

線形代数

第1回「ベクトルと行列」

萩野 達也

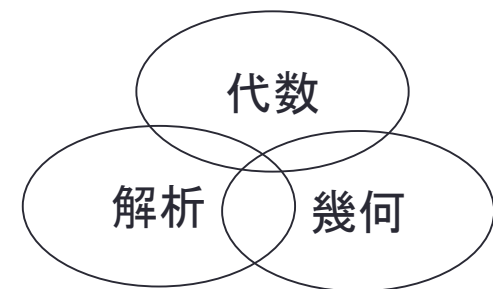
hagino@sfc.keio.ac.jp

講義概要

- 線形代数の基礎事項に関して講義する.
 - 線形代数はベクトルと行列に関する理論であり, データサイエンス, 経済学, 工学など幅広い分野で基礎となる数学である.
 - 線形代数は微分積分と合わせて大学数学の2 本柱と位置付けられることが多い.
 - 本講義では, 線形代数の基本的な考え方を代数と幾何の両面から解説する.
1. ベクトル, 行列, 線形写像(一次変換), ..
 2. 連立一次方程式: 拡大係数行列, 行基本変形, 階数(ランク), ..
 3. 行列式, 余因子展開, 逆行列, ..
 4. 固有値, 固有ベクトル, 対角化, ..

線形代数とは？

- 線形代数とは線形な代数のこと.
- 「代数」とは数とその演算に関する学問.
 - 方程式の解法を研究する.
- 「線形」とは直感的には「まっすぐな」という意味.
 - 実世界は極めて非線形(=曲がっている)なので, しばしば線形近似する.
- 幾何と代数の2つの側面を持つ
 - (幾何) ベクトル, “行列=線形変換”
 - (代数) 連立一次方程式, “行列=(拡大) 係数行列”
- 線形代数はデータサイエンス(DS)においても重要.



DS	線形代数
データ	ベクトル
データ集合	ベクトル空間
データの間関係	線形写像

応用

- 線形代数は数学の基礎理論の1つであり, その応用範囲は非常に広い.
 - ほとんど全ての理系の学問に関係するとも言える.
1. 統計, 機械学習, ...
 2. 画像処理, 3次元CG, 次元削減, ...
 3. 経済学, オペレーションズ・リサーチ, ゲーム理論, ...
 4. 量子力学, 特殊相対論, フーリエ解析, ...
 5. 情報理論, 符号理論, 量子情報, ...
 6. ...

記号について

- 数の集合

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: 自然数全体
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$: 整数全体
- $\mathbb{Q}$: 有理数全体
- $\mathbb{R}$: 実数全体
- $\mathbb{C}$: 複素数全体

- 集合論

- $s \in S$: s は集合 S の元である
- $s \notin S$: s は集合 S の元でない
- $R \subset S$: R は S の部分集合. R の元は全て S の元である.

ベクトル

定義1.1

- n 個の実数 $a_1, \dots, a_n$ を並べたものをベクトルといい, $a_1, \dots, a_n$ をその成分という.
- 成分を縦に並べた組

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

を(n 次元) **列ベクトル**といい,

- 横に並べた

$$[a_1, \quad \dots, \quad a_n]$$

を(n 次元) **行ベクトル**という.

- 通常, ベクトルは列ベクトルを指すことが多いので, 本講義でも列ベクトルを意味することとする.

数ベクトル空間

定義1.2

- n 次元列ベクトル全体の空間を $\mathbb{R}^n$ で表し, **n 次元数ベクトル空間**という.

