

線形代数

第6回「連立一次方程式(2)」

萩野 達也

hagino@sfc.keio.ac.jp

<https://vu5.sfc.keio.ac.jp/slide/>

今日の内容

- 連立方程式の解の存在について議論する.
- 逆行列との関係, 具体的な計算方法に関して開設する.

1. 解の存在 (一意, 不定, 不能)

2. 掃き出し法による逆行列の計算

連立一次方程式

- 3変数 x, y, z に関する3個の方程式からなる連立一次方程式

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ x + 10y - 7z = 9 \\ -4x + y + 8z = 7 \end{cases}$$

はベクトルと行列を用いて

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -7 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

と書くことができた.

係数行列・変数ベクトル・定数項ベクトル

- 一般に, n 変数の m 個の方程式からなる連立一次方程式は $m \times n$ 行列 A と n 次元ベクトル x , m 次元ベクトル b を用いて

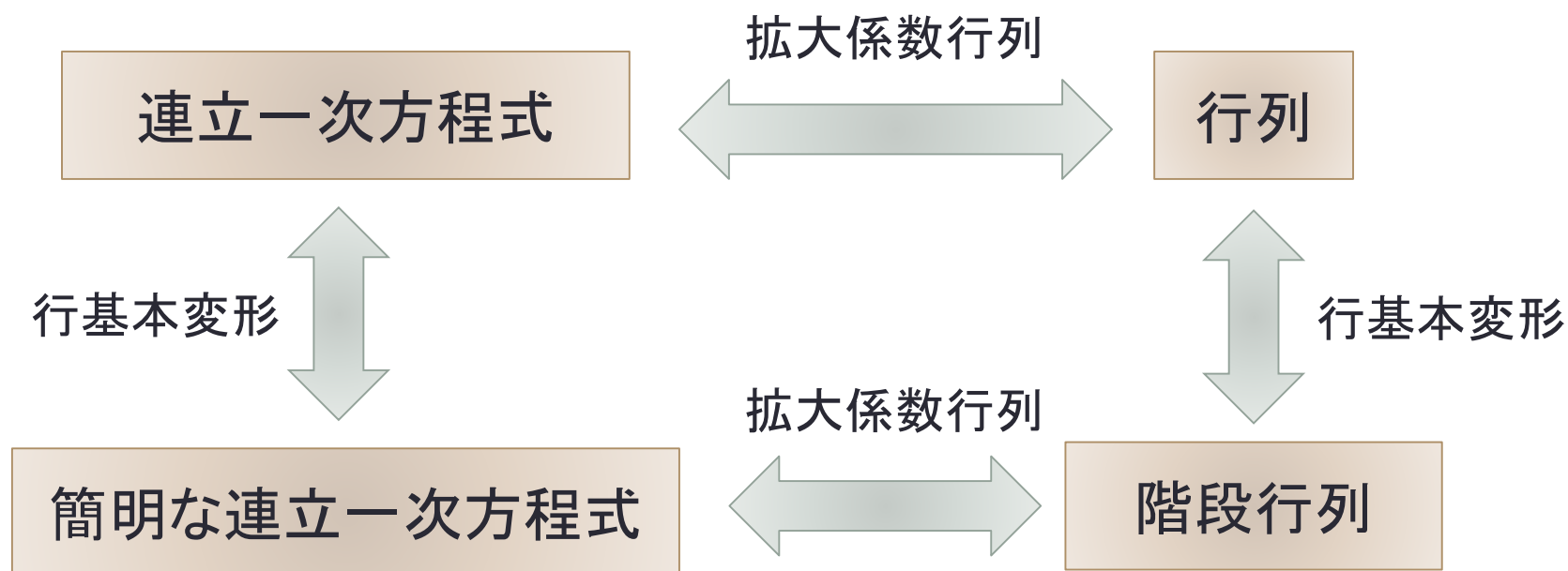
$$A x = b$$

の形に書くことができる.

- A を係数行列, x を変数ベクトル, b を定数項ベクトルという.
- $m \times (n + 1)$ 行列 $[A \mid b]$ を拡大係数行列という.
 - n は変数の数であるから自由度
 - m は一次方程式の数であるから拘束条件の数に対応している.

拡大係数行列と行基本変形

- 行列の行基本変形は、連立一次方程式の同値な変形に対応している.



解の存在(一意・不定・不能)

- 方程式の自由度と拘束条件の数が釣り合っている n 変数の n 個の連立一次方程式 $Ax = b$ の場合, 解について次の3つの場合が考えられる:

1. 解が一意に存在する.

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

2. 解が存在するが, 一意に定まらない(不定).

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$$

3. 解が存在しない(不能).

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 13 \end{cases}$$

解が一意に存在する場合

- 連立一次方程式

$$\begin{cases} x - y = 4 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

の拡大係数行列を掃き出し法で簡約階段行列に変形する.

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 7 & -7 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right] = [A' \mid \mathbf{b}']$$

解が一意に存在する場合

- 掃き出し法は、連立一次方程式を同値な連立方程式に変換する操作である.
- 得られた行列

$$[A' \mid \mathbf{b}'] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

は、連立一次方程式が解けた状態

$$\begin{cases} x & = 3 \\ y & = -1 \end{cases}$$

に対応する.

