線形代数
第12回「固有値問題と対角化」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- これまで学んだ内容の応用として，固有値問題を扱う.

1. 固有値問題，固有値，固有ベクトル
2. 固有多項式，ケーリー・ハミルトンの定理
3. 行列の対角化
4. 対角化の応用

固有値問題

- 行列はベクトルを別のベクトルに変換する．つまり

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

と言ったように，$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が $\begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$ に変換される．

- これを $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ は線形写像

$$f_A \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{v} \mapsto A\,\boldsymbol{v}$$

を定めると考えた．

- 今回考えるのは次の問題である．

問題12.1

- n 次正方行列 A に対して，線形写像 $f_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を考える．
- 方向を変えない特別なベクトルは存在するか?
- その倍率は?

固有値問題(例)

例12.2

- 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ に対しては，特別な方向が2つある.

1. $\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, 倍率は 5 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. $\boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$, 倍率は -2 :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -8 \end{bmatrix} = -2 \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ や $\begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ も特別なベクトルであるが，上記と同じ方向であることに注意.

固有値・固有ベクトル

- A を n 次正方行列とする.

定義12.3

- 写像 $f_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ に対して，ある $\lambda \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ が存在し

$$f_A(\boldsymbol{v}) = \lambda\, \boldsymbol{v}$$

が成り立つとき（つまり $A\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$ が成り立つとき），λ を A の固有値，v を A の固有ベクトルという.

- $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ は自明に上式を満たすので，$\boldsymbol{v} \neq 0$ の条件が課されている.
- 固有ベクトルが1つあれば，その（零でない）スカラー倍も固有ベクトルである.

固有空間

定義12.4

- $\lambda \in \mathbb{R}$ を f_A の固有値とするとき，部分空間

$$V(\lambda) = \{\, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n \mid f_A(\boldsymbol{v}) = \lambda\, \boldsymbol{v} \,\} \subset \mathbb{R}^n$$

を固有値 λ の固有空間という.

- $\mathbf{0} \in V(\lambda)$ に注意.

- つまり，固有値 λ に属するベクトル全体と零ベクトルの集合である.
- $V(\lambda)$ は「A を左から掛けるのと，λ 倍することが同じになるベクトル全体」.

$$A\, \boldsymbol{v} = \lambda\, \boldsymbol{v}$$

固有空間(例)

例12.5

- 先の例 $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 1\end{bmatrix}$ で考えると, A の固有値は $5,-2$ であり

$$V(5)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\rangle,\ V(-2)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}-3\\4\end{bmatrix}\right\rangle$$

である.

- 厳密には, 他に固有値がないこと, 固有空間が上の固有ベクトルの定数倍で尽きることを示す必要がある.

- $\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\rangle$ を $\mathbb{R}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ と略記することもある.

固有空間(例)

- 固有値と固有ベクトルは存在するとは限らない.

例12.6

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ が定義する線形写像

$$f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

は $\mathbb{R}^2$ の $\frac{\pi}{2}$ 回転であるが, 固有値も固有ベクトルも存在しない.

- より一般に, 回転行列 A_θ は θ が π の倍数でない限り, 固有値と固有ベクトルは存在しない.

- 一方で, 同様の線形写像 $f_{A_\theta} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ には固有値と固有ベクトルが存在する.

固有多項式

- E_n を n 次単位行列とする（行列のサイズが明らかなときには単に E と書く）.

定義12.7（固有多項式）

- n 次正方行列 A に対して，行列式

$$\varphi_A(t) = |t\,E_n - A|$$

を A の固有多項式という.

- 固有多項式を $|A - t\,E_n|$ で定義する流儀もあるが，その場合は最高次 t^n の係数が $(-1)^n$ となって扱いにくい.

固有多項式(例)

例12.8

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有多項式は

$$\varphi_A(t) = |t\,E_2 - A| = \begin{vmatrix} t-4 & -3 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix}$$

$$= (t-4)(\mathrm{t}-2) - (-3)\cdot(-1) \ = t^2 - 6t + 5$$

$$= (t-1)(\mathrm{t}-5)$$

- 一般に, n 次正方行列 A の固有多項式 $\varphi_A(t)$ は t に関して n 次の多項式である.
- 例えば, 定数係数は

$$\varphi_A(0) = |-A| = (-1)^n|A|$$

で与えられる.

