Q

線形代数
第2回「行列演算」

萩野　達也
hagino@sfc.keio.ac.jp

https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/

今日の内容

- 行列の演算を定義し，その基本的な性質を調べる.
- 行列演算
  - 和
  - スカラー倍
  - 積
- 非可換性
- 零因子
- 正則行列
- 逆行列

行列

定義2.1

- 2つの自然数 m, n に対して, mn 個の実数

$$a_{ij} \qquad (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$$

を次のように長方形に並べてカッコで括ったものを $m \times n$ 行列（(m,n) 行列，m 行 n 列の行列）という.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- 実数 a_{ij} を行列 A の (i,j) 成分という.
- (m,n) を型（サイズ）という.

和

- 行列に対しては，和，スカラー倍，積が定義される.

定義2.2

- $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ に対して

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

を (i, j) 成分とする $m \times n$ 行列 C が定義できる. この C を行列 A, B の和といい，$A + B$ と書く.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- 成分表示で書くと

$$(a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

スカラー倍

定義2.3

- 行列 $A=\left(a_{ij}\right)$ とスカラー k に対して，スカラー倍 $k\,A$ は A の各成分に k を掛けて得られる行列，つまり $k\,a_{ij}$ を (i,j) 成分とする行列

$$k\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,a_{11} & \cdots & k\,a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k\,a_{m1} & \cdots & k\,a_{mn} \end{bmatrix}$$

として定義される.

- 特に A の -1 倍を $-A$ で表す.

- 成分表示で書くと

$$k\left(a_{ij}\right)=\left(k\,a_{ij}\right) \qquad -\left(a_{ij}\right)=\left(-a_{ij}\right)$$

和とスカラー倍（例）

例2.4

- 行列の和

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- 行列のスカラー倍

$$5 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 15 \\ 25 & 5 & 20 \end{bmatrix}$$

差

- 差についてはベクトルと同じように，和とスカラー倍を使って定義する.

定義2.5

- $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $B = (b_{ij})$ に対して

$$A - B = A + (-B) = A + (-1)B$$

と定義する.

- 成分表示で書くと

$$(a_{ij}) - (b_{ij}) = (a_{ij}) + (-b_{ij}) = (a_{ij} - b_{ij})$$

- 以下が成り立つ
  - $A + (-A) = A - A = O$
  - $A + O = A$
  - $A + B = B + A$
  - $A + (B + C) = (A + B) + C$

積

- ベクトルは行列の特別な場合であった.
  - 行列の和とスカラー倍の定義は，ベクトルの場合と同じである.

- 行列の深遠な意義を如実に表しているのが，次に定義する行列の**積**である.
  - 行列 A と B の積 AB は「A の列の数と B の行の数が等しい」ときに限って定義される.

積

定義2.6

- $l \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ と $m \times n$ 行列 $B = (b_{ij})$ を考える.
- このとき

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj} = a_{i1}\, b_{1j} + a_{i2}\, b_{2j} + \cdots + a_{im}\, b_{mj}$$

を (i,j) 成分とする $l \times n$ 行列を A と B の積といい，$A\,B$ と書く.

- 行列の積が自然なものであることは次第に明らかになる.
- 幾何学的には，行列を線形写像と捉えることでその意義が理解される（後述）.

積(例)

例2.7

- 定義2.6は次のように視覚的に理解するのが良い.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 1 \cdot 6 + 3 \cdot (-1) \\ (-2) \cdot 2 + 4 \cdot 5 & (-2) \cdot 6 + 4 \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 3 \\ 16 & -16 \end{bmatrix}$$

- 第 i 行と第 j 列を掛けて, (i,j) 成分が得られる:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & \\ & \end{bmatrix}$$

積（例）

例2.8

- 3×2 行列と 2×2 行列を掛けて，3×2 行列が得られる：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 & 1 \cdot 3 + 0 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 & 4 \cdot 3 + 1 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 & (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 11 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

積(例)

例2.9

- 2×3 行列と 3×3 行列を掛けて, 2×3 行列が得られる:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \cdot 7 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 5 & 2 \cdot 6 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \\ 5 \cdot 7 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 5 & 5 \cdot 6 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & 21 & 11 \\ 56 & 44 & 26 \end{bmatrix}$$

積（問題）

問題2.10

- 次の行列の積を計算せよ.

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

- 得られる行列の型は何であろうか？

結合法則

定理2.11（結合法則）

- 行列の積に関しては**結合法則**が成立する.
- つまり行列 A, B, C について, $A\,B$, $B\,C$ が定義されているとき
$$(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$$
が成立する.

証明：$A = (a_{ij})$ を $m \times n$ 行列, $B = (b_{jk})$ を $n \times r$ 行列, $C = (c_{kl})$ を $r \times s$ 行列とすると,

$$(A\,B)\,C = \left((a_{ij})\,(b_{jk})\right)(c_{kl}) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right)(c_{kl}) = \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{ij} b_{jk} c_{kl}\right)$$

$$A\,(B\,C) = (a_{ij})\left((b_{jk})\,(c_{kl})\right) = (a_{ij})\left(\sum_{k=1}^{r} b_{jk} c_{kl}\right) = \left(\sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} c_{kl}\right)$$

両者の (i, l) 成分は和の取り方の順番が異なるだけなので等しい.