- 階数を計算すると, $\text{rank } A' = 2$ かつ $\text{rank } [A' \mid \mathbf{b}'] = 2$ である.

解が一意に定まらない(不定)場合

- 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 12 \end{cases}$$

の拡大係数行列を掃き出し法で簡約階段行列に変形する.

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 12 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right] = [A' \mid \mathbf{b}']$$

- 階数を計算すると, $\text{rank } A' = 1$ かつ $\text{rank } [A' \mid \mathbf{b}'] = 1$ である.
- 行列 $[A' \mid \mathbf{b}']$ の第2行は

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$$

に対応するので, 何も条件がない.

- 解は変数 t を用いて次のように表すことができる.

$$x = -2t + 4, \quad y = t$$

解が存在しない(不能)場合

- 連立一次方程式

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 3x + 6y = 13 \end{cases}$$

の拡大係数行列を掃き出し法で簡約階段行列に変形する.

$$[A \mid \mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 13 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = [A' \mid \mathbf{b}']$$

- 階数を計算すると, $\text{rank } A' = 1$ かつ $\text{rank } [A' \mid \mathbf{b}'] = 2$ である.
- 行列 $[A' \mid \mathbf{b}']$ の第2行は

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$$

に対応する.

- 条件が矛盾しているため, 解は存在しない.

解の存在(一意・不定・不能)

定理6.1

- n 変数の n 個の方程式からなる連立一次方程式 $Ax = b$ に関して、次が成立する.

1. $\text{rank } A = \text{rank } [A \mid b] = n$ であれば、解が一意に存在する.
2. $\text{rank } A = \text{rank } [A \mid b] < n$ であれば、解は $n - \text{rank } A$ 個の媒介変数で表現できる. (不定)
3. $\text{rank } A < \text{rank } [A \mid b]$ であれば、解は存在しない. (不能)

- $[A \mid b]$ は A を拡大したもののなので、 $\text{rank } A \leq \text{rank } [A \mid b] (\leq n)$

1. 自由度と束縛条件の数が釣り合っている.

- $\text{rank } A = n$ ということは、行基本変形により n 行目まできれいに一つずつ短くなる階段行列に変形できるため、 $Ax = b$ がうまく解くことが可能である.

3. 矛盾が存在.

- $\text{rank } A < \text{rank } [A \mid b]$ ということは係数行列 A においては、 $\text{rank } A < n$ なので、行基本変形によって最後のいくつかの行が 0 となるが、対する $[A \mid b]$ では同じ変形では、定数ベクトルは 0 にはならないため矛盾となる.

2. 無駄があり、自由度 $>$ 束縛条件の数.

- $\text{rank } A = \text{rank } [A \mid b]$ なので矛盾は生じないが、 n 個の変数すべてを確定させることができない.

(非)斉次連立一次方程式

定義6.2

- 定数項ベクトルに関して
 - $b = 0$ である連立一次方程式を**斉次**,
 - $b \neq 0$ である連立一次方程式を**非斉次**という.
- 斉次連立一次方程式 $Ax = 0$ に関して, 常に
$$\text{rank } A = \text{rank } [A \mid b]$$
が成り立つので, 必ず解が存在する.
- 実際, $x = 0$ は解であり, これは**自明解**と呼ばれる.
- 自明解でない解を**非自明解**という.
- $\text{rank } A = n$ であれば, 自明解が唯一の解である.

(非)自明解

- 連立方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -7 \\ -4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

は自明解 $\mathbf{0} = {}^t[0 \ 0 \ 0]$ を持ち, これが唯一の解である.

- 一方, 連立方程式

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -7 \\ 3 & 7 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

は自明解 $\mathbf{0}$ だけでなく, 非自明解 ${}^t[-29 \ 19 \ 23]$ や ${}^t[58 \ -38 \ -46]$ を持つ.

逆行列

- n 変数の n 個の連立一次方程式

$$A x = b$$

に関して, もし係数行列 A の逆行列 A^{-1} が存在すると,
両辺に左から A^{-1} を掛けることで,

$$x = A^{-1} b$$

となり, 連立一次方程式の解が求まる.

- このことから
 - 係数行列の逆行列を計算することは, 連立一次方程式を解くことに対応する.
 - 定理6.1から, 階数と逆行列の存在が関係していると予想される(後述).

逆行列の公式

- 2次正方行列の逆行列に関する定理を思い出す.

定理6.3

- 2次正方行列 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ に対し, A の行列式を

$$|A| = ad - bc$$

で定義する.

- A が正則であるための必要十分条件は $|A| \neq 0$ である.
- このとき A の逆行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

で与えられる.

逆行列

例6.4

- 連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

を考える.

- 係数行列は正則であり, 逆行列は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから, 解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 21 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

逆行列

- 逆行列の計算は連立一次方程式の解と関係していて、その計算は実用上重要である.
- 一般の大きさの正則行列の逆行列の表示も知られているが、かなり複雑である.
 - 余因子行列を用いた表示を後で説明する.
- 計算機に計算させるには問題ないが、人間が手計算するのは骨が折れる.
- 以下では、行基本変形を用いた、実用的な逆行列の計算方法を紹介する.