固有多項式

定理12.9

- $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ なる線形写像に関して，次は同値である：

1. $\lambda \in \mathbb{R}$ は A の固有値
2. $\lambda \in \mathbb{R}$ は A の固有多項式の解，つまり $\varphi_A(\lambda) = 0$

証明

- 正方行列 B に関して次が同値であったことを思い出す．
  1. $|B| = 0$，つまり B が正則でない．
  2. 連立一次方程式 $B\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ が非自明（$\boldsymbol{0}$ でない）解を持つ．
- これより $\varphi_A(\lambda) = |\lambda\, E_n - A| = 0$ は $\lambda\, E_n - A$ を係数行列とする連立一次方程式

$$(\lambda\, E_n - A)\,\boldsymbol{v} = 0$$

が非自明な解 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$ を持つことと同値．

- つまり，ある $\boldsymbol{v} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ が存在して $A\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$.

重複度

定義12.10（重複度）

- A の固有値 λ の**重複度**とは，固有多項式 $\varphi_A(t)$ の解 $t=\lambda$ の重複度.
- つまり

$$\varphi_A(t) = (t-\lambda)^k \varphi(t) \quad （\varphi(\lambda) \neq 0）$$

となる $k \in \mathbb{N}$ のこと.

- 一般に，固有空間 $V(\lambda)$ の次元は，固有多項式 $\varphi_A(t)$ の解 $t=\lambda$ の重複度以下となる.
- この講義では，重複度 1 の場合のみを扱うので，あまり気にする必要はない.

固有値問題(例)

例12.11

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ が定義する線形写像 $f_A\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を考える.
- 固有多項式は

$$\varphi_A(t) = |t\,E_2 - A| = \begin{vmatrix} t-4 & -3 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-5)$$

- 定理12.9の証明から分かるように, 固有値 $t = \lambda$ の固有ベクトル $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を求めるには

$$(\lambda\,E_2 - A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

を解けばよい.

固有値問題(例)

例12.11(つづき)

- $t=1$ の場合, $(E_2-A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathbf{0}$ は連立方程式

$$-3x-3y=0$$
$$-x-y=0$$

と同値であり, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\rangle$ が分かる.

- したがって, $V(1)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\rangle=\left\{\begin{bmatrix} c \\ -c \end{bmatrix}\middle| c\in\mathbb{R}\right\}$
- $t=5$ の場合, $(5\,E_2-A)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\mathbf{0}$ は連立方程式

$$x-3y=0$$
$$-x+3y=0$$

と同値であり, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\in\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle$ が分かる.

- したがって, $V(5)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}\right\rangle=\left\{\begin{bmatrix} 3c \\ c \end{bmatrix}\middle| c\in\mathbb{R}\right\}$

固有値問題(問題)

問題12.12

- 次の行列の固有値空間を求めよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

固有値問題(3次正方行列の例)

例12.13

- 行列 $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -3 & 7 & -3\\ 3 & -5 & 5\end{bmatrix}$ の固有値空間を求める.

$$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t & -1 & 2\\ 3 & t-7 & 3\\ -3 & 5 & t-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t & -1 & 2\\ 3 & t-7 & 3\\ 0 & t-2 & t-2\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t & -1 & 2\\ 3 & t-7 & 3\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=(t-2)\begin{vmatrix}t & -3 & 2\\ 3 & t-10 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(t-2)\begin{vmatrix}t & -3\\ 3 & t-10\end{vmatrix}=(t-2)(t-1)(t-9)$$

であるから, 固有値は $t=1,2,9$.

- $t=1$ の場合, $(E_2-A)\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & -6 & 3\\ -3 & 5 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ と同値であり $V(1)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}3\\ 1\\ -1\end{bmatrix}\right\rangle$
- $t=2$ の場合, $(2E_2-A)\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 3\\ -3 & 5 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ と同値であり $V(2)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -1\end{bmatrix}\right\rangle$
- $t=9$ の場合, $(9E_2-A)\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ -3 & 5 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\mathbf{0}$ と同値であり $V(9)=\mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}1\\ 3\\ -3\end{bmatrix}\right\rangle$

ケーリー・ハミルトンの定理

- 固有値問題とは関係ないが，固有多項式の重要な応用例としてケーリー・ハミルトンの定理を紹介する.

定義12.14

- A を n 次正方行列とする.
- $\mathbb{R}$ 係数多項式

$$\phi(x) = a_m\, x^m + a_{m-1}\, x^{m-1} + \cdots + a_1\, x + a_0$$

が与えられたとき，$\phi(x)$ に A を代入する操作を

$$\phi(A) = a_m\, A^m + a_{m-1}\, A^{m-1} + \cdots + a_1\, A + a_0\, E_n$$

で定義する.

- $\phi(A)$ は n 次正方行列である.
- 例えば，$\phi(x) = 2x^3 - x^2 + 5$ であれば

$$\phi(A) = 2\,A^3 - A^2 + 5\,E_n$$

ケーリー・ハミルトンの定理

定理12.15（ケーリー・ハミルトンの定理）
- 正方行列 A に対して，$\varphi_A(A) = O$ が成り立つ.