- 線形代数ではベクトルは

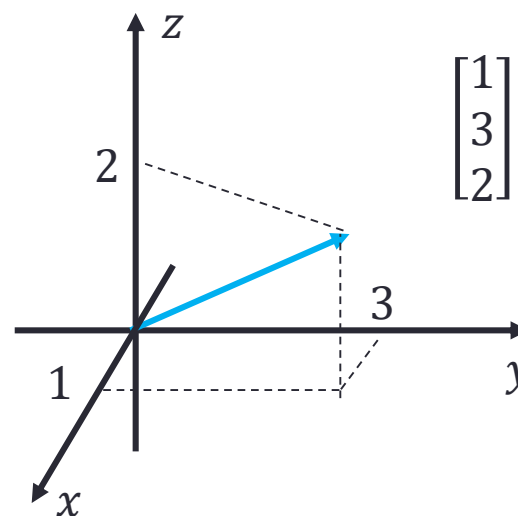
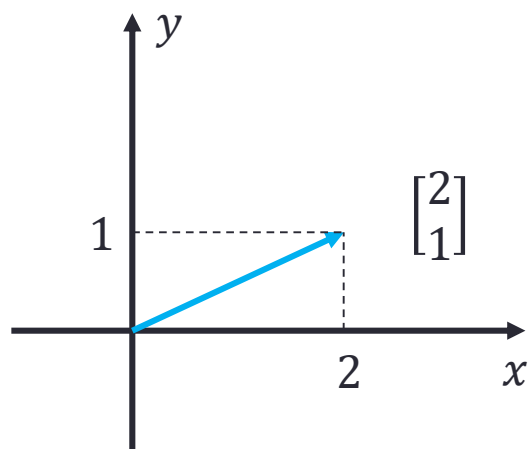
$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

のように太文字を用いる. (高校までは $\vec{a}$ とも書いた.)

- また実数を, ベクトルとの対比において強調するために, **スカラー**と呼ぶ.
- ベクトルとは**方向**と**大きさ**を持った量であり, スカラーとは大きさのみを持った量である.

幾何学的解釈

- 2, 3次元では幾何学的解釈が比較的容易である.



- 4次元以上でも, それらの類似と考えることができる.

ベクトルの演算

- ベクトルには**和**と**スカラー倍**という2つの演算が定義される.
- 2つの(n 次元)ベクトル

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

およびスカラー $k \in \mathbb{R}$ を考える.

- ベクトルの**和**を

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

で定義する. つまり成分ごとの和である.

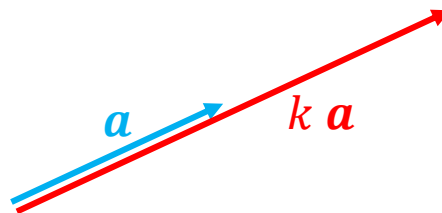
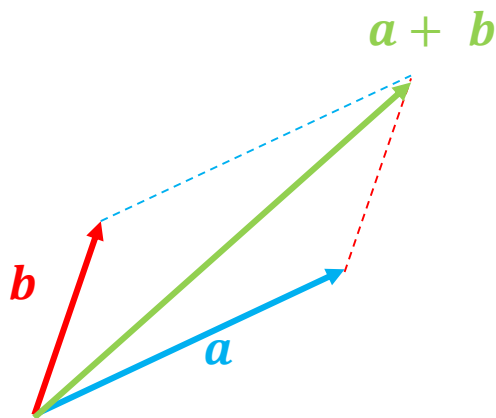
- スカラー倍**を

$$k \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} k a_1 \\ \vdots \\ k a_n \end{bmatrix}$$

で定義する. つまり各成分を k 倍する.

幾何学的解釈

- ベクトル b を平行移動させて, a の終点と b の始点が一致させたとき, a の始点から b の終点に到る矢印が表すベクトルがベクトルの和 $a + b$ である,
- スカラー倍 $k a$ はベクトル a のスケール変換である. $k a$ はベクトル a を含む直線上にあって, 長さが a の $|k|$ 倍のベクトルである. ここで $k < 0$ のときは, $k a$ は a と反対方向を向いている.



ベクトルの演算(例)

例1.3

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+7 \\ -2+0 \\ 3+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 1 \\ 4 \cdot (-2) \\ 4 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{bmatrix}$$

逆ベクトル

定義1.4

- ベクトル $a \in \mathbb{R}^n$ に対して, $(-1)a$ を a の逆ベクトルといい, $-a$ で表す.

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \quad -a = \begin{bmatrix} -a_1 \\ \vdots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

- つまり, a と同じ長さで向きが反対のベクトルが $-a$ である.

零ベクトル

定義1.5

- 全ての成分が 0 であるベクトルを零ベクトルといい, $\mathbf{0}$ で表す.

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 任意のベクトル $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

が成り立つ.

