線形代数
第11回「一次独立・従属」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- ベクトルの集合 S の性質を調べる.
- 具体的には, S がどのくらい大きいのか, また S には無駄があるのか, の2つの観点から考察する.
- 十分大きく, 無駄のない集合は基底と呼ばれ, ベクトル空間の解析で重要な概念である.

1. 一次結合, 一次独立/従属
2. 基底, 次元

一次結合

- 以下では V をベクトル空間とする.
- 慣れないうちは, $V = \mathbb{R}^n$ と考えて差し支えない.

定義11.1

- ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$ の一次結合(線形結合)とは, あるスカラー $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ に対して

$$a_1 \boldsymbol{v}_1 + \cdots + a_k \boldsymbol{v}_k$$

の形のベクトルをいう.

一次結合（例）

例11.2

- $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の一次結合は次の形のベクトル

$$a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 - a_2 \\ a_1 + 3a_2 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ の一次結合は次の形のベクトル

$$a_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1 + 6a_2 \\ a_1 + 3a_2 \end{bmatrix} = (a_1 + 3a_2) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

一次結合(例)

例11.3

- $\mathbb{R}^2$ の任意のベクトルは $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の一次結合である.
- 実際

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\,\boldsymbol{e}_1 + y\,\boldsymbol{e}_2$$

- より一般に, $\mathbb{R}^n$ の任意のベクトルは, $e_1, \cdots, e_n$ の一次結合である.
- 実際

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\,\boldsymbol{e}_1 + x_2\,\boldsymbol{e}_2 + \cdots + x_n\,\boldsymbol{e}_n$$

張る空間

定義11.4

- ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$ に対して，それらの一次結合全体の集合

$$\mathbb{R}\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i\, \boldsymbol{v}_i \,\middle|\, a_i \in \mathbb{R} \right\}$$

を $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k$ が**張る（生成する）空間**という.

- $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle \subset V$ は V の部分空間になる.
- 特にベクトル空間になる.

張る空間

定義11.5

- ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が V を張る(生成する)とは

$$\mathbb{R}\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_k \rangle = V$$

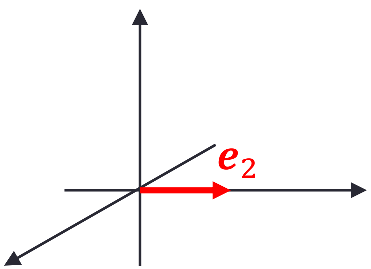
が成立することをいう.

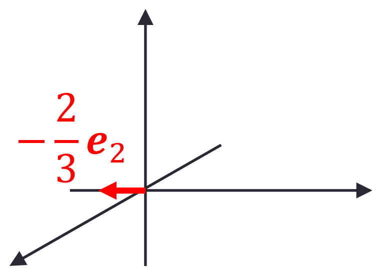
- 「$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ が V を張る」とは, V のベクトルを表現するのに十分たくさんベクトルがあるということである.

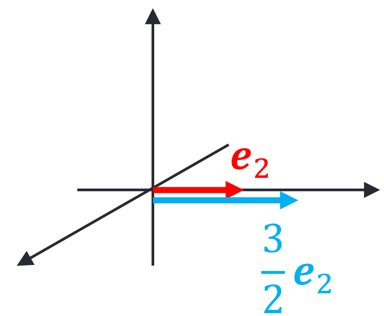
張る空間(例)

例11.6

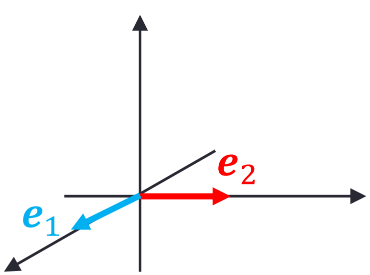
- ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ を考える.
- $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{e}_2 \rangle$, $\mathbb{R}\left\langle -\frac{2}{3}\boldsymbol{e}_2 \right\rangle$, $\mathbb{R}\left\langle \boldsymbol{e}_2, \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_2 \right\rangle$ は y 軸