- 例えば，行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有多項式は

$$\varphi_A(t) = |t\,E_2 - A| = \begin{vmatrix} t-4 & -3 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = t^2 - 6t + 5$$

であるから

$$A^2 - 6\,A + 5\,E_2 = O$$

- 実際

$$A^2 - 6\,A + 5\,E_2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^2 - 6\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & 18 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 24 & 18 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ケーリー・ハミルトンの定理(2次)

例12.16

- $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ とすると

$$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} t-a & -b \\ -c & t-d \end{vmatrix}=t^2-(a+d)t+(ad-bc)$$

$$=t^2-\mathrm{tr}(A)\,t+|A|$$

- ここで, $\mathrm{tr}(A)=a+d$ と置いた.
- 実際に

$$\varphi_A(A)=A^2-\mathrm{tr}(A)\,A+|A|\,E_2$$

が成り立つことを確認せよ.

対角化

定義12.17

- n 次正方行列 A に対して，適当な n 次正方行列 P を見つけて

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{（対角行列）}$$

の形にすることを対角化という.

- 行列は必ず対角化できるわけではないが，この講義では対角化可能な行列だけを扱う（後述）.
- 行列の対角化には深い意味と強力な応用がある.

対角化の流れ

- 一般論を展開する前に具体的かつ基本的な場合を考察する.

例12.18

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の固有空間は $V(1) = \mathbb{R}\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$, $V(5) = \mathbb{R}\left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.
- $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ を固有値 $1, 5$ に属する固有ベクトルとし, $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ とすると

$$A\,P = A[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2] = [A\,\boldsymbol{v}_1, A\,\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1, 5\,\boldsymbol{v}_2] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

すなわち

$$A\,P = P\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

- 固有値 $1, 5$ に属する固有ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \mathbb{R}^2$ は一次独立であることが分かるので, 行列 $P = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2]$ の階数は 2 , つまり正則である.
- 上記の式の両辺に左から P^{-1} を掛けることで

$$P^{-1}\,A\,P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

となり, A を対角化できた.

対角化の流れ

- 実際，$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ の固有値 $1, 5$ に属する固有ベクトルを並べて得られる行列として，$P=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ を考えれば，

$P^{-1}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ であり

$$
\begin{aligned}
P^{-1}AP &= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 15\\ -1 & 5\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix}4 & 0\\ 0 & 20\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 5\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

が確認できる．

対角化定理

定理12.19
- n 次正方行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が相異なるとする.
- $\boldsymbol{v}_i$ を固有値 λ_i の属する固有ベクトルとする.
- n 次正方行列 P を

$$P = [\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_n]$$

で定義すると, P は正則になり

$$P^{-1} A P = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

- つまり P は A を対角化する.

- P が正則であることに関してはスライドの最後の補足を参照せよ.
- P の取り方は一意ではない.
- 証明に関しては, 直前の2次正方行列の議論がそのまま適用できる.

対角化(問題)

問題12.20

- 次の行列を対角化する行列 P と対角化後の行列を求めよ.
- また, 実際に対角化できていることを確認せよ.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

- 前回の講義で固有空間はすでに計算した.

行列の冪乗

例12.21

- 対角化の重要な応用として，$A=\begin{bmatrix}4 & 3\\1 & 2\end{bmatrix}$ に対して，A^{100} を求める．
- まず $P=\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & 1\end{bmatrix}$ に対して，$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}$ であったので

$$(P^{-1}AP)^{100}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 5\end{bmatrix}^{100}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 5^{100}\end{bmatrix}$$

- 左辺の積を具体的に書くと

$$(P^{-1}AP)^{100}=P^{-1}AP\,P^{-1}AP\cdots P^{-1}AP \quad =P^{-1}A^{100}P$$

- したがって

$$A^{100}=P\,(P^{-1}AP)^{100}\,P^{-1}=P\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 5^{100}\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 3\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 5^{100}\end{bmatrix}\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & -3\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1+3\cdot 5^{100} & -3+3\cdot 5^{100}\\-1+5^{100} & 3+5^{100}\end{bmatrix}$$

行列の冪乗(問題)

問題12.22

- 行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 1 & -2\end{bmatrix}$ に関して，A^2, A^3, A^n を計算せよ.