逆行列

- 次の定理6.5と定理6.6は基本的であるが、初めて学ぶ際にはその証明は完全に理解できなくても問題はない.

定理6.5

- n 次正方行列 A に対して、次は同値である.
 1. $\text{rank } A = n$
 2. A の簡約化は単位行列 E_n
 3. $Ax = b$ の解が一意に存在
 4. $Ax = 0$ の解は 0 に限る
 5. A は正則行列

定理6.5の証明(1)

(1) $\Rightarrow$ (2)

- $\text{rank } A = n$ であるから, A の簡約化は n 次正方かつすべての行が 0 でない.
- したがって, A の簡約化は単位行列 E_n に限る.

(2) $\Rightarrow$ (3)

- $Ax = b$ の拡大係数行列 $[A \mid b]$ の簡約化は

$$[A \mid b] \rightarrow [E_n \mid b']$$

となるので, $Ax = b$ は解 b' を持ち, また解は一意である.

(3) $\Rightarrow$ (4)

- (3) の特別な場合. 自明解が唯一の解.

(4) $\Rightarrow$ (1)

- 定理6.1から, $\text{rank } A = \text{rank } [A \mid \mathbf{0}] = n$.

定理6.5の証明(2)

(3) $\Rightarrow$ (5)

- n 個の連立一次方程式

$$A \mathbf{x} = \mathbf{e}_1, A \mathbf{x} = \mathbf{e}_2, \dots, A \mathbf{x} = \mathbf{e}_n$$

の解を $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n \in \mathbb{R}^n$ として, n 次正方行列

$$C = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n]$$

を考える.

- このとき, 行列の積の定義より

$$\begin{aligned} A C &= A [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n] \\ &= [A \mathbf{c}_1, A \mathbf{c}_2, \dots, A \mathbf{c}_n] \\ &= [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n] \\ &= E_n \end{aligned}$$

- $C A = E_n$ を示すのは少し面倒であるが, $\text{rank } A = n$ と正則性の関係は, 余因子行列のところでも, はっきりする.

定理6.5の証明(3)

(5) $\Rightarrow$ (3)

- $A \boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の両辺に左から A^{-1} を掛けて

$$A^{-1} A \boldsymbol{x} = A^{-1} \boldsymbol{b}$$

すなわち

$$\boldsymbol{x} = A^{-1} \boldsymbol{b}$$

逆行列と掃き出し法

- 定理6.5にもとづき, 逆行列を掃き出し法で求めることができる.

定理6.6

- 正則な n 次正方行列 A に対して, $n \times 2n$ 行列 $[A \mid E_n]$ を考える.
- $[A \mid E_n]$ の簡約化は $[E_n \mid B]$ の形になる.
- B は A の逆行列となる.

- 例えば, 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列を求めるには

$$[A \mid E_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

の簡約化を考えればよい.

- 簡約化が $[E_n \mid B]$ の形でなければ, そもそも A は正則ではない.

定理6.6の証明

- 方程式 $Ax = e_i$ の解を c_i とすれば, 拡大係数行列 $[A \mid e_i]$ の簡約化は

$$[A \mid e_i] \longrightarrow [E_n \mid c_i]$$

となる.

- 一方で, 定理6.5の証明で示したように

$$A^{-1} = [c_1, c_2, \dots, c_n]$$

である.

- 掃き出し法は列を保つので

$$[A \mid e_1, e_2, \dots, e_n] = [A \mid E_n]$$

の簡約化は

$$[E_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n] = [E_n \mid A^{-1}]$$

逆行列と掃き出し法(例)

例6.7

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求める.

$$[A \mid E_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 1 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} \end{array} \right] = [E_2 \mid A^{-1}]$$

逆行列と掃き出し法(例)

例6.8

- 行列 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ の逆行列を掃き出し法で求める.

$$[A \mid E_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] = [E_3 \mid A^{-1}]$$

逆行列と掃き出し法(問題)

問題6.9

- 次の正則行列の逆行列を掃き出し法を使って求めよ.
- また, 実際に逆行列になっていることも確かめよ.

$$(a) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(c) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(d) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

逆行列と連立一次方程式(例)

例6.10

- 次の連立一次方程式の解を求めよ.
- ただし, 解が一意的に存在することを知っているとする.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2 \\ 2y + z = 3 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

1. 連立一次方程式を $Ax = b$ の形に書く.
2. 係数行列 A の逆行列を計算する.
3. 解 $x = A^{-1}b$ を計算する.

逆行列と連立一次方程式(例)

- 係数行列 A の逆行列を計算する.

$$[A \mid E_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right] = [E_3 \mid A^{-1}]$$

逆行列と連立一次方程式(例)

- 与えられた連立一次方程式

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

の解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{2} & 0 & -\frac{2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

まとめ

- 解の存在
 - 一意
 - 不定
 - 不能
- 掃き出し法による逆行列の計算