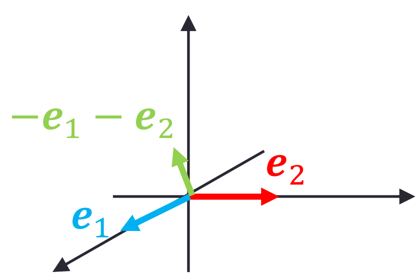


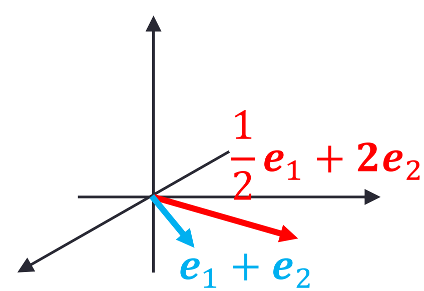




- $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \rangle$, $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \rangle$, $\mathbb{R}\left\langle \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \frac{1}{2}\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 \right\rangle$ は xy 平面





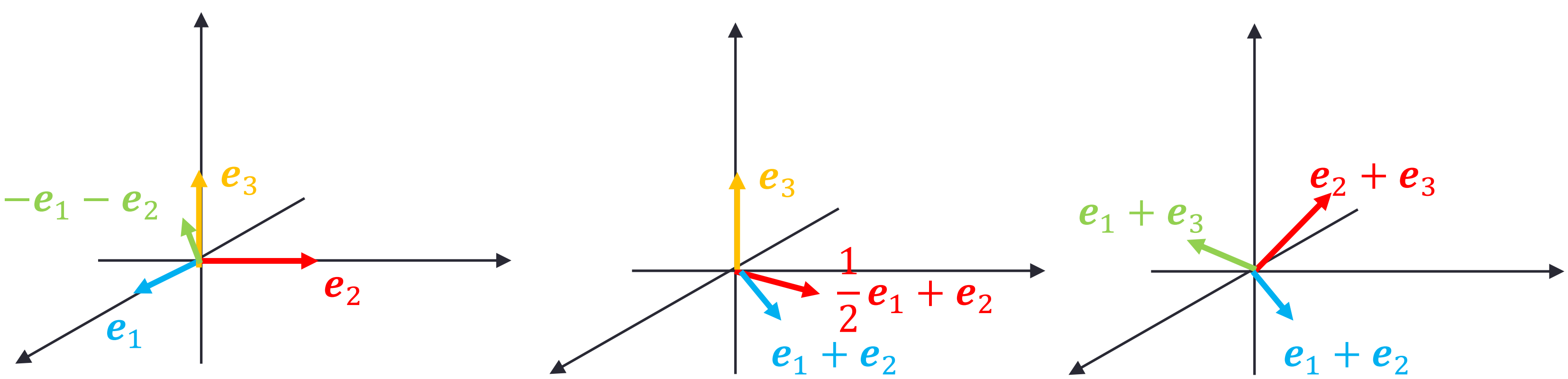


張る空間(例)

例11.7

- ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ を考える.
- $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$, $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$, $\mathbb{R}\left\langle e_1 + e_2, \frac{1}{2}e_1 + 2e_2, e_3 \right\rangle$

  $\mathbb{R}\langle e_1 + e_2, e_2 + e_3, e_1 + e_3 \rangle$ などは全て $\mathbb{R}^3$ を張る.

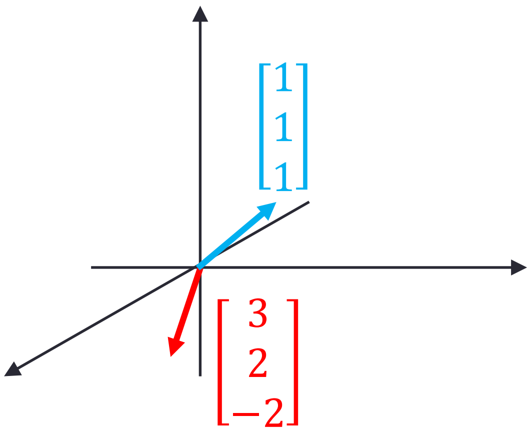


張る空間(問題)

問題11.8

- 次が成立することを示せ.

$$\mathbb{R}\left\langle \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\2\\-2\end{bmatrix} \right\rangle = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \,\middle|\, 4x - 5y + z = 0 \right\} \subset \mathbb{R}^3$$



張る空間(解説)

- 定義より2つのベクトルが張る空間は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s+3t \\ s+2t \\ s-2t \end{bmatrix}$$

の形のベクトル全体である．つまり

$$x = s + 3t,\ \ y = s + 2t,\ \ z = s - 2t$$

- まず，$s = x - 3t$ であるから

$$y = x - t,\ \ z = x - 5t$$

- $t = x - y$ であるから

$$z = -4x + 5y$$

- つまり

$$4x - 5y + z = 0$$

一次独立・一次従属

定義11.9

- ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in V$ が一次独立（線形独立）であるとは

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \, \boldsymbol{v}_i = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_k = 0$$

が成り立つことである.