- $A^2=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -1 & 8\end{bmatrix}$, $A^3=\begin{bmatrix}1 & 28\\ 7 & -20\end{bmatrix}$
- $P=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ とおけば，$P^{-1}\,A\,P=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ であるから

$$(P^{-1}\,A\,P)^n=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}(-3)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}$$

- 左辺は $P^{-1}\,A^n\,P$ であるから

$$A^n=P\begin{bmatrix}(-3)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}P^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 4\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-3)^n & 0\\ 0 & 2^n\end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & -4\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}(-3)^n+2^{n+2} & -4(-3)^n+2^{n+2}\\ -(-3)^n+2^n & 4(-3)^n+2^n\end{bmatrix}$$

対角化の応用（発展）

定義12.23

- 次の漸化式で定義される数列 $\{a_i\}$ はフィボナッチ数列と呼ばれる.

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

- 具体的に値を求めてみると

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

- 一般項 a_n を線形代数を使って求めてみる.

- 漸化式 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ は，行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を使えば

$$\begin{bmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}$$

- したがって

$$\begin{bmatrix} a_n \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \end{bmatrix} = A^2 \begin{bmatrix} a_{n-2} \\ a_{n-3} \end{bmatrix} = \cdots = A^{n-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$$

- つまり，一般項を求めるには，行列 A^n を計算すればよい.

対角化の応用(発展)

- 固有多項式は $\varphi_A(t) = t^2 - t - 1$, A の固有値は $\phi_\pm = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.
- 関係式 $\varphi_A(\phi_\pm) = {\phi_\pm}^2 - \phi_\pm - 1 = 0$ を用いると

$$A\begin{bmatrix}\phi_\pm \\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_\pm + 1 \\ \phi_\pm\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\phi_\pm^2 \\ \phi_\pm\end{bmatrix} = \phi_\pm\begin{bmatrix}\phi_\pm \\ 1\end{bmatrix}$$

- つまり, 固有空間は $V(\phi_+) = \mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}\phi_+ \\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$, $V(\phi_-) = \mathbb{R}\left\langle\begin{bmatrix}\phi_- \\ 1\end{bmatrix}\right\rangle$
- $P = \begin{bmatrix}\phi_+ & \phi_- \\ 1 & 1\end{bmatrix}$ とすれば, $P^{-1}AP = \begin{bmatrix}\phi_+ & 0 \\ 0 & \phi_-\end{bmatrix}$
- 詳細は省略するが, A^{n-1} が求まって

$$\begin{bmatrix}a_n \\ a_{n-1}\end{bmatrix} = A^{n-1}\begin{bmatrix}1 \\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}\phi_+^n - \phi_-^n \\ \phi_+^{n-1} - \phi_-^{n-1}\end{bmatrix}$$

- フィボナッチ数列の一般項は

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi_+^n - \phi_-^n)$$

他分野への応用

- その他の重要な応用として
  - 共分散行列の対角化(主成分分析)
  - ヘッセ行列の対角化(多変数関数の極値の形状分析)
  - 遷移行列の対角化(確率過程の時間発展分析)
  - …

などがある.

まとめ

- 固有値問題
  - 固有値
  - 固有ベクトル

- 固有多項式
  - ケーリー・ハミルトンの定理

- 行列の対角化
  - 対角化の応用

固有ベクトルの一次独立性（補足）

- 定理12.19では n 次正方行列 A に「相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ が存在する」ことを仮定した.
- これは常に成り立つとは限らず，対角化可能性の十分条件である.

定理12.24

- n 次正方行列 A の相異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ に属する固有ベクトルを $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s$ とする.
- このとき $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_s$ は線形独立である.

証明

- 帰納法で示す.
- まず，$\boldsymbol{v}_1 \neq 0$ は一次独立なので成り立つ.
- 次に $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ は一次独立だが，$\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r, \boldsymbol{v}_{r+1}$ は一次独立でないと仮定する. このとき

$$\boldsymbol{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i \, \boldsymbol{v}_i \qquad \exists c_i \in \mathbb{R},\ \exists c_j \neq 0 \tag{1}$$

固有ベクトルの一次独立性(補足)

- (1)の両辺に A を掛けて $A\,\boldsymbol{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i\,A\,\boldsymbol{v}_i$, これより

$$\lambda_{r+1}\,\boldsymbol{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i\,\lambda_i\,\boldsymbol{v}_i \tag{2}$$

- 一方で, (1)の両辺に λ_{r+1} を掛けて

$$\lambda_{r+1}\,\boldsymbol{v}_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} c_i\,\lambda_{r+1}\,\boldsymbol{v}_i \tag{3}$$

- (2)と(3)から

$$\sum_{i=1}^{r} c_i\,(\lambda_{r+1} - \lambda_i)\,\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$$

  を得るが, 固有値が異なることから, $\lambda_{r+1} - \lambda_i \neq 0$, かつ $\exists c_j \neq 0$ より, ある $\boldsymbol{v}_i$ の係数は 0 ではない.

- これは $\boldsymbol{v}_1, \dots, \boldsymbol{v}_r$ の一次独立性に矛盾する.