ベクトルの差

- ベクトルの差は和とスカラー倍を組み合わせて定義される. つまりベクトル $a, b \in \mathbb{R}^n$ に関して

$$a - b = a + (-1)b$$

で定義される.

- これは

$$a - b = \begin{bmatrix} a_1 - b_1 \\ \vdots \\ a_n - b_n \end{bmatrix}$$

と同じことである.

例1.6

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 7 \\ -2 - (-1) \\ 3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

行列(1)

次に行列を導入する.

- **ベクトル**は実数を縦に並べたものであった.
- ベクトルには長さ(次元)があった.

- **行列**とは実数を長方形の形に並べたものである.
- 行列には縦横のサイズ(型)がある.

行列(2)

定義1.7

- 2つの自然数 m, n に対して, mn 個の実数

$$a_{ij} \quad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

を次のように長方形に並べてカッコで括ったものを $m \times n$ 行列
((m, n) 行列, m 行 n 列の行列)という.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 実数 a_{ij} を行列 A の (i, j) 成分という
- (m, n) を型(サイズ)という.

- 成分の添字の ij は $i \times j$ の意味ではない.

行列(3)

- 次の行列の型は何か？

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 11 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

行列(4)

- 行列は大文字 A, B, C を用いて表すことが多い.
- また, a_{ij} を (i, j) 成分とする行列を $A = (a_{ij})$ と略記する.
- ベクトルは行列の特別な場合である.
- 実際, 行ベクトルは $1 \times n$ 行列,

$$[a_1, a_2, \dots, a_n]$$

- 列ベクトルは $m \times 1$ 行列と考えることができる.

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

行と列(1)

定義1.8

- 行列 $A = (a_{ij})$ の上から i 番目の横の並び

$$[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$$

を A の第 i 行という. これは n 次元行ベクトルである.

- 行列 A の左から j 番目の縦の並び

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

を A の第 j 列という. これは m 次元列ベクトルである.

行と列(2)

- 次の行列の型, (i, j) 成分, 第 i 行, 第 j 列は何か?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 11 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

- たとえば, 3つ目の行列に関して, 第2列と第3行は

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix} \quad [3 \quad -5]$$

零行列

定義1.9

- 全ての成分が 0 である行列を**零行列**といい, O で表す.

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- m, n の組に対して $m \times n$ 行列の零行列が定まることに注意する.
- 行列の型を強調する必要があるとき以外は, 単に O で表すことが多い.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

正方行列

定義1.10

- $m = n$ であるとき, つまり行と列の数が等しい行列を (n 次) **正方行列** という.
- 正方行列の対角線上に並ぶ成分

$$a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$$

を**対角成分**という.

- また, 対角成分以外の成分がすべて 0 であるような行列を**対角行列**という.

$$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 正方行列には2つの対角が存在するが, 線形代数では左上から右下への対角を意味する.

単位行列

定義1.11

- 対角成分がすべて 1 であるような n 次対角行列を単位行列といい、 E_n と書く.

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- 行列の型を強調する必要がないときには、単に E と表すことが多い.

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

転置行列(1)

定義1.12

- 行列 A の行と列を入れ替えた行列を A の**転置行列**といい, tA で表す.
- A が $m \times n$ 行列であれば, tA は $n \times m$ 行列である.
- 成分で書くと

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

のとき

$${}^tA = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

転置行列(2)

• 行列

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 11 \\ 3 & -5 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -5 \\ 11 & 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

の転置行列は, それぞれ

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 2 \\ 3 & 11 & -5 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 11 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

定理1.13

- ${}^t({}^t A) = A$ が成立することに注意.

対称・交代行列

定義1.13

• A を正方行列とする.

1. ${}^tA = A$ なる行列を**対称行列**

2. ${}^tA = -A$ なる行列を**交代行列**

という. ただし, $-A$ は A の各成分に -1 を掛けて得られる行列である.

• 次の行列は対称行列か？交代行列か？

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

まとめ

- 講義概要
- ベクトル
 - 和
 - スカラー倍
 - 幾何学的意味
- 行列
 - 型
 - 行
 - 列
 - 零行列
 - 正方行列
 - 単位行列
 - 転置
 - 対称行列
 - 交代行列