- 一次独立でないとき，一次従属（線形従属）であるという.

- $a_1 = \cdots = a_k = 0$ であれば $\sum_{i=0}^{k} a_i \, \boldsymbol{v}_i = 0$ は当然成り立つ.
- これを自明な関係という.
- ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_k$ が一次独立であるとは，これらの関係に非自明な関係がない，つまり「余分なベクトルがない」ということを意味している.

一次独立・一次従属

- ベクトル $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^2$ が一次独立であるとは

  「$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ が共に零ベクトルでなく，かつ互いに平行でない関係」

  を意味する.

- 実際，定義を解読すると

  「$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の係数 a, b がそれぞれ 0 のときに限り $a\,\boldsymbol{u} + b\,\boldsymbol{v} = 0$ となる」

  である.

- つまり「 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の係数 a, b が 0 でない限り，足し合わせたものが $\mathbf{0}$ に戻ることは決して無い．」

- 実は $\mathbb{R}^2$ 上の3つ以上のベクトルは一次従属となる.

一次独立・一次従属(例)

例11.9

- ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ は一次独立である.
- 実際

$$a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

は, $a_1 = a_2 = 0$ を意味する.

- 一方, ベクトル $\boldsymbol{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と $\boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ は一次従属である.
- 実際, $2\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 = 0$ なる非自明な関係が存在する.

一次独立・一次従属

例11.10

- ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ は一次独立である.
- 実際

$$a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + a_3\boldsymbol{e}_3 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}$$

は, $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ を意味する.

- ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ は一次従属である.
- 実際

$$\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + (-\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2) = \boldsymbol{0}$$

なる非自明な関係式が存在する($a_1 = a_2 = a_3 = 1$).

- それでは, $a \neq 0$, $b \neq 0$ のとき, $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, -a\,\boldsymbol{e}_1 - b\,\boldsymbol{e}_2 \in \mathbb{R}^2$ は一次独立であろうか?

一次独立・一次従属(例)

例11.11

- ベクトル $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ は一次従属である.
- 実際

$$3\boldsymbol{v}_1 - 5\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{0}$$

なる非自明な関係が存在する.

- 一方で, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ のどの2つのベクトルも一次独立である.
- 例えば, $a_1 \boldsymbol{v}_1 + a_2 \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{0}$ は

$$3a_1 + 2a_2 = 0,\ \ a_1 + a_2 = 0,\ \ 2a_1 + a_2 = 0$$

と同値であり, $a_1 = a_2 = 0$ が唯一の解である.

一次独立・一次従属

- ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ が一次独立であるための必要十分条件は

  「$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が平面を張り，かつ $\boldsymbol{v}_3$ がその平面上にないこと」

- つまり，どの2つのベクトルが張る平面を考えても，残りのベクトルはその上にない（$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ が特別なわけではない）.

- 実際，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が一次従属とすれば，非自明な関係式

$$a_1\,\boldsymbol{v}_1 + a_2\,\boldsymbol{v}_2 + a_3\,\boldsymbol{v}_3 = 0$$

  が存在する．例えば，$a_3 \neq 0$ であれば

$$\boldsymbol{v}_3 = -\frac{1}{a_3}(a_1\,\boldsymbol{v}_1 + a_2\,\boldsymbol{v}_2)$$

  と書くことができるので，$\boldsymbol{v}_3$ は平面 $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \rangle$ 上にある.

一次独立・一次従属(発展)

例11.12

- ベクトル空間 $V = \mathbb{R}[x]_2$ のベクトル

$$1,\ x,\ x^2$$

は一次独立である.

$$1858,\ 1-2x+3x^2,\ \pi - e\,x^2$$

も一次独立である.

- 一方で

$$1+x,\ x+x^2,\ 2+3x+x^2$$

は一次従属である. 実際, 非自明な関係が存在する:

$$2(1+x)+(x+x^2)-(2+3x+x^2)=0$$

一次独立・一次従属（問題）

問題11.13

- 次のベクトルは一次独立か一次従属か調べよ.