分配法則

- 複数の行列とスカラーが混ざった計算を考える.
- 数の場合と同様に，原則として計算は左から行いうが，積やスカラー倍があるときはそれを先に行う.
- また計算式の途中に括弧があれば，その中の計算が優先される.
- すなわち，通常の文字式の計算と同様.

定理2.12（分配法則）

- $l \times m$ 行列 A, B と $m \times n$ 行列 C, D とスカラー $k, h \in \mathbb{R}$ に関して次が成立する.
  - $A\,(C + D) = A\,C + A\,D$
  - $(A + B)\,C = A\,C + B\,C$
  - $k\,(A + B) = k\,A + k\,B$
  - $(k + h)\,A = k\,A + h\,A$

$A\,(C+D) = A\,C + A\,D$ 証明

- $A = (a_{ij}),\ C = (c_{jk}),\ D = (d_{jk})$ としたとき

$$
\begin{aligned}
A\,(C+D) &= (a_{ij})\left((c_{jk}) + (d_{jk})\right) \\
&= (a_{ij})\left((c_{jk} + d_{jk})\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}(c_{jk} + d_{jk})\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{jk} + a_{ij}d_{jk}\right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_{jk}\right) + \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}d_{jk}\right) \\
&= (a_{ij})\,(c_{jk}) + (a_{ij})\,(c_{jk}) \ = A\,C + A\,D
\end{aligned}
$$

他も同様

積の存在

- 行列の演算に関して，通常の数の演算が満たす法則と類似の演算法則が成立することを見た．
- 一方で，以下では数が持つ性質とは異なる性質に関して観察する．
- 行列 A, B に対して $A\,B$ が定義されても，$B\,A$ が定義されない場合がある．
- 例えば

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

に対して $A\,B$ は定義されるが，$B\,A$ は定義されない．

非可換性

- n 次元正方行列に対して，積 AB, BA が定義できるが，一般に $AB = BA$ とは限らない．
- 常に $AB \neq BA$ であるということではなく，たまたま $AB = BA$ が成立することもある．
- これを行列の積の**非可換性**という．

例2.13

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

であるから，$AB \neq BA$ である．つまり，A, B は可換でない．

非可換性

- A, B を正方行列とするとき, $A^2 = A\,A$ などが定義される.
- 分配法則(定理2.11)を用いると

$$\begin{aligned}(A+B)^2 &= (A+B)(A+B)\\ &= A(A+B)+B(A+B)\\ &= A^2 + A\,B + B\,A + B^2\end{aligned}$$

である. 一般に $AB \neq BA$ であるから, 最後の式は

$$A^2 + 2A\,B + B^2$$

と一般に等しくない.

- 例2.13で確かめてみよ.

零因子

- 零でない2つの行列の積が零行列になることがある.
- すなわち, $A \neq O$ かつ $B \neq O$ で $AB = O$ となる行列 A, B が存在する.
- このような A, B を零因子という.

例2.14

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ とすれば

$$AB = O$$

が成立している.

単位行列

- 任意の実数 x に対して

$$1 \cdot x = x, \qquad x \cdot 1 = x$$

が成立している．すなわち，1 は情報により相手の数値を変えない性質を持っている．

- 単位行列は実数の世界での 1 に対応する．つまり，$m \times n$ 行列 $A = \left(a_{ij}\right)$ に対して

$$E_m\, A = A, \qquad A\, E_n = A$$

が成立する．

単位行列

例2.15

- 2 × 3 行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

に対して

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

- また

$$A E_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

正則行列

定義2.16

- n 次正方行列 A に対して

$$A\,B = B\,A = E_n$$

を満たす n 次正方行列 B が存在するとき，A は**正則行列**であるという．

- n 次正則行列 A に対して，$A\,B = B\,A = E_n$ となる行列 B は唯一しかない．数学では，そのような事実を B は**一意的**であるという．
- 実際，行列 C が $A\,C = E_n$ を満たしたとすると

$$C = E_n\,C = (B\,A)\,C = B\,(A\,C) = B\,E_n = B$$

逆行列

定義2.17

- n 次正方行列 A に対して

$$A\,B = B\,A = E_n$$

を満たす n 次正方行列 B が存在すれば，それは一意的である．この B を A の**逆行列**といい，A^{-1} で表す．

- $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ は正則行列である．
- 実際，$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ に対して

$$A\,B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2$$

$B\,A = E_2$ も同様．

逆行列

例2.18

- 行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$ は正則行列である.

- 実際, $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & -\frac{2}{3}\\ 0 & -1 & \frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ に対して次を確認せよ.

$$A\,B=B\,A=E_3$$

逆行列

- 一般に行列 A が正則であるか否かは確認が難しい.
- 2次正方行列に対しては，逆行列を求める簡明な公式が知られている.

定理2.19

- 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し，A の行列式を

$$|A| = ad - bc$$

で定義する.

- A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である.
- このとき A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

で与えられる.

逆行列

問題2.20

- 次の行列の逆行列が存在するかどうか答え，存在する場合には逆行列を求めよ.

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}2&3\\5&7\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix}$$

- 例えば，$|A|=1\cdot 1-2\cdot 2=-3$ であるから逆行列が存在して，

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

- 実際に $A\,A^{-1}=A^{-1}\,A=E_2$ を確かめよ.

まとめ

- 行列の演算を定義し，その基本的な性質を調べた．

- 行列演算
  - 和
  - スカラー倍
  - 積

- 非可換性

- 零因子

- 正則行列

- 逆行列