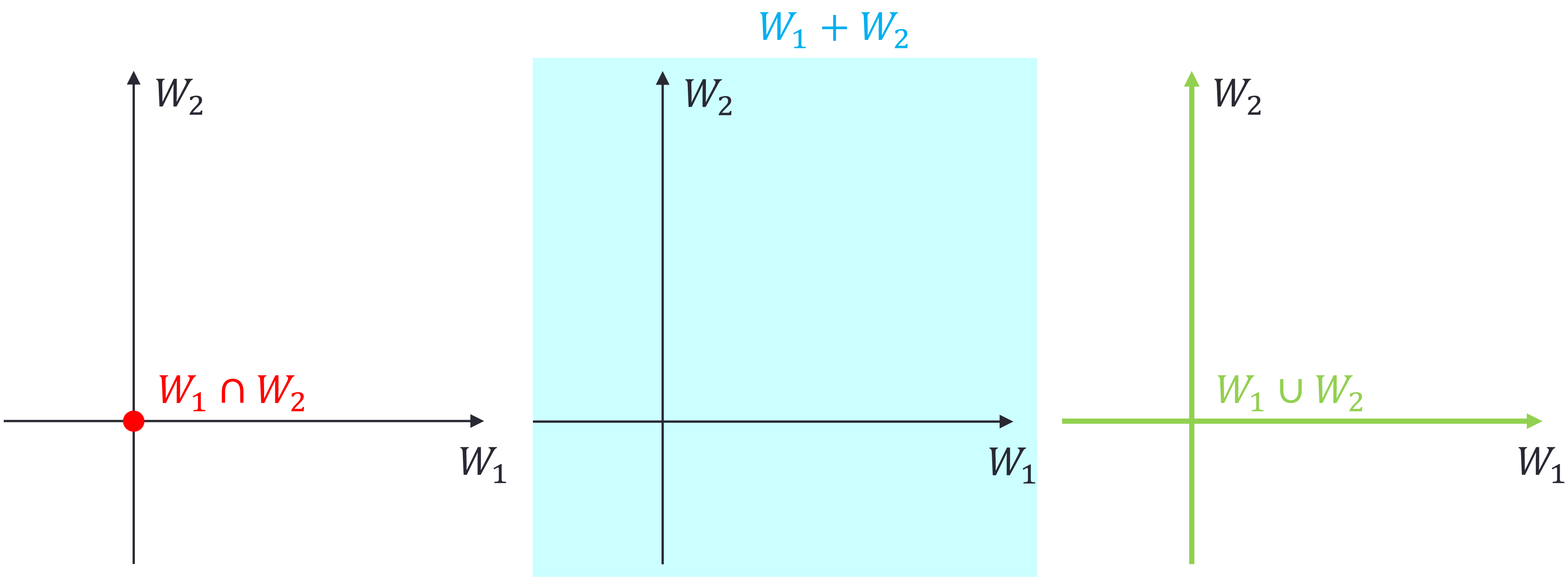
$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\} \qquad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\}$$

に関して，$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in W_1 \cup W_2$ であるが，

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \notin W_1 \cup W_2$$

共通部分・和空間・和集合

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\} \qquad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \middle| \, y \in \mathbb{R} \right\}$$



まとめ

- ベクトル空間
  - ベクトル空間の公理

- 部分空間

- 共通部分

- 和空間