(a) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ (e) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}6\\4\\-4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\4\\0\end{bmatrix}$

行列の階数とベクトルの一次独立性

- 行列の階数とベクトルの一次独立性に関する重要な定理を紹介する.

定理11.14

- $m \times n$ 行列 A に対して，以下は等しい

1. A の階数 $\operatorname{rank} A$
2. A の列ベクトルの一次独立なものの最大個数
3. A の行ベクトルの一次独立なものの最大個数

基底

定義11.15

- ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ が基底であるとは
  1. $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立
  2. $\mathbb{R}\langle \boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n \rangle = V$

  が成り立つことをいう.

- 雑に言えば
  1. ベクトルの集合 $\{\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ が十分に小さく，余分なものが存在しない.
  2. それらが V 全体を生成するだけ十分大きい

  ことを意味する.

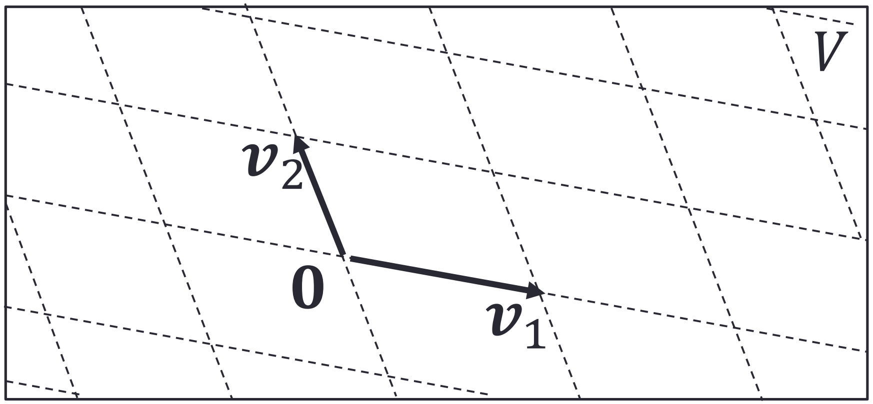
一意表現定理

定理11.16

- $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を V の基底とする.
- 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ に対して, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が一意的に存在して

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \, \boldsymbol{v}_i$$

- 直感的に言えば,「基底はベクトル空間の斜交座標系を与えている」



一意表現定理(証明)

証明

- $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が V を張ることから，$a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在して $\boldsymbol{v} = \sum_{i=0}^{n} a_i\, \boldsymbol{v}_i$ となる.
- このような一次結合の表示が2つあったとする．つまり

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{n} b_i\, \boldsymbol{v}_i$$

- このとき

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\, \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

であるが，$\boldsymbol{v}_1, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が一次独立であることから，全ての i に関して，$a_i - b_i = 0$. つまり表示は一意である.

標準基底

定義11.17

- $\mathbb{R}^n$ の基底

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

は**標準基底**と呼ばれる.

- 任意のベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ はこれらの一次結合で一意に表される:

$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = v_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + v_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \cdots + v_n \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} v_i \, \boldsymbol{e}_i$$

基底

例11.18

- ベクトル

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

は $\mathbb{R}^3$ の基底である.

- 基底の取り方はたくさんあるが，共通する性質はなんであろうか?

次元

定理11.19（次元定理）

- V をベクトル空間とする.
- $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n$ が V の基底であれば，他の基底も n 個のベクトルからなる.

定義11.20

- 次元定理に現れる n をベクトル空間 V の次元といい，$\dim V = n$ と書く.
- 有限個のベクトルからなる基底が取れないとき，V は無限次元であるといい，$\dim V = \infty$ と書く.

- この定義は，「次元」＝「自由度」という我々の感覚とも一致している.

次元

例11.21

- $\mathbb{R}^n$ は標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を持つので，$\mathbb{R}^n$ は n 次元である.

$$\dim \mathbb{R}^n = n$$

例11.22

- $\mathbb{R}[x]$ は無限次元ベクトル空間である. 実際，いくらでも次数が大きい多項式が存在するので，基底として有限個の多項式を取ることは不可能である.
- 一方で，$\mathbb{R}[x]_n$ は $(n+1)$ 次元ベクトル空間である.

$$\dim \mathbb{R}[x]_n = n + 1$$

例えば，$\mathbb{R}[x]_1$ の基底として，$1, x$ や $1858 + x, 6 + 21x$ が取れる.

まとめ

- 一次結合
- 一次独立･一次従属
- 基底
- 次元